Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 512.553+512.56

Сергеев Сергей Николаевич

Идемпотентные аналоги теорем отделимости и образующие идемпотентных полумодулей

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2008

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	академик РАН, профессор Виктор Павлович Маслов
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Игорь Борисович Кожухов
	доктор физико-математических наук, профессор Аскар Аканович Туганбаев
Ведущая организация:	Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого

Защита диссертации состоится 18 апреля 2008 г. в 16 ч. 40 мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Российская Федерация, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 18 марта 2008 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 в МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор

А.О. Иванов

Общая характеристика работы

Актуальность темы

При решении ряда задач в теории оптимизации (проблемы оптимизации на графах, теория оптимального управления, дискретные системы событий, сети Петри), в физике (теория обобщенных решений уравнения Гамильтона-Якоби, низкотемпературная асимптотика в статистической физике), в алгебраической геометрии и в других областях явно или неявно используется линейность по отношению к операции "сложения" $\oplus$, которая является идемпотентной ($a \oplus a = a$). Этот общий принцип, сформулированный академиком В.П. Масловым[1,2] для ряда задач теории оптимизации и теории нелинейных систем, во многом определяет развитие новой области математики, которая получила название *идемпотентная математика*. Многие интересные результаты, полученные в этой области, содержатся в сборнике статей.[3] В практически важных задачах, для решения которых используется идемпотентная математика, роль идемпотентного сложения часто играет операция взятия минимума или максимума двух элементов, а основной алгебраической структурой является некоторое идемпотентное полуполе. Например, полуполе $\mathbb{R}_{\max,\times}$, определяемое как множество неотрицательных чисел $\mathbb{R}_+$, снабженное операцией идемпотентного сложения $\oplus = \max$ и обычного умножения $\odot = \times$, или изоморфное ему полуполе $\mathbb{R}_{\max}$, определяемое как множество чисел $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ с операциями $\oplus = \max$ и $\odot = +$.

Основные приложения идемпотентной математики связаны с задачами оптимизации. Одно из первых таких приложений было описано в работах Б.А. Карре.[4,5] В этих работах замечено, что метод исключения Гаусса без выбора ведущего элемента можно рассматривать как прототип для оптимизационных алгоритмов на графах и применять для решения систем линейных уравнений над широким классом полуколец. Главный объект в этих работах — это ряд $I \oplus A \oplus A^2 \oplus \ldots$, где A — это некоторая квадратная матрица с эле-

[1] V.P. Maslov. *New superposition principle for optimization problems.*// Seminaire sur les Equations aux Dérivées Partielles 1985/86, Centre Math. de l'Ecole Polytechnique, Palaiseau (1986), exposé 24.

[2] В.П. Маслов. *Новый подход к обобщенным решениям нелинейных систем.*// ДАН СССР, том 292, є1, стр. 37–41, 1987.

[3] G.L. Litvinov and V.P. Maslov, eds. *Idempotent Mathematics and Mathematical Physics.* Vol. 377 of Contemporary Mathematics. American Mathematical Society, Providence, 2005.

[4] B.A. Carré. *An algebra for network routing problems.*// J. of the Inst. of Maths. and Applics., vol. 7, p. 273–299, 1971.

[5] B.A. Carré. *Graphs and Networks.* Clarendon Press, Oxford, 1979.

ментами из идемпотентного полукольца, являющийся очевидным аналогом операции $(I - A)^{-1}$ и называемый *алгебраическим замыканием* A. Эти идеи получили свое дальнейшее развитие в работах Г.Л. Литвинова, В.П. Маслова и др.[6,7], посвященных универсальным алгоритмам линейной алгебры.

Другие задачи линейной алгебры над идемпотентными полуполями, в частности, решение систем вида $Ax = b$ и нахождение собственных значений и собственных векторов $Ax = \lambda x$, возникают в связи с составлением расписаний, синхронизацией производства и сетями Петри.[8,9,10] Такие приложения возникают и в физике. В качестве примера, рассмотрим модель Френкеля-Конторовой. В простейшем варианте это одномерная цепочка атомов, находящихся в периодическом потенциале. При статическом описании этой модели задача заключается в нахождении основных состояний и значений параметров, которые характеризуют эти состояния. Алгоритм для нахождения основных состояний был предложен У. Чоу и Р.Б. Гриффитсом,[11] которые использовали для этого собственные векторы и собственные значения некоторого интегрального оператора над идемпотентным полуполем. Метод Чоу и Гриффитса был использован в ряде физических задач. [12,13] Близкие по математическому описанию задачи возникают и в математической экономике, а именно, в задачах динамической оптимизации с бесконечным горизонтом, где требуется найти траектории, приносящие максимальный доход.[14]

В связи с этими практическими приложениями, возникает интерес к теории идемпотентных полуколец и полуполей, и к теории полумодулей (т.е. "пространств") над этими полукольцами. Значительная часть этих результатов собрана в монографии Дж. Голана.[15] Отметим, что линейная алгебра

[6] G.L. Litvinov, V.P. Maslov, and A.Ya. Rodionov. *Unifying approach to software and hardware design for scientific calculations.*// Intern. Sophus Lie Centre, Moscow, 1995. *E-print arXiv:quant-ph/9904024.*

[7] G.L. Litvinov and E.V. Maslova. *Universal numerical algorithms and their software implementation.*// Programming and Computer Software, vol. 26, no. 5, p. 275–380, 2000. *E-print arXiv:math.NA/0102144.*

[8] R.A. Cuninghame-Green. *Minimax Algebra.* Springer, Berlin, 1979.

[9] F.L. Baccelli, G. Cohen, G.J. Olsder, and J.P. Quadrat. *Synchronization and Linearity.* Wiley, Chichester, New York, 1992.

[10] B. Heidergott, G.-J. Olsder, and J. van der Woude. *Max-plus at work.* Princeton Univ. Press, 2006.

[11] W. Chou and R.B. Griffiths. *Ground states of one-dimensional systems using effective potentials.*// Physical Review B, vol. 34, p. 6219–6234, 1986.

[12] J.J. Mazo, F. Falo and L.M. Floría. *Josephson junction ladders: ground state and relaxation phenomena.*// Physical Review B, vol. 52, p. 10433–10440, 1995.

[13] C. Micheletti, R.B. Griffiths, and J.M. Yeomans. *Surface spin-flop and discommensuration transitions in antiferromagnets.* Physical Review B, vol. 59, p. 6239–6249, 1999.

[14] В.П. Маслов и В.Н. Колокольцов. *Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении.* М.:Наука, 1994.

[15] J. Golan. *Semirings and their applications.* Kluwer, Dordrecht, 2000.

над идемпотентными полукольцами (и над полукольцами вообще) отличается тем, что в ней есть много способов определить, что такое линейная независимость, ранг и определитель, и в связи с этим возникает много новых нетривиальных задач.[16]

Идемпотентный анализ был развит в работах В.П. Маслова и его сотрудников. Основной объект идемпотентного анализа В.П. Маслова — это полумодуль полунепрерывных функций на некотором топологическом пространстве, принимающих значение в некотором идемпотентном полукольце.[17,18,19] В цитированных работах была развита теория идемпотентных мер, интегралов, обобщенных функций и идемпотентно линейных операторов). Эти результаты были использованы для построения обобщенных решений уравнения Беллмана, а также в упоминавшихся выше задачах динамической оптимизации с бесконечным горизонтом. В работах Г.Л. Литвинова, В.П. Маслова и Г.Б. Шпиза[20,21] развит алгебраический подход к идемпотентному анализу. Этот подход отличается тем, что в нем основные топологические понятия и результаты моделируются на чисто алгебраическом уровне, с привлечением результатов теории решеток и решеточно упорядоченных групп.

Большую роль в развитии идемпотентной математики играет эвристический принцип соответствия,[22] родственный известному принципу соответствия Н. Бора: у многих интересных конструкций и результатов "традиционной" математики над полями должны быть интересные идемпотентные аналоги. В частности, это касается идемпотентного аналога выпуклой геометрии, развитию которого посвящена данная диссертация. Один из первых результатов в этом направлении получил К. Циммерманн.[23] В его работе

[16] A.E. Guterman. *Rank and determinant functions for semirings.*// London Mathematical Society Lecture Notes, vol. 347, p. 1-33, 2007.

[17] В.П. Маслов. *Асимптотические методы решения псевдодифференциальных уравнений.* М.:Наука, 1987.

[18] V.P. Maslov and S.N. Samborskiĭ, eds. *Idempotent analysis*, vol. 13 of Advances in Soviet Math. American Mathematical Society, Providence, 1992.

[19] V.N. Kolokoltsov and V.P. Maslov. *Idempotent analysis and applications.* Kluwer Acad. Publ., Dordrecht et al., 1997.

[20] Г.Л. Литвинов, В.П. Маслов и Г.Б. Шпиз. *Линейные функционалы на идемпотентных пространствах: алгебраический подход.*// Доклады РАН, том 363, є3, стр. 298–300, 1998.

[21] Г.Л. Литвинов, В.П. Маслов и Г.Б. Шпиз. *Тензорные произведения идемпотентных полумодулей. Алгебраический подход.*// Мат. Заметки, том 65, є4, стр. 572–585, 1999.

[22] G.L. Litvinov and V.P. Maslov. *Correspondence principle for idempotent calculus and some computer applications.*// J. Gunawardena (Ed.), *Idempotency*, Publications of the I. Newton Institute, pages 420–443. Cambridge Univ. Press, 1998.

[23] K. Zimmermann. *A general separation theorem in extremal algebras.*// Ekonomicko-matematický obzor, vol. 13, no. 2, 1977, p. 179–201.

рассмотрены выпуклые множества в конечномерных полумодулях над $\mathbb{R}_{\max}$ и доказана теорема об отделимости точки от замкнутого идемпотентно выпуклого множества. Обобщения этого результата расматриваются в работе С.Н. Самборского и Г.Б. Шпиза[24] (на полумодули функций над идемпотентными полуполями), а также в работах Г. Коэна, С. Гобера, Ж.-П. Квадра и И. Зингера.[25] Изучению этого типа выпуклости также посвящена работа М. Девелина и Б. Штурмфельса.[26] В этой работе развивается другой подход к идемпотентной выпуклости, в основе которого лежит разложение свободного полумодуля, элементами которого являются некоторые выпуклые (в обычном смысле) области, то есть клетки. Отметим, что важную роль в этих работах играют проекторы на идемпотентные полумодули, имеющие много общего с ортогональными проекциями на выпуклые множества. Композиции этих проекторов, исследуемые в данной диссертации и называемые здесь циклическими проекторами на идемпотентные полумодули, также используются для нахождения точки, лежащей в пересечении нескольких полумодулей.[27]

Абстрактные версии теорем отделимости, а также результаты, касающиеся соотношений между числами Хелли, Радона и Каратеодори, известны в аксиоматической теории выпуклости.[28] В частности, известны теоремы отделимости двух непересекающихся обобщенно выпуклых множеств с помощью двух дополняющих друг друга полупространств.[29] Существует также много других обобщений и аналогов теории выпуклости, актуальных в настоящее время в связи с приложениями в математической экономике.[30]

Основное затруднение при построении идемпотентного аналога выпуклой геометрии состоит в том, что доказательства многих теорем выпуклой геометрии не переносятся тривиальным образом на исследуемый случай. Например, в обычном выпуклом анализе можно легко показать, что два выпуклых множества A и B отделяются друг от друга тогда и только тогда, когда точка

[24] S.N. Samborskiĭ and G.B. Shpiz. *Convex sets in the semimodule of bounded functions.*// V.P. Maslov and S.N. Samborskiĭ, eds. *Idempotent analysis,* pages 135–137. AMS, Providence, 1992.

[25] G. Cohen, S. Gaubert, J.P. Quadrat, and I. Singer. *Max-plus convex sets and functions.*// G. Litvinov and V. Maslov, eds. *Idempotent mathematics and mathematical physics*, pages 105–129. AMS, Providence, 2005. *E-print arXiv:math.FA/0308166.*

[26] M. Develin and B. Sturmfels. *Tropical convexity.*// Documenta Math., vol. 9, 2004, p. 1–27. *E-print arXiv:math.MG/0308254.*

[27] R.A. Cuninghame-Green and P. Butkovič. *The equation* $A \otimes x = B \otimes y$ *over (max,+).*// Theoretical Computer Science, vol. 293, 2003, p. 3–12.

[28] В.П. Солтан. *Введение в аксиоматическую теорию выпуклости.* Кишинев, Штиинца, 1984.

[29] V. Chepoi. *Separation of two convex sets in convexity structures.*//J. of Geometry, vol. 50, 1994, p. 30-51.

[30] A. Eberhard, N. Hadjisavvas and D.T. Luc, eds. *Generalized convexity, generalized monotonicity and applications.* Vol. 77 of Nonconvex Optimization and Its Applications, Springer, 2006.

0 отделяется от разности $A - B$, однако в идемпотентной математике нет операции вычитания и идемпотентный аналог разности $A - B$ оказывается слишком “слабым”. Похожие трудности возникают и в случае теоремы Минковского о крайних элементах замкнутых выпуклых множеств. Преодоление этих трудностей — основной стимул данной работы.

Цель работы

Цель работы — исследовать аналог выпуклой геометрии в полумодулях над идемпотентными полуполями; в частности, получить новые аналоги некоторых известных теорем конечномерной выпуклой геометрии.

Методы исследования

В работе используются методы линейной алгебры над идемпотентными полукольцами, а также элементы теории решеток и теории неотрицательных матриц и операторов.

Научная новизна

Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Получена теорема отделимости нескольких замкнутых полумодулей и, как следствие этой теоремы, идемпотентный аналог теоремы Хелли;

2. Получена теорема, характеризующая спектр циклических проекторов в терминах некоторого обобщения проективной метрики Гильберта;

3. Получен идемпотентный аналог теоремы Минковского;

4. В связи с клеточным разложением свободного полумодуля, описаны перенормировки операции алгебраического замыкания, определенные для широкого класса квадратных и прямоугольных матриц.

Теоретическая и практическая ценность

Диссертация носит теоретический характер. Результаты, полученные в ней, могут быть полезны для дальнейшего изучения идемпотентно выпуклой геометрии и теории полумодулей над идемпотентными полукольцами.

Апробация результатов

1. Международная конференция “II International Conference on Matrix Methods and Operator Equations”. Москва, Институт Вычислительной Математики РАН, 23-27 июля 2007 года.

2. Международная конференция “Idempotent and tropical mathematics and problems of mathematical physics”. Москва, Независимый Московский Университет, 25-30 августа 2007 года.

3. Международная конференция “Геометрия в Астрахани”. Астрахань, АГУ, сентябрь 2007 года.

4. Семинар “Кольца и модули”. Руководители: проф. А.В.Михалев, В.Н.Латышев, В.А.Артамонов, Е.С.Голод, В.К.Захаров, доц. В.Т.Марков и А.Э.Гутерман. Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова, октябрь 2007 года.

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в пяти работах автора. Список работ приведен в конце автореферата [1-5].

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения и трех глав. Текст диссертации изложен на 71 странице. Список литературы включает 85 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении изложена краткая история исследуемого вопроса, показана актуальность темы и сформулированы основные результаты диссертации.

Первая глава

В первой главе получены основные результаты по теоремам отделимости и циклическим проекторам в идемпотентных полумодулях, полученные в статье [3]. Напомним некоторые факты, касающиеся роли отношения порядка в идемпотентных полуполях и полумодулях, а также об идемпотентном аналоге выпуклости.

Рассматривается полумодуль $\mathcal{V}$ над полуполем $\mathcal{K}$ с идемпотентным сложением $\oplus$. Нуль полуполя и нуль полумодуля обозначаются $\mathbf{0}$, единица полуполя обозначается $\mathbf{1}$. Сложение $\oplus$ задает порядок $\leq$ в полукольце $\mathcal{K}$ по правилу $\lambda \oplus \mu = \mu \Leftrightarrow \lambda \leq \mu$ для $\lambda, \mu \in \mathcal{K}$, причем $\lambda \oplus \mu = \sup(\lambda, \mu)$ (по отношению $\leq$). Идемпотентная сумма элементов произвольного множества определяется как точная верхняя грань этого множества, если таковая существует. Отношение порядка с аналогичными свойствами определяется и в полумодуле, его мы также обозначаем $\leq$. Так как любой элемент полуполя или полумодуля неотрицателен по этому отношению, то подполумодули $\mathcal{V}$ можно рассматривать как аналоги выпуклых конусов неотрицательного ортанта. Эта точка зрения согласована со следующим идемпотентным аналогом выпуклости. Дадим следующее хорошо известное определение.

Определение 1 Множество $C \subseteq \mathcal{V}$ называется *идемпотентно выпуклым*, если $\lambda x \oplus \mu y \in C$ для любых $x, y \in C$ и таких $\lambda, \mu \in \mathcal{K}$, что $\lambda \oplus \mu = \mathbf{1}$.

Полукольцо или полумодуль называются *b-полными*, если они замкнуты относительно взятия сумм (т.е. точных верхних граней) любых подмножеств, ограниченных сверху, и если умножение дистрибутивно относительно любых таких сумм. Если можно брать точные верхние грани $\oplus$ ограниченных сверху множеств, то можно брать и точные нижние грани $\wedge$ множеств, ограниченных снизу. Следовательно, в b-полном полукольце или полумодуле можно брать точные нижние грани любых подмножеств, так как все подмножества ограничены снизу нулем $\mathbf{0}$.

Далее мы будем считать, что полукольцо $\mathcal{K}$ и полумодуль $\mathcal{V}$ над $\mathcal{K}$ удовлетворяют следующим условиям.

$(A0)$: полукольцо $\mathcal{K}$ является b-полным идемпотентным полуполем, а полумодуль $\mathcal{V}$ является b-полным полумодулем над $\mathcal{K}$;

$(A1)$: для любых элементов x и $y \neq \mathbf{0}$ из $\mathcal{V}$, множество $\{\lambda \in \mathcal{K} \mid \lambda y \leq x\}$ ограничено сверху.

Эти предположения справедливы для многих полумодулей, рассматривающихся в идемпотентном анализе. Например, для полумодулей $LSC(X)$ полунепрерывных снизу функций на топологическом пространстве X, принимающих значение в некотором b-полном полуполе $(\mathbb{R}_{\max,\times})$.

Из предположений $(A0, A1)$ вытекает, что операция

$$x/y = \max\{\lambda \in \mathcal{K} \mid \lambda y \leq x\}.$$

определена для всех x и всех $y \neq \mathbf{0}$ из $\mathcal{V}$.

Следующее определение хорошо известно.

Определение 2 *Назовем подполумодуль V полумодуля $\mathcal{V}$ b-*(под)полумодулем*, если V замкнут относительно взятия сумм любых своих подмножеств, ограниченных сверху в $\mathcal{V}$.*

Пусть V — это b-подполумодуль полумодуля $\mathcal{V}$. Рассмотрим оператор P_V, определенный по известной формуле

$$P_V(x) = \max\{u \in V \mid u \leq x\},$$

для любого элемента $x \in \mathcal{V}$. Мы пишем "max", подчеркивая, что точная верхняя грань множества в фигурных скобках принадлежит этому множеству. Оператор P_V является *проектором* на подполумодуль V, так как $P_V(x) \in V$ для любого $x \in \mathcal{V}$ и $P_V(v) \in V$ для любого $v \in V$.

Роль полупространства играет следующий известный объект.

Определение 3 *Множество H, определенное с помощью*

$$H = \{x \mid u/x \geq v/x\} \cup \{\mathbf{0}\}$$

где $u, v \in \mathbb{R}^n_{\max,\times}$, $u \leq v$, называется (идемпотентным) полупространством*.*

Если $\mathcal{V} = \mathcal{K}^n$ и все координаты u и v ненулевые, то

$$H = \{x \mid \bigoplus_{\{1,\ldots,n\}} x_i u_i^{-1} \leq \bigoplus_{\{1,\ldots,n\}} x_i v_i^{-1}\},$$

то есть H — это аналог замкнутого однородного полупространства.

Следующий результат близок к известной теореме отделимости точки от полумодуля.[31] Его также можно рассматривать как следствие теоремы о представлении идемпотентно линейных функционалов.[32]

Предложение 1 *Пусть $V \subseteq \mathcal{V}$ — это b-полумодуль и пусть $u \notin V$. Тогда полупространство*

$$H = \{x \mid P_V(u)/x \geq u/x\} \cup \{\mathbf{0}\}$$

содержит V и не содержит u.

[31] G. Cohen, S. Gaubert, and J.P. Quadrat. *Duality and separation theorems in idempotent semimodules.//* Linear Algebra Appl., vol. 379, 2004, p. 395–422. *E-print arXiv:math.FA/0212294.*

[32] Г.Л. Литвинов, В.П. Маслов и Г.Б. Шпиз. *Идемпотентный функциональный анализ. Алгебраический подход.//* Матем. Заметки, том 69, є5, 2001, стр. 758–797. *E-print (English) arXiv:math.FA/0009128.*

Если $V_1, \dots, V_k$ — это b-полумодули, то можно определить *циклический проектор* $P_k \cdots P_1$, где через P_i обозначен проектор на полумодуль V_i.

Определяемое ниже понятие архимедовости является упрощенной версией того, что используется в идемпотентном функциональном анализе.[33]

Определение 4 Вектор $x \in \mathcal{V}$ назовем *архимедовым*, если $x/y > \mathbf{0}$ для всех $y \in \mathcal{V}$. Подполумодуль $V \subseteq \mathcal{V}$ назовем *архимедовым*, если он содержит хотя бы один архимедов вектор. Полупространство будет называться *архимедовым*, если оба определяющих вектора архимедовы.

Заметим, что в полумодулях $\mathcal{K}^n$, где $\mathcal{K}$ — это идемпотентное b-полное полуполе, архимедовы векторы — это в точности те векторы, все координаты которых положительны. Другой пример полумодуля, имеющего архимедовы векторы — это полумодуль полунепрерывных функций на некотором компакте. Если полумодуль $\mathcal{V}$ удовлетворяет $(A0, A1)$ и имеет архимедовы векторы, то справедлива следующая теорема, полученная автором:

Теорема 1 *Пусть у оператора $P_k \cdots P_1$ есть архимедов собственный вектор y с ненулевым собственным значением λ. Следующие условия эквивалентны:*

1. *существует такой архимедов вектор x, что $P_k \cdots P_1 x \leq \mu x$ для некоторого $\mu < \mathbf{1}$.*
2. *для любого $i = 1, \dots, k$ существуют такие архимедовы полупространства H_i, что $V_i \subseteq H_i$ и $\cap_i H_i = \{\mathbf{0}\}$;*
3. *$\cap_i V_i = \{\mathbf{0}\}$;*
4. *$\lambda < \mathbf{1}$.*

В общем случае удается также получить следующий результат, касающийся спектра циклических проекторов.

Определение 5 Пусть $V_1, \dots, V_k$ — это b-подполумодули $\mathcal{V}$. Величину

$$d_{\mathrm{H}}(V_1, \dots, V_k) = \sup_{x^1 \in V_1, \dots, x^k \in V_k} (x^1/x^2) \odot (x^2/x^3) \odot \cdots \odot (x^k/x^1)$$

назовем *гильбертовым значением полумодулей* $V_1, \dots, V_k$.

[33] Г.Б. Шпиз. *Теорема о существовании собственных векторов в идемпотентном анализе.*// Матем. Заметки, том 82, є3, 2007, стр. 459 – 468.

Теорема 2 *Пусть* $V_1, \ldots, V_k$ *— это b-подполумодули, и у оператора* $P_k \cdots P_1$ *есть архимедов собственный вектор* y *с ненулевым собственным значением* λ. *Тогда это собственное значение совпадает с гильбертовым значением полумодулей* $V_1, \ldots, V_k$, *причем на векторах* $\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^k$, *где* $\bar{x}^i = P_i \cdots P_1 y$, *достигается максимум в определении гильбертова значения.*

Рассмотрим теперь случай $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n_{\max,\times}$. В $\mathbb{R}^n_{\max,\times}$ естественно рассматривать полумодули, замкнутые в евклидовой топологии. Можно показать, что такие полумодули являются b-полумодулями и что проектор на такой полумодуль непрерывен (в обычном смысле). Как и в общем случае, проектор является также однородным и изотонным оператором. Если F — оператор, обладающий такими свойствами, то у него есть собственные значения, их конечное число, и спектральный радиус равен

$$\rho(F) = \max\{\lambda \in \mathbb{R}_+ \mid \exists x \in (\mathbb{R}^n_+) \setminus 0,\ Fx = \lambda x\} \ .$$

Справедливо также следующее нелинейное обобщение формулы Коллатца-Виландта для спектрального радиуса неотрицательной матрицы. [34]

Предложение 2 *Пусть* $F\colon \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+$ *— это изотонный, однородный и непрерывный оператор. Тогда*

$$\rho(F) = \inf_{x \in (\mathbb{R}_+ \setminus \{0\})^n} \max_{1 \le i \le n} [F(x)]_i x_i^{-1}.$$

Применимость этих результатов к циклическим проекторам позволяет усилить результаты для общего случая. Сформулируем общую теорему отделимости для подполумодулей в $\mathbb{R}^n_{\max,\times}$.

Теорема 3 *Пусть* $V_1, \ldots, V_k$ *— это замкнутые архимедовы полумодули в* $\mathbb{R}^n_{\max,\times}$. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *существуют положительный вектор* x *и число* $\lambda < 1$, *такие, что* $P_k \cdots P_1 x \le \lambda x$;

2. *существуют архимедовы полупространства* H_i, *содержащие* V_i *и такие, что* $\cap_{i=1}^k H_i = \{\mathbf{0}\}$;

[34] R.D. Nussbaum. *Convexity and log convexity for the spectral radius.*// Linear Algebra Appl., vol. 73, 1986, p. 59–122.

3. $\cap_{i=1}^{k} V_i = \{\mathbf{0}\}$*;*

4. $\rho(P_k \cdots P_1) < 1$.

Условия 2. и 3. эквивалентны и в том случае, когда архимедовость $V_1, \ldots, V_k$ *не предполагается.*

Эквивалентность условий 2. и 3. в этой теореме — это утверждение об отделимости нескольких полумодулей. Далее, в случае $\mathbb{R}^n_{\max,\times}$ удается полностью охарактеризовать собственные значения циклических проекторов. Введем обозначение

$$V^M = \{x \in V \mid \mathrm{supp}(x) \subset M\},$$

где M — произвольное подмножество $\{1, \ldots, n\}$.

Теорема 4 *Пусть* $V_1, \ldots, V_k$ *— это замкнутые полумодули в* $\mathbb{R}^n_{\max,\times}$. *Тогда гильбертово значение* $V_1, \ldots, V_k$ *— это спектральный радиус* $P_k \cdots P_1$. *Спектр* $P_k \cdots P_1$ *— это множество гильбертовых значений* $d_{\mathrm{H}}(V_1^M, \ldots, V_k^M)$*, где* M *пробегает все подмножества* $\{1, \ldots, n\}$.

Еще одним следствием теоремы об отделимости нескольких полумодулей является идемпотентный аналог теоремы Хелли.

Теорема 5 (Теорема Хелли) *Пусть* C_i, $i = 1, \ldots, m$ *— это совокупность* $m \geq n + 1$ *идемпотентно выпуклых множеств в* $\mathbb{R}^n_{\max,\times}$. *Если любые* $n + 1$ *из них пересекаются, то и вся совокупность в целом имеет непустое пересечение.*

Вторая глава

Во второй главе изложены результаты, касающиеся образующих и крайних точек подполумодулей $\mathbb{R}^n_{\max,\times}$, полученные автором в статье [4].

Будем говорить, что идемпотентный полумодуль V *порождается* множеством S, если V является множеством конечных линейных (в смысле операций $\oplus$ и $\odot$) комбинаций элементов из S. Следующее определение также хорошо известно.

Определение 6 Элемент x идемпотентного полумодуля V называется *крайним*, если из $x = u \oplus v$ следует, что $x = u$ или $x = v$.

Следующее определение дано автором диссертации.

Определение 7 *Рассмотрим отношение предпорядка*

$$y \leq_j x \Leftrightarrow x_j \neq 0,\ y_j \neq 0,\ y/y_j \leq x/x_j.$$

Элемент множества $S \subseteq \mathbb{R}^n_{\max,\times}$ *назовем* j-минимальным, *если он минимален по отношению* $\leq_j$.

Следующие предложения, полученные автором, раскрывают роль отношения $\leq_j$ и его связь с крайними элементами идемпотентных полумодулей.

Теорема 6 *Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) элемент y *является линейной комбинацией элементов* $x^1, \ldots, x^m \in \mathbb{R}^n_{\max,\times}$*;*

(2) для любого номера $j \in \{1, \ldots, n\}$*, такого, что* $y_j \neq 0$*, найдется вектор* x^l *такой, что* $x^l \leq_j y$.

Теорема 7 *Пусть идемпотентный полумодуль* V *порожден множеством* $S \subseteq \mathbb{R}^n_{\max,\times}$. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) x *— это крайний элемент* V*;*

(2) x *является* j*-минимальным элементом* S *для некоторого индекса* $j \in \{1, \ldots, n\}$*;*

Таким образом, крайние элементы полумодуля V — это j-минимальные элементы множества его образующих. Задача на нахождение частичных максимумов (или минимумов) в n-мерном действительном пространстве была исследована Ф. Препаратой и др.[35] Из этих результатов вытекает следующее.

Теорема 8 *Если полумодуль* $V \subseteq \mathbb{R}^n_{\max,\times}$ *порожден* k *элементами, то вычислительная сложность задачи о нахождении крайних элементов* V *не превосходит* $O(k \log_2 k)$ *при* $n = 3$ *и* $O(k(\log_2 k)^{(n-3)})$ *при* $n \geq 3$.

Используя теорему 7, можно вывести следующий аналог теоремы Минковского.

[35] Ф. Препарата и М. Шеймос. *Вычислительная геометрия: Введение.* М.:Мир, 1989.

Теорема 9 *Если полумодуль V замкнут, то он порождается своими крайними элементами.*

Множество крайних элементов замкнутого полумодуля, вообще говоря, не замкнуто. Однако справедлив следующий результат.

Предложение 3 *Если множество $S \subset \mathbb{R}^n_{\max,\times}$ компактно и $0 \notin S$, то полумодуль V, порожденный множеством S, замкнут.*

Отметим, что с помощью теоремы 7 можно получить также следующее предложение, следствием которого является известная теорема о единственности базиса конечнопорожденного полумодуля.

Предложение 4 *Пусть S — это множество нормированных образующих полумодуля V в $\mathbb{R}^n_+$ и пусть E — это множество нормированных крайних элементов V. Тогда*

1. *$E \subseteq S$.*
2. *Пусть $F = S \backslash E$. Тогда для любого $u \in F$ множество $S \backslash \{u\}$ порождает K.*

Третья глава

В третьей главе изложены результаты по клеточному разложению и перенормировкам операции замыкания, полученные автором в статьях [1,2,5].

Строение полумодулей, порожденных двумя векторами, описывается следующей теоремой, полученной автором в статье [1].

Теорема 10 *Пусть $y, z \in \mathbb{R}^n_{\max,\times}$ и $\mathrm{supp}(y) \cup \mathrm{supp}(z) = \{1, \ldots, n\}$. Обозначим через σ такую перестановку $\{1, \ldots, n\}$, что*

$$y_{\sigma(1)}(z_{\sigma(1)})^{-1} \leq y_{\sigma(2)}(z_{\sigma(2)})^{-1} \leq \ldots \leq y_{\sigma(n)}(z_{\sigma(n)})^{-1}.$$

Тогда

$$\mathrm{span}(y, z) = \bigcup_{i=1}^{n-1} \mathrm{span}(v^i, v^{i+1}),$$

где $v^i = z_{\sigma(i)} y \oplus y_{\sigma(i)} z$, причем для любого $i = 1, \ldots, n-1$ полумодуль $\mathrm{span}(v^i, v^{i+1})$ — это выпуклый (в обычном смысле) конус, линейная размерность которого не превосходит 2.

Таким образом, полумодуль с двумя образующими в $\mathbb{R}^n_{\max,\times}$ в общем случае имеет $n-1$ выпуклых "звеньев". Это частный случай клеточного разложения.

Следующая теорема является одним из ключевых алгебраических результатов третьей главы, полученных автором в статьях [2,5].

Теорема 11 *Пусть A и B — это две квадратные матрицы, такие, что $\lambda(A) \leq 1$ и $\lambda(B) \leq 1$. Тогда $A^* = B^*$ в том и только в том случае, когда $span(A^*) = span(B^*)$, совпадают.*

Через span здесь обозначен полумодуль, порожденный столбцами соответствующей матрицы. Квадратная матрица A называется *определенной*, если $\lambda(A) = 1$ и если все ее диагональные элементы равны 1. Если A — это определенная матрица, то $\mathrm{eig}(A) = \mathrm{span}(A^*)$

Следствие 1 *Пусть A и B — определенные матрицы. Тогда $A^* = B^*$ в том и только в том случае, когда $eig(A) = eig(B)$.*

Можно проверить, что собственные полумодули определенных матриц в $\mathbb{R}^n_{\max,\times}$ являются в то же время и выпуклыми конусами в $\mathbb{R}^n_+$. Оказывается, имеет место следующий результат.

Предложение 5 *Линейная размерность собственного полумодуля определенной матрицы (как выпуклого конуса) равна мощности минимального набора идемпотентных образующих этого полумодуля.*

Введем ряд понятий, связанных с клеточным разложением. Пусть A — это матрица размера $n \times m$ над $\mathbb{R}_{\max,\times}$ и пусть y — это вектор с n компонентами. Обозначим совокупность множеств $S = \{S_j \colon j \in \mathrm{supp}(y)\}$, где $S_j = \{i \colon y \geq_j A_{\cdot i}\}$, через $\mathrm{type}(y \mid A)$ и назовем ее *комбинаторным типом* точки y относительно A. Можно определить комбинаторные типы и более общо, как произвольные совокупности не более чем n возможно пустых подмножеств $\{1, \ldots, m\}$. Обозначим множество тех индексов i, чьи S_i присутствуют в типе, через $\mathrm{supp}(S)$. Если $S = \mathrm{type}(y \mid A)$ для некоторого y, то $\mathrm{supp}(S) = \mathrm{supp}(y)$. Типы частично упорядочены по следующему правилу: $S \subseteq S'$, если $\mathrm{supp}(S') \subseteq \mathrm{supp}(S)$ и $S_i \subseteq S'_i$ для всех $i \in \mathrm{supp}(S)$. Множество

$$X^S = \{z \colon S \subseteq \mathrm{type}(z \mid A)\}$$

будем называть *клеткой*, соответствующей типу S. Если $A_{ik} \neq 0$ для всех $i \in S_k$, то тип S называется *допустимым* и мы можем ввести матрицу A^S по правилу

$$A^S_{\cdot i} = \begin{cases} \bigoplus_{k\in S_i} A_{\cdot k}/A_{ik}, & \text{если } i \in\text{supp}(S) \text{ и } S_i \neq \emptyset; \\ e_i, & \text{если } i \in\text{supp}(S) \text{ и } S_i = \emptyset; \\ \mathbf{0}, & \text{если } i \notin\text{supp}(S). \end{cases}$$

Справедливо следующее предложение, с помощью которого клетка представляется как собственный полумодуль матрицы A^S, см. [5].

Предложение 6 *Если клетка X^S непуста, то $X^S = eig(A^S)$.*

Отметим, что из этого предложения также можно вывести теорему 10. Используя следствие 1, сразу получаем следующий результат.

Теорема 12 *Пусть S и T — это допустимые типы, такие, что их непустые клетки X^S и X^T совпадают между собой. Тогда $(A^S)^* = (A^T)^*$.*

Эта теорема позволяет определить *клеточное замыкание* матрицы A как $(A^S)^*$. Эта операция корректно определена для любой клетки, будучи независимой от того типа, который определяет клетку.

Рассмотрим теперь случай, когда A — это квадратная матрица размера $n \times n$, у которой есть перестановка σ с ненулевым весом $\odot_{i=1}^n A_{i\sigma(i)}$. Перестановка с максимальным весом называется *максимальной*. Определим D^σ как матрицу, такую, что $D^\sigma_{ij} = A_{ij}$, если $j = \sigma(i)$ и $D_{ij} = 0$ для остальных элементов. Если перестановка σ максимальна, то матрица $A(D^\sigma)^{-1}$ является определенной и называется *определенной формой* A. Различные максимальные перестановки приводят к различным определенным формам, однако можно показать, что их собственные пространства совпадают, и это приводит к следующему результату [2,5].

Теорема 13 *Замыкания всех определенных форм любой квадратной матрицы совпадают.*

Таким образом, для любой квадратной матрицы A, имеющей ненулевые перестановки, можно определить ее *определенное замыкание* как $(A(D^\sigma)^{-1})^*$, где σ — это любая максимальная перестановка. Определенное замыкание является частным случаем клеточного, поскольку $\text{eig}(A(D^\sigma)^{-1})$ совпадает с клеткой X^S, соответствующей типу $S = (\{\sigma(1)\}, \ldots, \{\sigma(n)\})$ где σ — это любая максимальная перестановка.

В заключение автор выражает глубокую благодарность основателю научного направления, в рамках которого выполнена данная работа, своему научному руководителю академику РАН В.П. Маслову за постановку задачи и постоянное внимание к этой работе, а также профессорам и преподавателям кафедры Высшей Алгебры Механико-математического факультета МГУ за благожелательное отношение к этой работе и ценные обсуждения полученных в ней результатов.

Работы автора по теме диссертации

1. С.Н. Сергеев. *Алгоритмическая сложность одной задачи идемпотентно выпуклой геометрии.*// Мат. Заметки, том 74, є6, 2003, стр. 896–901.

2. С.Н. Сергеев. *Идемпотентные замыкания определенных матриц.*// Доклады РАН, том 408, є4, 2006, стр. 453–454.

3. С.Н. Сергеев и С. Гобер. *Циклические проекторы и теоремы отделимости в идемпотентных полумодулях.*// Фундаментальная и прикладная математика, том 13, вып. 4, 2007, стр. 31-52.

В этой статье С.Н. Сергееву полностью принадлежат формулировки и доказательства теоремы 11 (об отделимости нескольких полумодулей в общем случае), теоремы 23 (идемпотентный аналог теоремы Хелли) и теоремы 25 (характеристика спектра циклических проекторов). Остальные результаты статьи, включая теоремы 18, 20 и 22 (об отделимости в конечномерном случае), являются плодом совместной работы С.Н. Сергеева и С. Гобе́ра (Dr. Stéphane Gaubert, Directeur de recherche, INRIA), и эти результаты не могут быть разделены.

4. S. Sergeev, P. Butkovič, H. Schneider. *Generators, extremals and bases of max cones.*// Linear Algebra Appl., vol. 421, 2007, p. 394 – 406.

Формулировка теоремы 16 и ее первоначальное (не содержащееся в статье) доказательство, а также формулировка и доказательство теоремы 18, предложения 31 и алгоритма 32 принадлежат П. Бутко́вичу (Dr. Peter Butkovic, Senior lecturer and reader, University of Birmingham) и Г. Шна́йдеру (Dr. Hans Schneider, J.J. Sylvester Professor Emeritus, University of Wisconsin, Madison), а формулировки и доказательства других результатов статьи, включая предложение 11, теорему 14 (о том, что крайние элементы — это минимумы), предложение 24 (тропическая теорема Минковского), предложение 25, а также оценку вычислительной сложности задачи о нахождении крайних элементов (в конце статьи), принадлежат С.Н. Сергееву.

5. S. Sergeev. *Max-plus definite matrix closures and their eigenspaces.*// Linear Algebra Appl., vol. 421, 2007, p. 182 – 201.