МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 517.9

Асташова Ирина Викторовна

КАЧЕСТВЕННЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

01.01.02 — дифференциальные уравнения

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание учёной степени доктора физико-математических наук

МОСКВА
2008

Работа выполнена на кафедре высшей математики Московского государственного университета экономики, статистики и информатики (МЭСИ)

Научный консультант —
доктор физико-математических наук,
профессор Кондратьев Владимир Александрович.

Официальные оппоненты — академик НАН Грузии,
доктор физико-математических наук,
профессор Кигурадзе Иван Тариелович,

доктор физико-математических наук,
профессор Розов Николай Христович,

доктор физико-математических наук,
профессор Хромов Август Петрович.

Ведущая организация — Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН.

Защита состоится 27 июня 2008 г. в 16 час. 40 мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.85 в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 23 мая 2008 г.

Учёный секретарь диссертационного совета
Д.501.001.85 в МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор И. Н. Сергеев

Общая характеристика работы

Диссертация посвящена изучению качественных свойств решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка.

Изучаются следующие дифференциальные уравнения:

$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} q_i(x)\, y^{(i)} + p(x)\, |y|^{k-1} y = 0, \tag{1}$$

$$y^{(n)}(x) = p\left(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)\right) |y(x)|^{k-1} y(x), \tag{2}$$

$$y^{(n)} = p_0 |y(x)|^{k-1} y(x), \tag{3}$$

$$y^{(n)} + p(x)\, |y|^{k-1} y = 0, \tag{4}$$

$$r_n(x) \frac{d}{dx}\left(\dots \frac{d}{dx}\left(r_1(x) \frac{d}{dx}\left(r_0\,(x)\ y\right)\right) \dots\right) + |y|^k = 0\,, \tag{5}$$

$$r_n(x) \frac{d}{dx}\left(\dots \frac{d}{dx}\left(r_1(x) \frac{d}{dx}\left(r_0\,(x)\ y\right)\right) \dots\right) - |y|^k = 0 \tag{6}$$

и неравенства:

$$r_n(x) \frac{d}{dx}\left(\dots \frac{d}{dx}\left(r_1(x) \frac{d}{dx}\left(r_0\,(x)\ y\right)\right) \dots\right) \geqslant\ |y|^k\,, \tag{7}$$

$$y^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(x)\, y^{(j)} \geqslant p_*\, |y|^k\,, \tag{8}$$

$$y^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(x)\, y^{(j)} \leqslant -p_*\, |y|^k\,, \tag{9}$$

$$y^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(x)\, y^{(j)} \geqslant -p_*\, |y|^k\,, \tag{10}$$

$$y^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(x)\, y^{(j)} \leqslant p_*\, |y|^k\,. \tag{11}$$

Актуальность темы. Уравнения (1) – (6) являются обобщениями хорошо известного уравнения Эмдена – Фаулера

$$y'' + x^{\sigma}\ |y|^{k-1} y = 0, \tag{12}$$

которое впервые появилось в работе Р. Эмдена[1] в начале XX века в связи с изучением политропной (степенной) модели газа, которая, в частности, описывает равновесные конфигурации звезд, подчиняющиеся политропному уравнению состояния.[2] При этом уравнение (12) получалось заменой переменных из уравнения

$$\frac{1}{\xi^2}\,\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\,\frac{d\theta}{d\xi}\right) + |\theta|^{k-1}\theta = 0, \tag{13}$$

в котором переменная ξ обозначает величину, пропорциональную расстоянию от центра звезды, а функция $(\theta(\xi))^k$ — величину, пропорциональную плотности звезды.

Подобные уравнения встречаются также в теории физики плазмы, газовой динамике и при описании поперечников Колмогорова.

Асимптотические свойства решений уравнения (12) при различных значениях σ и k подробно изучены в монографиях Р. Беллмана[3], Дж. Сансоне[4] и Ф. Хартмана[5]. В эти монографиях описываются также асимптотические свойства решений уравнения (4) при $n = 2$.

Для уравнений вида (4) при $n > 2$ и (2) вопросы продолжаемости и непродолжаемости решений, вопросы, связанные с их колеблемостью и неколеблемостью, оценки продолжаемых и непродолжаемых решений изучались в работах И. Т. Кигурадзе и Т. А. Чантурия[6], В. А. Кондратьева и В. С. Самовола[7], Н. А. Изобова[8], В. А. Рабцевича[9], В. А. Коз-

---

[1] *R. Emden.* Gaskugeln. Leipzig, 1907.

[2] *Я.Б.Зельдович, С.И.Блинников, Н.И.Шакура.* Физические основы строения и эволюции звезд. Москва, МГУ, 1981.

[3] *Беллман Р.* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М.: Иностранная литература. 1954.

[4] *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения, т.2. М.: Иностранная литература. 1954.

[5] *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир. 1970.

[6] *Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1990, 432 с.

[7] *Кондратьев В. А., Самовол В. С.* О некоторых асимптотических свойствах решений уравнений типа Эмдена – Фаулера. — Дифференц. уравнения, 1981, т.17, № 4, с.749–750.

[8] *Изобов Н. А.* Об уравнениях Эмдена - Фаулера с неограниченными бесконечно продолжимыми решениями. — Мат. заметки, 1984, т. 35, № 2, с. 189–199.

[9] *Изобов Н. А., Рабцевич В. А.* О неулучшаемости условия И. Т. Кигурадзе – Г. Г. Квиникадзе существования неограниченных правильных решений уравнения Эмдена-Фаулера. — Дифф. уравнения, 1987, т. 23, № 11, с. 1872–1881.

лова[10], А. А. Конькова[11,12], А. Д. Мышкиса[13] и др. Результаты, полученные до 1990 года, и подробная библиография содержатся в монографии И. Т. Кигурадзе и Т. А. Чантурия[14]. В этой работе описано также асимптотическое поведение всех возможных решений этого уравнения при $n = 2$. В частности, И. Т. Кигурадзе доказано, что для уравнения (2) существует решение с любой наперед заданной вертикальной асимптотой, а при $n = 2$ доказано, что все решения с вертикальной асимптотой имеют степенную асимптотику. В той же работе была выдвинута гипотеза (задача 16.4): доказать, что при $n > 2$ все решения с вертикальной асимптотой имеют степенную асимптотику.

Полная асимптотическая классификация решений уравнения (4) при $n = 2$ и $p(x) < 0$ была получена В. А. Кондратьевым и В. А. Никишкиным[15].

Следует отметить также монографию А. Д. Брюно[16], в которой разработаны алгоритмы локального и асимптотического анализа решений дифференциальных уравнений.

В качественной теории дифференциальных уравнений наряду с задачами об описании асимптотического поведения решений данного уравнения представляют интерес задачи об оценках решений. Так, в работе В. А. Кондратьева[17] получены интегральные оценки решений полулинейных эллиптических уравнений. В работе Г. Г. Квиникадзе и И. Т. Кигурадзе[18] приводятся оценки решений уравнения (4), обладающих некоторыми общими свойствами, например, решений, имеющих

---

[10] *Kozlov V. A.* On Kneser solutions of higher order nonlinear ordinary differential equations. — Ark. Mat., 1999, v. 37 , № 2, p. 305–322.

[11] *Коньков А. А.* О решениях неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. — Известия РАН, сер. Математика, 2001, т. 65, № 2, с. 81–126.

[12] *Коньков А. А.* Поведение решений квазилинейных эллиптических неравенств. — Современная математика. Фундаментальные направления, 2004, т. 7, с. 3–158.

[13] *Мышкис А. Д.* Пример непродолжимого на всю ось решения дифференциального уравнения второго порядка колебателъного типа.— Диф. уравнения. 1969, т. 5, № 12, с. 2267–2268.

[14] *И. Т. Кигурадзе, Т. А. Чантурия,* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1990, 432 с.

[15] *Кондратьев В. А., Никишкин В. А.* О положительных решениях уравнения $y'' = p(x)y^k$. В сб. «Некоторые вопросы качественной теории дифференциальных уравнений и теории управления движением», Саранск, 1980, с. 134–141.

[16] *Брюно А. Д.* Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М.: Наука. Физматлит, 1998, 288 с.

[17] *Кондратьев В. А.* О качественных свойствах решений полулинейных эллиптических уравнений. — Труды семинара им. И. Г. Петровского, 1991, т. 16, с. 186–190.

[18] *Квиникадзе Г. Г., Кигурадзе И. Т.* О быстро растущих решениях нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений.— Сообщ. АН ГССР, 1982, т. 106, № 3, с. 465–468.

вертикальную асимптоту.

Получение оценок решений с общей областью определения интересно не только с точки зрения получения качественных характеристик решения, но и в связи с тем, что они дают возможность доказать отсутствие глобально определенных нетривиальных решений. В монографии Э. Митидиери, С. И. Похожаева[19] получены, в частности, условия отсутствия глобальных решений дифференциального неравенства $y^{(n)} \geqslant q_0|y|^k$, $k > 1$, $q_0 = \mathrm{const}$.

Дж. Хей[20] доказал аналогичный результат для неравенства $y^{(n)} \geqslant q_1(t)|y|^{k_1} + q_2(t)|y|^{k_2} + \cdots + q_m(t)|y|^{k_m}$. А. А. Коньков[21] получил априорные оценки решений уравнения (4) с нелинейностью более общего вида.

Проблема существования неколеблющихся решений и колеблемости всех решений дифференциального уравнения – одна из важных проблем качественной теории дифференциальных уравнений. Она была подробно изучена для уравнения (1) в случае $q_j(x) = 0$, $j = 0, \ldots, n-1$. Для $n = 2$ F. Atkinson[22] доказал следующий критерий колеблемости всех решений.

Теорема (F. Atkinson). *Пусть $f(x)$ непрерывная и положительная при $x \geqslant 0$ функция. Пусть k — целое число, большее 1. Тогда все решения уравнения*

$$y'' + f(x)y^{2k-1} = 0$$

являются колеблющимися тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_0^\infty x f(x)\, dx = \infty.$$

Заметим, что в линейном случае последнее условие является необходимым, но не достаточным. Свойства колеблемости решений линейных

[19] *Митидиери Э., Похожаев С. И.* Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных. — Труды МИАН им. В. А. Стеклова, 2001, т. 234, 383 с.

[20] *Хей Дж.* О необходимых условиях существования глобальных решений нелинейных обыкновенных дифференциальных неравенств высокого порядка. — Дифференц. уравнения, 2002, т. 38, № 3, с. 362–368.

[21] *Коньков А. А.* О решениях неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. — Известия РАН, сер. Математика, 2001, т. 65, № 2, с. 81–126.

[22] *Atkinson F. V.* On second order nonlinear oscillations. — Pacif. J. Math., 1955, v. 5, № 1, p. 643–647.

уравнений исследовались в работах Т. А. Чантурия[23,24,25], В. А. Кондратьева[26,27], D. L. Lovelady[28,29], и И. Т. Кигурадзе и Т. А. Чантурия[30], где содержится подробная библиография вопроса.

Для нелинейных уравнений второго порядка более общего вида

$$y'' + p(x)f(y) = 0 \qquad \text{и} \qquad y'' + g(x,y) = 0,$$

теоремы, подобные теореме F. Atkinson, были получены в работах S. A. Belohorec[31], И. Т. Кигурадзе[32], J. W. Masci and J. S. W. Wong[33,34,35].

Для нелинейных уравнений 3-го и 4-го порядка вопросы колеблемости исследовали В. А. Кондратьев и В. С. Самовол[36], T. Kusano и M. Naito[37],

[23] *Чантурия Т. А.* Интегральные признаки колеблемости решений линейных дифференциальных уравнений высших порядков. — Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № 3, с. 470–482 и № 4, с. 635–644.

[24] *Чантурия Т. А.* О колеблемости решений линейных дифференциальных уравнений высших порядков. — Докл. семинара Ин-та прикл. мат. им. И. Н. Векуа Тбилис. гос. ун-та, 1982, т. 16, с. 3–72.

[25] *Чантурия Т. А.* О колеблемости решений линейного обыкновенного дифференциального уравнения общего вида. — Дифференц. уравнения, 1986, т. 22, № 11, с. 1905–1915.

[26] *Кондратьев В. А.* О колеблемости решений лйнейных уравнений третьего и четвертого порядка. — Труды ММО, 1959, т. 8, с. 259–281.

[27] *Кондратьев В. А.* О колеблемости решений уравнения $y^{(n)} - p(x)y = 0$. — Труды ММО, 1961, т. 10, с. 419–436.

[28] *Lovelady D. L.* On the oscillatory behavior of bounded solutions of higher order differential equations. — J. Diff. Equations, 1975, v. 19, № 1, p. 167-175.

[29] *Lovelady D. L.* An asymptotic analysis of an odd order linear differential equation. — Pacif. J. Math., 1975, v. 57, № 2, p. 475-480.

[30] *Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1990, 432 с., гл. I.

[31] *Belohorec S.* A criterion for oscillation and nonoscillation. — Acta F. R. N. Univ. Comen. Math., 1969, v. 20, p. 75-79.

[32] *Кигурадзе И. Т.* Об условиях колеблемости решений уравнения $u'' + a(t)|u|^n \operatorname{sgn} u = 0$. — Čas. pěst. mat., 1962, v. 87 , № 4, p. 492-495.

[33] *Masci J. W., Wong J. S. W.* Oscillation of solutions to second-order nonlinear differential equations. — Pacif. J. Math., 1968, v. 24 , № 1, p. 111-117.

[34] *Wong J. S. W.* A note on second order nonlinear oscillation. — SIAM Review, 1968, v. 10, p. 88-91.

[35] *Wong J. S. W.* On second-order nonlinear oscillation. — Funkcialaj Ekvacioj, 1968, v. 11, p. 207-234.

[36] *Кондратьев В. А., Самовол В. С.* О некоторых асимптотических свойствах решений уравнений типа Эмдена – Фаулера. — Дифференц. уравнения, 1981, т. 17, № 4, с. 749–750.

[37] *Kusano T., Naito M.* Nonlinear oscillation of fourth-order differential equations. — Canad. J. Math., 1976, v. 28, № 4, p. 840-852.

D. L. Lovelady[38], V. R. Taylor, Jr.[39], P. Waltman[40].

Результат F. Atkinson был обобщен на уравнения высокого порядка

$$y^{(n)} + p(x)|y(x)|^k \operatorname{sgn} y = 0$$

И. Т. Кигурадзе[41] и Т. А. Чантурия[42].

Уравнения вида (1) с некоторыми из коэффициентов $q_j(x) \neq 0$ были изучены также в других работах[43,44,45,46,47,48,49], при этом некоторые из этих работ содержали нелинейности более общего вида.

Цель работы и основные задачи. Основной целью исследования является изучение качественных свойств решений дифференциальных уравнений и неравенств (1) – (11), в частности, получение для квазилинейного уравнения равномерных оценок положительных решений с общей областью определения, зависящих от оценок коэффициентов уравнения и не зависящих от самих коэффициентов; доказательство критерия колеблемости всех решений этого уравнения; получение результатов о равномерных оценках модулей решений для квазилинейных дифференциальных неравенств; изучение асимптотического поведения решений с вертикальной асимптотой для нелинейных уравнений

[38] *Lovelady D. L.* An oscillation criterion for a fourth-order integrally superlinear differential equation. — Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. 1975, (8) 58, № 4, p. 531-536.

[39] *Taylor W. E., Jr.* Oscillation criteria for certain nonlinear fourth order equations. — Internat. J. Math., 1983, v. 6, № 3, p. 551-557.

[40] *Waltman P.*Oscillation criteria for third order nonlinear differential equations. — Pacif. J. Math, 1966, v. 18, p. 385-389.

[41] *Кигурадзе И. Т.* О колеблемости решений уравнения $d^m u/dt^m + a(t)|u|^n \mathrm{sgn} u = 0$. — Мат. сб., 1964, т. 65 , № 2, с. 172-187.

[42] *Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1990, 432 с., гл. IV.

[43] *Kartsatos A. G.* N th order oscillations with middle terms of order $N-2$. — Pacific J. Math., 1976, v. 67, № 2, p. 477-488.

[44] *Кигурадзе И. Т.* Критерий колеблемости для одного класса обыкновенных дифференциальных уравнений. — Дифф.уравнения, 1992, т. 28, № 2, с. 207-219.

[45] *Kusano T., Naito M.* Nonlinear oscillation of fourth-order differential equations. — Canad. J. Math., 1976, v. 28, № 4, p.840-852.

[46] *Lovelady D. L.* On the oscillatory behavior of bounded solutions of higher order differential equations. — J. Diff. Equations, 1975, v. 19, № 1, p. 167-175.

[47] *Lovelady D. L.* An oscillation criterion for a fourth-order integrally superlinear differential equation. — Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur, 1975, (8) 58, № 4, p. 531-536.

[48] *Taylor W. E., Jr.* Oscillation criteria for certain nonlinear fourth order equations. — Internat. J. Math., 1983, v. 6, № 3, p. 551-557.

[49] *Waltman P.*Oscillation criteria for third order nonlinear differential equations. — Pacif. J. Math, 1966, v. 18, p.385-389.

произвольного порядка; для уравнений третьего и четвертого порядка без младших производных описание асимптотического поведения всех возможных решений в случае регулярных и сингулярных нелинейностей; исследование асимптотического поведения решений и получение равномерных оценок модуля и аргумента решений одномерного уравнения Шредингера.

Методы исследования. В работе используются методы качественной теории дифференциальных уравнений, функционального анализа и топологии.

Для получения равномерных оценок решений уравнения (1) в главе 1, неравенства (8) в главе 2 и доказательства критерия колеблемости всех решений уравнения (1) в главе 3 используется представление оператора

$$L = \frac{d^n}{dx^n} + \sum_{j=0}^{n-1} q_j(x)\,\frac{d^j}{dx^j}$$

в виде оператора квазипроизводной

$$y^{[n]}(x) = r_n(x)\frac{d}{dx}\left(\ldots\frac{d}{dx}\left(r_1(x)\frac{d}{dx}\left(r_0(x)\,y\right)\right)\ldots\right),$$

где $r_j(x)$ — достаточно гладкие положительные функции.

В работах G. Polya[50], Ch. I. de la Vallée-Poussin[51], А. Левина[52] приводятся некоторые достаточные условия такого представления линейных дифференциальных операторов, но для получения результатов данной работы требуется, чтобы данное представление имело коэффициенты, обладающие специальными свойствами. В главе 2 данной работы потребовалось доказать существование такого оператора квазипроизводной, коэффициенты которого на отрезке имеют соответствующие оценки. В главе 3 данной работы коэффициенты квазилинейного оператора строятся таким образом, что их пределы при $x \to +\infty$ равны 1, что используется в доказательстве теоремы 3.

Для доказательства основных результатов глав 4–7 в работе применяется замена переменных, позволяющая свести исходное уравнение n-го

[50] *G. Pólya* On the mean-value theorem corresponding to a given linear homogeneous differential equation. — Trans. Amer. Math. Soc., 1924, v. 24, p. 312–324.

[51] *Ch.I. de la Vallée-Poussin* Sur l'équation différentielle linéaire du second ordre. Détermination d'une intégrale par deux valeurs assignées. Extension aux équations d'ordre n. — Journ. Math. Pur. et Appl., 1929, v. 9, № 8, p. 125–144.

[52] *Левин А.Ю.* Неосцилляция решений уравнения $x^{(n)}+p_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+p_n(t)x = 0$. УМН, 1969, т. 24, вып. 2 (146), с. 43–96.

порядка к динамической системе на $(n-1)$-мерной компактной сфере. Изучение асимптотического поведения траекторий полученной системы на сфере дает возможность исследовать асимптотическое поведение всех решений исходного уравнения.

Научная новизна. Все результаты работы являются новыми. Основные из них — следующие:

- для уравнений (1), (5) и (6) получены равномерные оценки положительных решений с общей областью определения, зависящие от оценок коэффициентов уравнения и не зависящие от самих коэффициентов;
- доказан критерий колеблемости всех решений уравнений (1) и (5) (обобщение теоремы Аткинсона);
- для квазилинейных неравенств (8) – (11) получены равномерные оценки модулей решений с общей областью определения, зависящие от оценок коэффициентов неравенств и не зависящие от самих коэффициентов;
- для уравнения (2) произвольного порядка доказано существование решения с вертикальной асимптотой, имеющего степенную асимптотику, а для уравнений четного порядка — кнезеровских решений, имеющих степенную асимптотику; при этом для уравнений третьего и четвертого порядков доказано, что все решения с вертикальной асимптотой имеют степенную асимптотику (гипотеза И. Т. Кигурадзе), а для уравнений четвертого порядка — что все кнезеровские решения имеют степенную асимптотику;
- для уравнения (4) третьего и уравнения (3) третьего и четвертого порядков получена асимптотическая классификация всех решений в случаях регулярных и сингулярных нелинейностей;
- исследовано асимптотическое поведение решений и получены равномерные оценки модуля и аргумента решений нелинейного одномерного уравнения Шредингера.

Теоретическая и практическая ценность. Работа относится к области качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений и носит теоретический характер. Ее результаты могут быть полезны в тех областях, где возникают вопросы о качественном и асимптотическом анализе решений нелинейных и квазилинейных дифференциальных уравнений. Разделы диссертации могут составить содержание специальных курсов для студентов и аспирантов.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались автором на следующих научных конференциях:

- Расширенные заседания семинара ИПМ имени И. Н. Векуа. Тбилиси. 1985, 1988, 1990.
- Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения». Воронеж, 1993, 1994, 1995, 2000, 2002, 2004, 2006, 2007.
- Воронежская зимняя математическая школа «Современные методы теории функций и смежные проблемы». Воронеж, 2001, 2003.
- Конференция «Современные методы нелинейного анализа». Воронеж, 1995.
- Международный семинар «Дифференциальные уравнения и их приложения». Самара, 1995, 1996, 2005, 2007.
- The First International Scientific and Practical Conference "Differential Equations and Applications". Saint-Petersburg, 1996.
- International Colloquium on Differential Equations. Plovdiv, Bulgaria, 1996, 1997.
- International Symposium "Complex Analysis and Related Topics". Cuernavaca, Mexico, 1996.
- International Symposium Dedicated to the 90th Birthday Anniversary of Academician I.Vekua. Tbilisi, 1997.
- 4th Symposium on Mathematical Analysis and Its Applications. Arangelovac, Yugoslavia, 1997.
- Международный семинар «Нелинейное моделирование и управление». Самара, 1997.
- Mark Krein International Conference "Operator Theory And Applications". Odessa, Ukraine, 1997.
- Conference on Differential Equations and Their Applications. (EQUADIFF -9) Brno, Czech Republic, 1997.

- Международный симпозиум «Ряды Фурье и их приложения». Ростов-на-Дону, 1999.
- Diffiety School. School in Geometry of Partial Differential Equations, S. Stefano Del Sole, Avellino, Italy, 2002.
- International Petrovskii Conference "Differential Equations and Related Topics". Moscow, 1996, 2001, 2004, 2007.
- 3rd ISAAC Congress. Berlin, Germany, 2001.
- Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Суздаль, 2002, 2004, 2006.
- International Conference "Function Spaces, Approximation Theory, Nonlinear Analysis" dedicated to the centennial of S. M. Nikolskii. Moscow, 2005.
- Международная конференция «Чебышевские чтения» «Математические идеи П.Л.Чебышева и их приложение к современным проблемам естествознания.» Обнинск, 2006.
- Международная конференция «Тихонов и современная математика», Москва, МГУ. 2006.
- Международная конференция «Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения», посвященная 100-летию со дня рождения академика И. Н. Векуа. Новосибирск. 2007.
- Conference on Differential Equations and their applications (EQUADIFF2007). Vienna, Austria, 2007.
- 14-я Саратовская зимняя математическая школа «Современные проблемы теории функций и их приложения». Саратов. СГУ им. Н. Г. Чернышевского. 2008.
- Международная конференция «Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования». Москва. РУДН. 2008.

Тезисы всех докладов опубликованы в сборниках тезисов соответствующих конференций.

Кроме этого автор выступал с докладами на следующих научных семинарах:

- Научный семинар по качественной теории дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ под руководством проф. В. М. Миллионщикова, проф. В. А. Кондратьева, проф. Н. Х. Розова — 1986, 1996, 1998, 2004, 2005, 2006, 2007, 2008.

- Научный семинар по дифференциальным уравнениям кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ п/р проф. В. А. Кондратьева, проф. Е. В. Радкевича — 1996, 2001, 2005.

- Научный семинар по дифференциальным уравнениям кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ п/р проф. В. В. Жикова, проф. В. А. Шамаева, проф. Т. А. Шапошниковой — 2005.

- Научный семинар по дифференциальным уравнениям Владимирского государственного педагогического университета под руководством проф. В. В. Жикова, проф. Ю. В. Алхутова — 2005.

- Научный семинар отдела теории функций Математического института им. Стеклова РАН п/р акад. С. М. Никольского — 2005, 2007.

- Семинар математического отдела ИПМ им. М. В. Келдыша РАН под руководством проф. А. Д. Брюно — 2004, 2006.

- Научный семинар кафедры теории функций механико-математического факультета МГУ под руководством проф. А. Г. Костюченко и проф. А. А. Шкаликова — 2007–2008.

- Научный семинар по качественной теории дифференциальных уравнений кафедры высшей математики Московского государственного университета экономики, статистики и информатики (МЭСИ) — 2002–2008.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 32 работах (14 — в изданиях, рекомендованных ВАК), среди которых 2 монографии. Их список приведен в конце автореферата.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, семи глав, разбитых на параграфы, и списка литературы. Общий объем работы — 240 страниц, список литературы включает 136 наименований. В работе имеется 12 поясняющих иллюстраций. Нумерация теорем, лемм, формул и иллюстраций — двойная: номер главы и собственный номер, следствий — тройная: номер главы, номер теоремы и собственный номер. Во введении — независимая нумерация формул, а номера теорем совпадают с их номерами в основном тексте.

Содержание работы

Обозначения

В работе используются следующие обозначения.

Верхний индекс в квадратных скобках $[j]$ обозначает оператор j-й квазипроизводной:

$$y^{[j]}(x) = r_j(x)\frac{d}{dx}\left(\dots\frac{d}{dx}\left(r_1(x)\frac{d}{dx}\left(r_0(x)\,y\right)\right)\dots\right),$$

где $r_j(x)$ — достаточно гладкие положительные функции.

Таким образом,

$$y^{[0]}(x) = r_0(x)\,y(x),$$

а при $j > 0$ имеем

$$y^{[j]}(x) = r_j(x)\left(y^{[j-1]}\right)'(x)\,.$$

В выражениях, содержащих оценки коэффициентов $r_j(x)$, используются обозначения

$$m_i^j = \prod_{l=i}^{j} \inf\left\{r_l(x) : x \in [a,b]\right\},$$

$$M_i^j = \prod_{l=i}^{j} \sup\left\{r_l(x) : x \in [a,b]\right\},$$

$$\mu_i^j = \frac{M_i^j}{m_i^j},$$

Таким образом,

$$0 < m_i^j \leqslant M_i^j, \qquad \mu_i^j \geqslant 1.$$

Для заданного на отрезке $[a,b]$ линейного дифференциального оператора

$$L = \frac{d^n}{dx^n} + \sum_{j=0}^{n-1} q_j(x)\frac{d^j}{dx^j} \tag{14}$$

положим
$$Q_L = \sup\left\{ \left| q_j(x) \right| \cdot \left(\frac{b-a}{2}\right)^{\deg L - j} \;:\; x \in [a,b],\;\; 0 \leqslant j < \deg L \;\right\}.$$

Будем также использовать обозначения
$$\alpha = \frac{n}{k-1} \tag{15}$$
и
$$Y_{nk} = 2^{n+1+\frac{2n}{k-1}}. \tag{16}$$

Основные результаты Главы 1

В главе 1 рассматривается дифференциальное уравнение (1):
$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} q_i(x)\; y^{(i)} + p(x)\; |y|^{k-1} y = 0,$$
где $n \geqslant 1$, $k > 1$, а $p(x)$ и $q_i(x)$ — непрерывные функции, причем $|p(x)| \geqslant p_* > 0$, а также его частные случаи (соответственно, (5) и (6))
$$y^{[n]} + |y|^{k-1} y = 0,$$
$$y^{[n]} - |y|^{k-1} y = 0,$$
где верхний индекс в квадратных скобках $[j]$ обозначает оператор j-й квазипроизводной:
$$y^{[j]}(x) = r_j(x) \frac{d}{dx}\left(\dots \frac{d}{dx}\left(r_1(x) \frac{d}{dx}\left(r_0(x)\, y \right)\right) \dots \right)$$
с достаточно гладкими положительными функциями $r_j(x)$.

Получены равномерные оценки положительных решений с общей областью определения, зависящие от оценок коэффициентов уравнения и не зависящие от самих коэффициентов. Доказаны следующие теоремы.

Теорема (1.1). *Пусть $y(x)$ — заданное на отрезке $[a,b]$ положительное решение уравнения* (5) *или* (6). *Тогда для всех $x \in (a,b)$ справедлива оценка*
$$y(x) \leqslant C_1 \cdot \delta_1^{-\frac{n}{k-1}},$$

где

$$C_1 = (Y_{nk}^n \, M_0^n)^{\frac{1}{k-1}} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \mu_0^i \, 2^{i\left(i+1+\frac{2n}{k-1}\right)},$$

$$\delta_1 = \min\left\{ x-a, \;\; b-x, \;\; \frac{b-a}{3} \right\}.$$

Следствие (1.1.1). *Пусть функции $r_j(x)$, $j = 0, \ldots, n$, определены на всей прямой и удовлетворяют на ней неравенствам*

$$\begin{array}{ll} 0 < m_* < r_j(x), & j = 0, \ldots, n-1, \\ r_j(x) < M_* < +\infty, & j = 0, \ldots, n. \end{array}$$

Тогда не существует заданных на всей прямой отличных от нуля знакопостоянных решений уравнений (5) *и* (6).

Теорема (1.2). *Для любого заданного на отрезке $[a, b]$ положительного решения $y(x)$ уравнения* (5) *справедлива оценка*

$$y(x) \leqslant C_2 \cdot (x-a)^{-\frac{n}{k-1}}, \qquad x \in (a, b],$$

где

$$C_2 = (3^n \, Y_{nk}^n \, M_0^n)^{\frac{1}{k-1}} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \mu_0^i \, 2^{i\left(i+1+\frac{2n}{k-1}\right)} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2^{(n+1)i} \, \mu_0^i}{i!}.$$

Следствие (1.2.1). *Для любого заданного на отрезке $[a, b]$ положительного решения $y(x)$ уравнения* (6) *с нечетным n справедлива оценка*

$$y(x) \leqslant C_2 \cdot (b-x)^{-\frac{n}{k-1}}, \qquad x \in [a, b),$$

где константа C_2 та же, что и в теореме 1.2.

Следствие (1.2.2). *Для любого заданного на отрезке $[a, b]$ положительного решения $y(x)$ уравнения* (5) *с четным n справедлива оценка*

$$y(x) \leqslant 2^{\frac{n}{k-1}} \cdot C_2 \cdot (b-a)^{-\frac{n}{k-1}} \qquad \text{для всех } x \in [a, b],$$

где константа C_2 та же, что и в теореме 1.2.

Пример. Заметим, что при нечетных n равномерная оценка общей константой для положительных решений уравнения (5), вообще говоря, невозможна. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда заданные на $[0, 1]$ функции

$$y_\varepsilon(x) = (x+\varepsilon)^{-\frac{n}{k-1}}$$

являются при нечетном n положительными решениями уравнения

$$\prod_{j=0}^{n-1}\left(j+\frac{n}{k-1}\right)^{-1}\cdot y^{(n)}+|y|^{k-1}y=0.$$

При этом $y_\varepsilon(0)\to+\infty$ при $\varepsilon\to 0$.

Следствие (1.2.3). *Пусть функции $r_j(x)$, $j=0,\dots,n$, определены на неограниченном слева интервале и удовлетворяют на нем неравенствам из следствия 1.1.1. Тогда на этом интервале не существует отличных от нуля знакопостоянных решений уравнения* (5).

Пример. Заметим, что условие $r_j(x)<M_*<+\infty$ является существенным. Уравнение

$$\frac{|x|^{n+1-k}\,|x+1|^k}{n!}\,y^{(n)}+|y|^{k-1}y=0\,,$$

которое является частным случаем уравнения (5), не удовлетворяющим этому условию, допускает определенное на неограниченном слева интервале $(-\infty,-1)$ положительное решение $y(x)=1+1/x$.

Следствие (1.2.4). *Пусть функции $r_j(x)$, $j=0,\dots,n$, удовлетворяют неравенствам из следствия 1.1.1 на неограниченном справа интервале. Тогда на этом интервале не существует отличных от нуля знакопостоянных решений уравнения* (5) *с четным n и уравнения* (6) *с нечетным n.*

Пример. Заметим, что вместе с тем на неограниченном справа интервале могут существовать отличные от нуля знакопостоянные решения уравнения (5) с нечетным и уравнения (6) с четным n. Так, уравнение

$$\prod_{j=0}^{n-1}\left(j+\frac{n}{k-1}\right)^{-1}\cdot y^{(n)}+(-1)^{n+1}\cdot|y|^{k-1}y=0,$$

имеет положительное решение $y(x)=x^{-\frac{n}{k-1}}$, определенное на неограниченном справа интервале $(0,\infty)$.

Приведем результаты об оценках решений уравнения (1).

Теорема (1.4). *Пусть $y(x)$ — заданное на отрезке $[\,a,b\,]$ положительное решение уравнения* (1), *в котором*

$$|p(x)|\geqslant p_* \qquad \textit{и} \qquad |\,q_j(x)|\leqslant Q^{n-j},\quad j=0,\dots,n-1,$$

при некоторых $p_* > 0$ *и* $Q > 0$.

Тогда для всех $x \in (\,a,\, b\,)$ *справедлива оценка*

$$y(x) \leqslant C_3 \cdot \delta_3^{-\frac{n}{k-1}},$$

где

$$C_3 = \left(\frac{Y_{nk}^n}{p_*}\right)^{\frac{1}{k-1}} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} 2^{i^2+i+2+\frac{2(ni+1)}{k-1}},$$

$$\delta_3 = \min\left\{\; x-a,\;\; b-x,\;\; \frac{b-a}{3},\;\; \frac{2^{-n^2-n+1}}{3Q}\;\right\}.$$

Теорема (1.5). *Пусть* $y(x)$ *— заданное на отрезке* $[\,a, b\,]$ *положительное решение уравнения* (1), *в котором*

$$p(x) \geqslant p_* \qquad и \qquad |\,q_j(x)| \leqslant Q^{n-j}, \quad j = 0, \ldots, n-1,$$

при некоторых $p_* > 0$ *и* $Q > 0$.

Тогда для всех $x \in (\,a,\, b\,]$ *справедлива оценка*

$$y(x) \leqslant C_4 \cdot \delta_4^{-\frac{n}{k-1}},$$

где

$$C_4 = 16\,\left(\frac{4\,(3\,Y_{nk})^n}{p_*}\right)^{\frac{1}{k-1}} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} 2^{i\left(i+1+\frac{2n}{k-1}\right)} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2^{(n+1)i}}{i!},$$

$$\delta_4 = \min\left\{\; x-a,\;\; \frac{2^{-n^2-n+1}}{Q}\;\right\}.$$

Следствие (1.5.1). *Для любого заданного на отрезке* $[a, b]$ *положительного решения* $y(x)$ *уравнения* (1) *с нечетным* n *при* $p(x) \leqslant -p_* < 0$ *и*

$$|\,q_j(x)| \leqslant Q^{n-j}, \quad j = 0, \ldots, n-1,$$

справедлива оценка

$$y(x) \leqslant C_4 \cdot \delta_5^{-\frac{n}{k-1}}, \qquad x \in [\,a,\, b\,),$$

где

$$\delta_5 = \min\left\{\; b-x,\;\; \frac{2^{-n^2-n+1}}{Q}\;\right\},$$

а константа C_4 *та же, что и в теореме 1.5.*

Следствие (1.5.2). *Для любого заданного на отрезке* $[a, b]$ *положительного решения* $y(x)$ *уравнения* (1) *с четным* n *при* $p(x) \geqslant p_* > 0$ *и*

$$| \, q_j(x)| \leqslant Q^{n-j}, \quad j = 0, \dots, n-1,$$

справедлива оценка

$$y(x) \leqslant C_5, \qquad x \in [\, a, \, b\,],$$

где

$$C_5 = C_4 \cdot \min \left\{ \, b - a, \quad \frac{2^{-n^2-n+1}}{Q} \, \right\}^{-\frac{n}{k-1}},$$

а константа C_4 *та же, что и в теореме 1.5.*

Пример. Так как оценки в теоремах 1.4 и 1.5 используют ограниченные сверху δ_3 и δ_4, получить для уравнения (1) следствия, аналогичные следствиям 1.1.1, 1.2.3 и 1.2.4 для уравнений (5) и (6), нельзя. Наоборот, можно привести примеры уравнений типа (1) произвольного порядка со сколь угодно малыми $q_j(x)$, имеющих положительные решения с неограниченной областью определения. Так, уравнения $y^{(n)} - \varepsilon^2 y + y^3 = 0$ и $y^{(n)} + \varepsilon^2 y - y^3 = 0$ имеют определенное на всей числовой прямой положительное решение $y(x) = \varepsilon$.

Основные результаты Главы 2

В главе 2 рассматривается дифференциальное неравенство (8):

$$y^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(x) \, y^{(j)} \geqslant p_* \, |y|^k \,,$$

где $a_j(x)$ — непрерывные функции, $p_* > 0$, $n \geqslant 1$, $k > 1$,
а также его частный случай (7):

$$r_n(x) \frac{d}{dx} \left(\dots \frac{d}{dx} \left(r_1(x) \frac{d}{dx} \Big(r_0 \, (x) \; y \Big) \right) \dots \right) \geqslant |y|^k \,,$$

где все $r_j(x)$ — достаточно гладкие положительные функции. Получены равномерные оценки модулей решений, имеющих общую область определения.

Теорема (2.1). *Для любого заданного на отрезке* $[\,a,b\,]$ *решения* $y(x)$ *неравенства* (7) *справедлива оценка*

$$|y(x)| \leqslant C_1 \cdot \min\{x-a, b-x\}^{-n/(k-1)}, \qquad x \in (a,b)\,,$$

где

$$C_1 = C_1\,(\,n,\ k,\ \inf\, r_j(x),\ \sup\, r_j(x)\,)\,,$$

причем $\inf\, r_j(x)$ *берется по всем* $x \in [\,a,b\,]$ *и* $j = 0,\ldots,n-1$, *а* $\sup\, r_j(x)$ *— по всем* $x \in [\,a,b\,]$ *и* $j = 0,\ldots,n$.

Следствие (2.1.1). *Пусть функции* $r_j(x)$, $j = 0,\ldots,n$, *заданы на всей прямой и удовлетворяют на ней неравенствам* $0 < m_* < r_j(x) < M_* < +\infty$. *Тогда не существует заданных на всей прямой нетривиальных решений неравенства* (7).

Теорема (2.2). *Для любых* $k > 1$, $p_* > 0$, $Q > 0$, $n \geqslant 1$ *существуют такие* $\delta > 0$ *и* $C_2 > 0$, *что для любых непрерывных функций* $a_0(x),\ldots,a_{n-1}(x)$, *заданных на произвольном отрезке* $[\,a,b\,]$ *и удовлетворяющих условию*

$$\sup\left\{\,|\,a_j(x)\,|^{1/(n-j)} : x \in [\,a,b\,],\ j = 0,\ldots,n-1\,\right\} \leqslant Q\,,$$

и любого заданного на $[\,a,b\,]$ *решения неравенства* (8) *справедлива оценка*

$$|y(x)| \leqslant C_2\,\min\{\,\delta,\ x-a,\ b-x\,\}^{-n/(k-1)}, \qquad x \in (a,b)\,.$$

Так как любое решение неравенства (9) — это взятое с противоположным знаком некоторое решение неравенства (8) и наоборот, имеет место аналогичное утверждение и для неравенства (9) (следствие 2.2.1).

Замечание 1. Отметим, что для теоремы 2.2 не существует следствия, аналогичного следствию 2.1.1. В качестве контрпримера приведем неравенство $y^{(n)} + \varepsilon y \geqslant |y|^k$, которое имеет определенное на всей прямой решение $y(x) \equiv \varepsilon^{1/(k-1)}$.

Замечание 2. Для неравенств (10) и (11):

$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x)\,y^{(i)} \leqslant p_*\,|y|^k,$$

$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x)\,y^{(i)} \geqslant -p_*\,|y|^k$$

при тех же условиях на $a_i(x)$, p_*, n и k не существует оценок, аналогичных оценкам, приведенным для неравенств (8) и (9).

Основные результаты Главы 3

В главе 3 исследуется уравнение (1), коэффициенты $q_j(x)$ которого таковы, что сходятся интегралы

$$\int\limits_x^\infty x^{n-j-1} \left| q_j(x) \right| \, dx, \qquad j = 0, \ldots, n-1.$$

В этом случае для функции $p(x)$ получены достаточные условия, при которых уравнение (1) имеет неколеблющееся решение с ненулевым пределом при $x \to +\infty$. При $p(x) > 0$ доказано, что эти условия являются необходимыми. Для четных n этот результат имеет следствие, являющееся обобщением критерия F. Atkinson колеблемости всех решений уравнения (1).

Теорема (3.1). *Пусть в уравнении* (1) *функции* $p(x)$ *и* $q_j(x)$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, *удовлетворяют условиям*

$$\int\limits_x^\infty x^{n-1} \left| p(x) \right| dx < \infty, \tag{17}$$

$$\int\limits_x^\infty x^{n-j-1} \left| q_j(x) \right| dx < \infty. \tag{18}$$

Тогда для любого $h \neq 0$ *уравнение* (1) *имеет определенное в некоторой окрестности* $+\infty$ *неколеблющееся решение* $y(x)$, *которое при* $x \to \infty$ *стремится к* h, *а его производные удовлетворяют условиям*

$$\int\limits_x^\infty x^{j-1} \left| y^{(j)}(x) \right| \, dx < \infty, \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{19}$$

Теорема (3.3). *Пусть в уравнении* (1) *функция* $p(x)$ *положительна, а функции* $q_j(x)$, $j = 0, \ldots, n-1$, *удовлетворяют условиям* (18).

Тогда следующие условия равносильны:

(i) функция $p(x)$ *удовлетворяет неравенству* (17),

(ii) уравнение (1) *имеет определенное в некоторой окрестности* $+\infty$ *неколеблющееся решение* $y(x)$, *которое при* $x \to \infty$ *не стремится к нулю.*

Следствие (Критерий колеблемости). *Пусть в уравнении* (1) *четного порядка* n *функция* $p(x)$ *положительна, а функции* $q_j(x)$, $j = 0, \ldots, n-1$, *удовлетворяют условиям* (18).

Тогда следующие условия равносильны:

(i)

$$\int_x^\infty x^{n-1}\,|p(x)|\,dx = \infty,$$

(ii) все решения уравнения (1), *определенные в окрестности* $+\infty$, *являются колеблющимися.*

Основные результаты Главы 4

В главе 4 исследуются асимптотические свойства знакопостоянных решений уравнения (2). Для произвольного $n \geqslant 2$ и $k > 1$ доказывается существование решений уравнения с вертикальной асимптотой, имеющих степенную асимптотику. При $2 \leqslant n \leqslant 13$ доказывается существование $(n-1)$-параметрического семейства таких решений. В случае четного n доказывается существование однопараметрического семейства кнезеровских решений, стремящихся к нулю на бесконечности, имеющих степенную асимптотику. При $n = 3, 4$ и $k > 1$ доказывается, что все решения, имеющие вертикальную асимптоту, имеют степенную асимптотику, а при $n = 4$ — что степенную асимптотику имеют и все кнезеровские решения.

Рассматривается уравнение (2), в котором $k > 0$, а непрерывная положительная функция $p(x, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$ удовлетворяет условию Липшица по y_0, y_1, …, y_{n-1}.

В этом разделе предполагается, что в уравнении (2) непрерывная положительная функция $p(x,\, y_0,\, \ldots, y_{n-1})$ имеет предел $p_0 > 0$ при $x \to x^* - 0$, $y_0 \to \infty$, …, $y_{n-1} \to \infty$, причем для некоторого $\gamma > 0$ выполнено соотношение

$$p(x,\, y_0,\, \ldots, y_{n-1}) - p_0 = O\left(|x^* - x|^\gamma + \sum_{j=0}^{n-1} |y_j|^{-\gamma} \right). \qquad (20)$$

Кроме того, в окрестности точки x^* для достаточно больших y_0, …,

$y_{n-1},\, z_0,\, \ldots,\, z_{n-1}$ предполагается выполненным соотношение

$$\begin{gathered}\Big|p(x,\, y_0,\, \ldots, y_{n-1}) - p(x,\, z_0,\, \ldots, z_{n-1})\Big| \leqslant \\ \leqslant K_1 \max_j \Big| |y_j|^{-\mu} - |z_j|^{-\mu} \Big|\end{gathered} \tag{21}$$

для некоторых $K_1 > 0$ и $\mu > 0$.

В случае, когда $p \equiv p_0 = \mathrm{const} > 0$, то есть когда уравнение (2) принимает вид (3), непосредственными вычислениями проверяется, что функция

$$y(x) = C(x^* - x)^{-\alpha}, \qquad x < x^*,$$

является его решением при

$$\alpha = \frac{n}{k-1}, \qquad C = \left(\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{p_0}\right)^{\frac{1}{k-1}} \tag{22}$$

Доказывается, что уравнение (2) имеет решение вида

$$y(x) = C(x^* - x)^{-\alpha} \left(1 + o(1)\right), \qquad x \to x^* - 0, \tag{23}$$

где константы α и C задаются формулами (22).

Доказывается также, что при $3 \leqslant n \leqslant 13$ существует $(n-1)$-параметрическое семейство решений уравнения (2) с такой асимптотикой.

Далее рассматривается уравнение (2) при четных значениях n.

Предполагается, что функция $p(x,\, y_0,\, \ldots, y_{n-1})$ непрерывна и стремится к пределу $p_0 = \mathrm{const} > 0$ при $x \to \infty$, $y_0 \to 0, \ldots, y_{n-1} \to 0$, причем для некоторого $\gamma > 0$ выполнено соотношение

$$p(x,\, y_0,\, \ldots, y_{n-1}) - p_0 = O\left(|x|^{-\gamma} + \sum_{j=0}^{n-1} |y_j|^{\gamma}\right). \tag{24}$$

Кроме того, при $x \to \infty$, $y_0 \to 0, \ldots, y_{n-1} \to 0$, $z_0 \to 0, \ldots, z_{n-1} \to 0$ предполагается выполненным соотношение

$$\begin{gathered}\Big|p(x,\, y_0,\, \ldots, y_{n-1}) - p(x,\, z_0,\, \ldots, z_{n-1})\Big| \leqslant \\ \leqslant K_2 \max_j \Big| |y_j|^{\mu} - |z_j|^{\mu} \Big|\end{gathered} \tag{25}$$

для некоторых $K_2 > 0$ и $\mu > 0$.

Уравнение (3) при четных значениях n имеет решение

$$y(x) = C(x - x^*)^{-\alpha}, \qquad x > x^*, \tag{26}$$

где константы α и C определяются формулами (22). Это решение определено на интервале (x^*, ∞) и стремится к нулю вместе со всеми своими производными при $x \to \infty$.

Доказывается, что существует однопараметрическое семейство решений уравнения (2) с асимптотикой

$$y(x) = Cx^{-\alpha}\left(1 + o(1)\right), \qquad x \to \infty, \tag{27}$$

где константы α и C определяются формулами (22).

Теорема (4.1). *Пусть в уравнении* (2) *непрерывная положительная функция* $p(x,\, y_0,\, \ldots, y_{n-1})$ *имеет при* $x \to x^* - 0$, $y_0 \to \infty, \ldots, y_{n-1} \to \infty$ *предел* $p_0 = \mathrm{const} > 0$*, причем выполняются условия* (20), (21)*. Тогда для такого* x^* *существует решение уравнения* (2) *с асимптотикой* (23)–(22).

Теорема (4.2). *Пусть* $3 \leqslant n \leqslant 13$, *а непрерывная функция* $p(x,\, y_0,\, \ldots, y_{n-1})$ *при* $x \to x^* - 0$, $y_0 \to \infty, \ldots, y_{n-1} \to \infty$ *имеет предел* $p_0 > 0$, *и выполняются условия* (20), (21)*. Тогда существует* $(n-1)$*-параметрическое семейство решений уравнения* (2)*, имеющих асимптотику* (23)–(22).

Ненулевое решение $y(x)$ уравнения (2), определенное на интервале $[x_0,\, \infty)$ будем называть *кнезеровским*, если оно удовлетворяет условиям

$$(-1)^i y^{(i)}(x) > 0, \quad x \geqslant x_0, \quad i = 0, \ldots, n-1.$$

Теорема (4.3). *Если при* $x \to \infty$, $y_0 \to 0, \ldots, y_{n-1} \to 0$ *непрерывная положительная функция* $p(x,\, y_0,\, \ldots, y_{n-1})$ *стремится к пределу* $p_0 > 0$, *причем выполняются условия* (24) *и* (25)*, то уравнение* (2) *при четном* n *имеет кнезеровское решение с асимптотикой* (23)*, где константы* α *и* C *определяются формулами* (22).

Для $n = 3$ и $n = 4$ при некоторых предположениях на функцию $p(x, y_0, \ldots, y_{n-1})$ доказывается, что описанное выше асимптотическое поведение кнезеровских решений и решений с вертикальной асимптотой является для них единственно возможным.

Теорема (4.5). *Пусть в уравнении (2) $n = 3$ или $n = 4$, а положительная непрерывная функция $p(x, y_0, \ldots, y_{n-1})$ удовлетворяет условию Липшица по $y_0, \ldots, y_{n-1}$ и имеет предел $p_0 > 0$ при $x \to x^* - 0$, $y_0 \to \infty$, $\ldots$, $y_{n-1} \to \infty$. Тогда любое положительное решение уравнения (2) с вертикальной асимптотой $x = x^*$ имеет асимптотику (23) с константами α и C, заданными формулами (22).*

Описаны все возможные случаи поведения знакопостоянных решений уравнения (2) при выполнении условия

$$0 < p_{\min} \leqslant p(x,\, y_0,\, \ldots, y_{n-1}) \leqslant p_{\max} < +\infty. \qquad (28)$$

Теорема (4.6). *Все решения уравнения (2), знакопостоянные, начиная с некоторого момента, имеют вертикальную асимптоту, либо стремятся к нулю вместе со всеми своими производными до порядка n. Второй случай может иметь место только для четных n, при этом функции $y^{(j)}(x)$, $j = 1, \ldots, n-1$ на всей области определения имеют тот же знак, что и $y(x)$, если j четно, и противоположный, если j нечетно.*

Теорема (4.7). *Пусть в уравнении (3) $n = 4$. Тогда все кнезеровские решения уравнения (3) имеют вид*

$$y(x) = C(x - x^*)^{-\alpha}, \quad x > x^*,$$

где C и α определяются формулами (22), а x^* — произвольная константа (играющая роль параметра в однопараметрическом семействе кнезеровских решений).

Теорема (4.8). *Пусть в уравнении (2) $n = 4$, а положительная непрерывная функция $p(x, y_0, y_1, y_2, y_3)$ удовлетворяет по y_0, y_1, y_2, y_3 условию Липшица. Тогда существует кнезеровское решение уравнения (2).*

Теорема (4.9). *Пусть $n = 4$, а функция $p(x, y_0, y_1, y_2, y_3)$ удовлетворяет условиям теоремы 4.8 и условию (28). Кроме того, пусть при $x \to +\infty$, $y_0 \to 0$, $\ldots$, $y_3 \to 0$ существует предел функции $p(x, y_0, y_1, y_2, y_3)$, равный $p_0 > 0$. Тогда любое кнезеровское решение уравнения (2) стремится к нулю с асимптотикой*

$$y(x) = Cx^{-\alpha}\,(1 + o(1)), \qquad x \to +\infty,$$

где C и α определяются формулами (22).

Далее рассматривается поведение решений уравнения (2) при убывании аргумента x.

При четных n замена независимой переменной $x' = -x$ переводит уравнение (2) в уравнение того же типа, поэтому справедливы результаты, которые были получены выше для поведения решений при возрастании x.

Теорема (4.10). *При $n = 4$ в предположении, что непрерывная положительная функция $p(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$ имеет положительный предел $p_0 > 0$ при $x \to x^* + 0$, $(-1)^i y_i \to +\infty$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, и удовлетворяет условию Липшица по y_0, y_1, y_2, y_3, любое положительное решение уравнения (2), заданное на интервале (x^*, x_1) и имеющее вертикальную асимптоту $x = x^*$, удовлетворяет соотношению*

$$y(x) = C(x - x^*)^{-\alpha}(1 + o(1)), \qquad x \to x^* + 0,$$

где C и α определены в (22).

Заметим, что при нечетных n у уравнения (2) с непрерывной положительной функцией $p(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$ нет решений, имеющих вертикальную асимптоту и определенных справа от нее.

Перейдем к кнезеровским решениям уравнения (2). Среди решений, определенных на интервале $(-\infty, x_0]$, *кнезеровскими* естественно назвать положительные решения, все производные которых до порядка n включительно также положительны.

Теорема (4.11). *При $n = 3$ или $n = 4$ все кнезеровские (при убывании аргумента) решения уравнения (3) имеют вид*

$$y(x) = C(x^* - x)^{-\alpha}, \qquad x < x^*,$$

где C и α определяются формулами (22).

Теорема (4.12). *Пусть $n = 3$ или $n = 4$, а $p(x, y_0, \dots, y_{n-1})$ — непрерывная положительная функция, удовлетворяющая условию Липшица по $y_0, \dots, y_{n-1}$. Тогда существует кнезеровское (при убывании аргумента) решение уравнения (2).*

Теорема (4.13). *Пусть $n = 3$ или $n = 4$. Кроме того, пусть функция $p(x, y_0, \dots, y_{n-1})$ удовлетворяет условиям теоремы 4.12, выполняется условие (28) и существует предел функции $p(x, y_0, \dots, y_{n-1})$ при $x \to -\infty$, $y_0 \to 0, \dots, y_{n-1} \to 0$, равный $p_0 > 0$. Тогда любое кнезеровское (при убывании аргумента) решение уравнения (2) стремится к нулю с асимптотикой*

$$y(x) = C\,|x|^{-\alpha}, \qquad x \to -\infty,$$

где константы C и α определены в (22).

Основные результаты Главы 5

В этой главе доказано существование колеблющихся решений для любого $n > 2$ и исследуется асимптотическое поведение колеблющихся решений уравнения (2) при $n = 3, 4$. Решение будем называть *колеблющимся* если оно имеет бесконечную последовательность нулей (ограниченную или неограниченную).

Теорема (5.1). *При $n > 2$ уравнение (2), в котором непрерывная функция $p(x, y_0, \ldots, y_{n-1})$ удовлетворяет условию (28) и условию Липшица по y_0, …, y_{n-1}, имеет знакопеременные решения.*

Для случая $n = 3$, для уравнения (3) имеют место следующие результаты.

Пусть $x_1 < x_2 < \cdots < x_i < \ldots$ — такая последовательность точек, что $y(x_i) = 0,\ i = 1,\ 2, \ldots$, и $y(x) \neq 0$ при $x \in (x_i,\ x_{i+1})$, а $x'_1 < x'_2 < \cdots < x'_i < \ldots$ — такая последовательность, что $y'(x'_i) = 0$, а на интервалах $(x'_i,\ x'_{i+1}),\ i = 1, 2, \ldots$, функция $y(x)$ монотонна.

Теорема (5.2). *При $n = 3$ существует такая константа $B \in (0,\ 1)$, зависящая только от p_0 и k, что любое знакопеременное решение $y(x)$ уравнения (3) удовлетворяет условиям:*

$$1) \qquad \frac{x_{i+1} - x_i}{x_i - x_{i-1}} = B^{-1}, \quad i = 2,\ 3, \ldots, \tag{29}$$

$$2) \qquad \frac{y(x'_{i+1})}{y(x'_i)} = -B^{\alpha}, \quad i = 1\ , 2,\ 3, \ldots, \tag{30}$$

$$3) \qquad \frac{y'(x_{i+1})}{y'(x_i)} = -B^{\alpha+1}, \quad i = 1\ , 2,\ 3, \ldots, \tag{31}$$

$$4) \qquad |y(x'_i)| = M(x'_i - x_*)^{-\alpha}, \quad i = 1\ , 2,\ 3, \ldots \tag{32}$$

для некоторых $M > 0$ и x_*, причем константа M зависит только от p_0 и m_0.

Теорема (5.3). *Пусть функция $p(x, y_0, y_1, y_2) > 0$ является непрерывной, удовлетворяет условию Липшица по y_0, y_1, y_2 и равномерно по y_0, y_1, y_2 стремится к $p_0 > 0$ при $x \to \infty$. Пусть кроме того $y(x)$ — колеблющееся решение уравнения (2), а $x_1 < x_2 < \ldots$ и $x'_1 < x'_2 < \ldots$ — введенные выше последовательности точек обращения в нуль решения и точек локального экстремума решения. Пусть $B \in (0, 1)$ — константа, существование которой утверждается в теореме 5.2. Тогда* *при $i \to \infty$ справедливы соотношения:*

$$1)\quad \frac{x_{i+1}-x_i}{x_{i+2}-x_{i+1}} \to B, \qquad 2)\quad \frac{y(x'_{i+1})}{y(x'_i)} \to -B^{\alpha},$$

$$3)\quad \frac{y'(x_{i+1})}{y'(x_i)} \to -B^{\alpha+1}, \qquad 4)\quad |y(x'_i)| = (x'_i)^{-\alpha+o(1)}.$$

Под знакопеременными решениями уравнения (2) при убывании аргумента будем понимать решения этого уравнения, определенные на интервале (x_*, x_0), где $-\infty \leqslant x_* < x_0 \leqslant \infty$, и не являющиеся знакопостоянными ни на каком интервале вида (x_*, x_1), где $x_* < x_1 < x_0$.

Теорема (5.4). *Пусть непрерывная функция $p(x, y_0, y_1, y_2)$ удовлетворяет условию Липшица по переменным y_0, y_1, y_2. Кроме того, пусть $p(x, y_0, y_1, y_2) \to p_0 > 0$ при $x \to x_* + 0$ равномерно по y_0, y_1, y_2.*

Тогда для $n = 3$ существует такая постоянная $B \in (0, 1)$, что любое знакопеременное решение уравнения (2), определенное на интервале (x_*, x_0), $-\infty \leqslant x_* < x_0 \leqslant \infty$, удовлетворяет условиям

$$1)\quad \frac{x_{i+1}-x_{i+2}}{x_i - x_{i+1}} \to B, \qquad i \to \infty,$$

$$2)\quad \frac{y'(x_i)}{y'(x_{i+1})} \to -B^{\alpha+1}, \qquad i \to \infty,$$

$$3)\quad \frac{y(x'_i)}{y(x'_{i+1})} \to -B^{\alpha}, \qquad i \to \infty,$$

$$4)\quad y(x'_i) = |x_* - x'_i|^{-\alpha+o(1)}, \qquad i \to \infty,$$

где $x_1 > x_2 > \ldots > x_i > \ldots$ и $x'_1 > x'_2 > \ldots > x'_i > \ldots$ — такие последовательности, что

$$y(x_i) = 0, \qquad y(x) \neq 0 \text{ при } x_{j+1} < x < x_i,$$
$$y'(x'_i) = 0 \qquad y'(x) \neq 0 \text{ при } x'_{j+1} < x < x'_i.$$

Теорема (5.5). *Пусть $n = 4$. Тогда для любого знакопеременного решения $y(x)$ уравнения (3) найдутся такие положительные постоянные $\triangle_{\min}$ и $\triangle_{\max}$, что расстояние между двумя соседними точками, где решение $y(x)$ обращается в нуль, больше, чем $\triangle_{\min}$ и меньше, чем $\triangle_{\max}$.*

Теорема (5.6). *Для любого $h > 0$ существует периодическое решение уравнения (3) с $n = 4$, все локальные экстремумы которого равны по модулю h.*

Заметим, что для каждого $h > 0$ такое периодическое решение единственно с точностью до сдвига вдоль оси OX.

Теорема (5.7). *Пусть $y(x)$ — знакопеременное при возрастании аргумента, максимально продолженное вправо решение уравнения* (3) *при $n = 4$. Пусть $x_1 < x_2 < \ldots < x_i < \ldots$ — последовательность точек обращения в ноль знакопеременного решения $y(x)$, такая что $y(x_i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots$ и $y(x) \neq 0$ при $x \in (x_i, x_{i+1})$, $i = 1, 2, \ldots$, а $x'_1 < x'_2 < \ldots < x'_i < \ldots$ — последовательность локальных экстремумов знакопеременного решения $y(x)$, такая что $y'(x'_i) = 0$ и $y(x)$ монотонна при $x \in (x_i, x_{i+1})$, $i = 1, 2, \ldots$.*

Тогда существуют конечные, отличные от нуля пределы последовательностей $(x_{i+1} - x_i)$, $|y(x'_i)|$, $|y'(x_i)|$, $|y''(x'_i)|$ и $|y'''(x_i)|$, а последовательности $y''(x_i)$ и $y'''(x'_i)$ стремятся к нулю.

Основные результаты Главы 6

В главе 6 приведена асимптотическая классификация решений дифференциальных уравнений (3) и (4) при $n = 3, 4$. При этом рассматриваются как регулярные нелинейности ($k > 1$), так и сингулярные ($0 < k < 1$).

Теорема (6.1). *Пусть $k > 1$, а $p(x)$ — заданная на всей числовой прямой непрерывная положительная функция, имеющая положительные пределы p_* и p^* соответственно при $x \to -\infty$ и $x \to +\infty$. Тогда все максимально продолженные решения уравнения*

$$y''' + p(x)\,|y|^{k-1}y = 0$$

в соответствии с их асимптотическим поведением делятся на следующие шесть типов.

0. Заданное на всей числовой прямой тривиальное решение

$$y(x) \equiv 0.$$

1–2. Заданные на полупрямой $(b, +\infty)$ кнезеровские (с точностью до знака) решения со степенной асимптотикой вблизи обеих границ области определения (с совпадающими знаками $\pm$):

$$y(x) = \pm C_{3k}(p(b))\,(x-b)^{-\frac{3}{k-1}}\,(1+o(1)), \qquad x \to b+0,$$
$$y(x) = \pm C_{3k}(p^*)\,x^{-\frac{3}{k-1}}\,(1+o(1)), \qquad x \to +\infty,$$

где

$$C_{3k}(p) = \left(\frac{3(k+2)(2k+1)}{p\,(k-1)^3} \right)^{\frac{1}{k-1}}.$$

3. Заданные на полупрямой $(-\infty, b)$ решения, колеблющиеся вблизи обеих границ области определения. Расстояние между соседними нулями у них неограниченно возрастает при убывании аргумента и стремится к нулю при его возрастании. Сами решения и их производные удовлетворяют соотношениям

$$\lim_{x\to-\infty} y^{(j)}(x) = 0, \qquad \overline{\lim_{x\to b}} \left|y^{(j)}(x)\right| = \infty, \qquad j = 0, 1, 2,$$

а в точках локального экстремума —

$$|y(x')| = |x'|^{-\frac{3}{k-1}+o(1)}, \qquad x' \to -\infty,$$
$$|y(x')| = |b - x'|^{-\frac{3}{k-1}+o(1)}, \qquad x' \to b+0.$$

4–5. Заданные на ограниченном интервале (b', b'') решения, колеблющиеся вблизи правой границы области определения и соответственно положительные или отрицательные в некоторой окрестности левой границы. При убывании аргумента они имеют степенную асимптотику (с совпадающими знаками $\pm$):

$$y(x) = \pm C_{3k}(p(b'))\,(x - b')^{-\frac{3}{k-1}}\,(1 + o(1)), \qquad x \to b' + 0,$$

а при возрастании — удовлетворяют соотношениям

$$\overline{\lim_{x\to b''}} \left|y^{(j)}(x)\right| = \infty, \qquad j = 0, 1, 2,$$

причем в точках локального экстремума —

$$|y(x')| = |b'' - x'|^{-\frac{3}{k-1}+o(1)}, \qquad x' \to b'' - 0.$$

Теорема (6.2). *При $k > 1$ и $p_0 > 0$ все максимально продолженные решения уравнения*

$$y^{\mathrm{IV}}(x) + p_0\,|y|^{k-1} y = 0$$

в соответствии с их асимптотическим поведением делятся на следующие четыре типа.

0. Заданное на всей числовой прямой тривиальное решение

$$y(x) \equiv 0.$$

1. Заданные на полупрямой $(-\infty, b)$ колеблющиеся решения. Расстояние между соседними нулями у них неограниченно возрастает при *убывании аргумента и стремится к нулю при его возрастании. Сами решения и их производные удовлетворяют соотношениям*

$$\lim_{x\to-\infty} y^{(j)}(x) = 0, \qquad \overline{\lim_{x\to b}} \left|y^{(j)}(x)\right| = \infty, \qquad j = 0, 1, 2, 3,$$

а в точках локального экстремума —

$$C_1 \, |x-b|^{-\frac{4}{k-1}} \leqslant |y(x)| \leqslant C_2 \, |x-b|^{-\frac{4}{k-1}} \tag{33}$$

с зависящими только от k и p_0 положительными константами C_1 и C_2.

2. Заданные на полупрямой $(b, +\infty)$ колеблющиеся решения. Расстояние между соседними нулями у них неограниченно возрастает при возрастании аргумента и стремится к нулю при его убывании. Сами решения и их производные удовлетворяют соотношениям

$$\overline{\lim_{x\to b}} \left|y^{(j)}(x)\right| = \infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} y^{(j)}(x) = 0, \qquad j = 0, 1, 2, 3,$$

а в точках локального экстремума — соотношениям (33) с зависящими только от k и p_0 положительными константами C_1 и C_2.

3. Колеблющиеся решения, заданные на ограниченном интервале (b', b''). Для них и их производных выполняются соотношения

$$\overline{\lim_{x\to b'}} \left|y^{(j)}(x)\right| = \overline{\lim_{x\to b''}} \left|y^{(j)}(x)\right| = \infty, \qquad j = 0, 1, 2, 3,$$

а в точках локального экстремума, достаточно близких к какой-либо границе интервала — соотношения (33) соответственно с $b = b'$ или $b = b''$ и с зависящими только от k и p_0 положительными константами C_1 и C_2.

Теорема (6.3). *При $k > 1$ и $p_0 > 0$ все максимально продолженные решения уравнения*

$$y^{\mathrm{IV}}(x) - p_0 \, |y|^{k-1} y = 0$$

в соответствии с их асимптотическим поведением делятся на следующие четыре типа.

0. Заданное на всей числовой прямой тривиальное решение

$$y(x) \equiv 0.$$

1–2. Заданные на полупрямой $(b, +\infty)$ кнезеровские (с точностью до знака) решения со степенной асимптотикой вблизи обеих границ области определения (с совпадающими знаками $\pm$):

$$y(x) = \pm C_{4k}(p(b)) \, (x-b)^{-\frac{4}{k-1}} \, (1 + o(1)), \qquad x \to b + 0,$$
$$y(x) = \pm C_{4k}(p^*) \, x^{-\frac{4}{k-1}} \, (1 + o(1)), \qquad x \to +\infty,$$

где

$$C_{4k}(p) = \left(\frac{4(k+3)(2k+2)(3k+1)}{p\,(k-1)^4} \right)^{\frac{1}{k-1}}.$$

3–4. Заданные на полупрямой $(-\infty, b)$ кнезеровские (с точностью до знака) решения со степенной асимптотикой вблизи обеих границ области определения (с совпадающими знаками $\pm$):

$$y(x) = \pm C_{4k}(p^*)\ |x|^{-\frac{4}{k-1}}\ (1+o(1)), \qquad x \to -\infty,$$
$$y(x) = \pm C_{4k}(p(b))\ (b-x)^{-\frac{4}{k-1}}\ (1+o(1)), \qquad x \to b-0.$$

5. Заданные на всей числовой прямой периодические колеблющиеся решения. Все они могут быть получены из одного, скажем, $z(x)$, с помощью соотношения

$$y(x) = \lambda^4 z(\lambda^{k-1}x + x_0)$$

с произвольными $\lambda > 0$ и x_0. Следовательно, существуют такие решения с произвольным максимумом $h > 0$ и с произвольным периодом $T > 0$, но не с произвольной парой (h, T).

6–9. Заданные на ограниченном интервале (b', b'') решения со степенной асимптотикой вблизи каждой границы области определения (с независимыми знаками $\pm$):

$$y(x) = \pm C_{4k}(p(b'))\ (x-b')^{-\frac{4}{k-1}}\ (1+o(1)), \qquad x \to b'+0,$$
$$y(x) = \pm C_{4k}(p(b''))\ (b''-x)^{-\frac{4}{k-1}}\ (1+o(1)), \qquad x \to b''-0.$$

10–11. Заданные на полупрямой $(-\infty, b)$ решения, колеблющиеся при $x \to -\infty$ и сохраняющие положительный или отрицательный знак вблизи правой границы области определения, где они имеют степенную асимптотику:

$$y(x) = \pm C_{4k}(p(b))\ (b-x)^{-\frac{4}{k-1}}\ (1+o(1)), \qquad x \to b-0.$$

У каждого решения существует предел модуля локального экстремума при $x \to -\infty$.

12–13. Заданные на полупрямой $(b, +\infty)$ решения, колеблющиеся при $x \to +\infty$ и сохраняющие положительный или отрицательный знак вблизи левой границы области определения, где они имеют степенную асимптотику:

$$y(x) = \pm C_{4k}(p(b))\ (x-b)^{-\frac{4}{k-1}}\ (1+o(1)), \qquad x \to b+0.$$

У каждого решения существует предел модуля локального экстремума при $x \to +\infty$.

Для уравнения

$$y''' + p(x,\, y,\, y',\, y'')\;|y|^{k-1}y = 0, \tag{34}$$

где $k > 1$, а функция $p:\,\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ непрерывна, удовлетворяет условию Липшица по последним трем аргументам и

$$0 < m \leqslant p(x,\, y_0,\, y_1,\, y_2) \leqslant M < \infty, \tag{35}$$

доказывается непрерывная зависимость положения асимптот от начальных условий решения, а также существование максимально продолженных решений с любой областью определения.

Будем говорить, что функция $y(x)$ имеет *резонансную асимптоту* $x = x_*$, если

$$\varlimsup_{x\to x_*} y(x) = +\infty, \qquad \varliminf_{x\to x_*} y(x) = -\infty.$$

Теорема (6.4). *Пусть $k > 1$, функция $p(x,\, y_0,\, y_1,\, y_2)$ непрерывна, удовлетворяет неравенствам* (35) *и условию Липшица по последним трем аргументам. Пусть $y(x)$ — решение уравнения* (34) *имеющее резонансную асимптоту $x = x_*$. Тогда положение асимптоты $x = x_*$ непрерывно зависит от данных Коши решения в любой точке его области определения.*

Теорема (6.5). *Пусть выполнены условия теоремы 6.4, относящиеся к уравнению* (34)*. Тогда для любых конечных значений $x_* < x^*$ существует решение этого уравнения, определенное на $(x_*,\, x^*)$, имеющее вертикальную асимптоту $x = x_*$ и резонансную асимптоту $x = x^*$.*

Теорема (6.6). *При выполнении условий теоремы 6.4 для любых конечных или бесконечных значений $x_* < x^*$ существует максимально продолженное решение уравнения* (34)*, которое определено на интервале $(x_*,\, x^*)$.*

Для уравнения (2) при $0 < k < 1$ условия классической теоремы единственности решения задачи Коши не выполняются. Тем не менее имеет место следующее утверждение:

Теорема (6.7). *Пусть функция $p(x, y_0, \ldots, y_{n-1})$ непрерывна по x и удовлетворяет условию Липшица по $y_0,\ \ldots,\ y_{n-1}$. Тогда для любого набора чисел $x_0, y_0^0, \ldots, y_{n-1}^0$, у которого не все y_i^0 равны 0, соответствующая задача Коши имеет единственное решение.*

Приведем результаты об асимптотическом поведении решений уравнения (2) в случае $n = 3,\ 0 < k < 1$.

Теорема (6.8). *Пусть* $n = 3,\ 0 < k < 1,$ *а удовлетворяющая условиям теоремы 6.7 функция* $p(x, y_0, y_1, y_2)$ *при* $x \to +\infty$ *стремится к* $p^* > 0$ *равномерно по* y_0, y_1, y_2. *Тогда любое максимально продолженное вправо решение уравнения* (2) *определено в окрестности* $+\infty$ *и либо тождественно равно 0 при достаточно больших* x, *либо имеет асимптотический вид*

$$y(x) = \pm C x^{\frac{3}{1-k}}(1 + o(1)), \qquad x \to +\infty,$$

$$\text{где} \qquad C = \left(\frac{p^*(1-k)^3}{3(k+2)(2k+1)}\right)^{\frac{1}{1-k}}.$$

Теорема (6.9). *Пусть* $n = 3,\ 0 < k < 1,$ *а удовлетворяющая условиям теоремы 6.7 функция* $p(x, y_0, y_1, y_2)$ *при* $x \to -\infty$ *стремится к* p_* *равномерно по* y_0, y_1, y_2.. *Тогда любое максимально продолженное влево решение уравнения* (2) *определено в окрестности* $-\infty$ *и либо тождественно равно 0 при достаточно больших по модулю отрицательных* x, *либо является знакопеременным.*

Во втором случае, если $x_1 > x_2 > \dots$ *— такая стремящаяся к* $-\infty$ *последовательность, что*

$$y(x_i) = 0, \quad y(x) \neq 0 \ \text{ при } \ x \in (x_{i+1}, x_i), \quad i = 1, 2, \dots,$$

а $x_1' > x_2' > \dots$ *— такая стремящаяся к* $-\infty$ *последовательность, что*

$$y'(x_i') = 0, \quad y'(x) \neq 0 \ \text{ при } \ x \in (x_{i+1}', x_i'), \quad i = 1, 2, \dots,$$

то

$$\frac{x_i - x_{i+1}}{x_{i-1} - x_i} \to B, \quad \frac{y(x_{i+1}')}{y(x_i')} \to -B^{\frac{3}{1-k}}, \qquad i \to \infty,$$

для некоторой константы $B > 1$, *зависящей только от* k *и* p_*.

Теорема (6.10). *При* $0 < k < 1$ *и непрерывной положительной функции* $p(x)$ *для любого решения* $y(x)$ *уравнения*

$$y''' = p(x)\ |y|^{k-1} y$$

найдутся точки $a_1 \leqslant a_2$, *в которых*

$$y(a_i) = y'(a_i) = y''(a_i) = 0, \qquad i = 1, 2,$$

и выполняются приведенные ниже условия.

В левой полуокрестности точки a_1 *решение либо тождественно равно 0, либо является знакопеременным и если* $x_1 < x_2 < \dots$ *— такая* *стремящаяся к* $a_1 - 0$ *последовательность, что* $y(x_i) = 0, \quad y(x) \neq 0$ *при* $x \in (x_i, x_{i+1}), \quad i = 1, 2, \ldots,$ *а* $x'_1 < x'_2 < \ldots$ *— такая стремящаяся к* $a_1 - 0$ *последовательность, что* $y'(x'_i) = 0, \quad y'(x) \neq 0$ *при* $x \in (x'_i, x'_{i+1}), \quad i = 1, 2, \ldots,$ *то*

$$\frac{x_i - x_{i-1}}{x_{i+1} - x_i} \to B, \quad \frac{y(x'_i)}{y(x'_{i+1})} \to -B^{\frac{3}{1-k}} \qquad (i \to \infty)$$

для некоторой постоянной $B > 1$*, зависящей только от* k *и* $p(a_1)$*.*

В правой полуокрестности точки a_2 *решение либо тождественно равно 0, либо является знакопостоянным и удовлетворяет асимптотическому соотношению*

$$y(x) = \pm C(x - a_2)^{\frac{3}{1-k}}(1 + o(1)), \qquad x \to a_2 + 0,$$

где C *задается той же формулой, что и в теореме 6.8, но с* $p_* = p(a_2)$*.*

На отрезке $[a_1, a_2]$ *(возможно, вырожденном) решение тождественно равно нулю.*

Основные результаты Главы 7

В главе 7 рассматривается дифференциальное уравнение

$$y''(x) = p(x)|y(x)|^m y(x), \tag{36}$$

где $m > 0,\ x \in \mathbb{R},$ а $p(x)$ — непрерывная комплекснозначная функция.

Получены асимптотические формулы для модуля и аргумента решений и равномерные оценки решений.

При $p(x) \equiv p_0 = \mathrm{const} \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ существует решение $Y(x)$, определенное на $(0, +\infty)$, которое имеет вид

$$|Y(x)| = C_1 x^{-2/m}, \qquad \arg Y(x) = C_2 \ln x$$

с постоянными

$$C_1 = \sqrt[m]{Q\left(\frac{1 + 4/m}{\operatorname{Im} p_0}\right)^2},$$

$$C_2 = -Q\frac{1 + 4/m}{\operatorname{Im} p_0},$$

$$Q = \frac{-\operatorname{Re} p_0 + \sqrt{(\operatorname{Re} p_0)^2 + \dfrac{8(m+2)}{(m+4)^2}(\operatorname{Im} p_0)^2}}{2}.$$

Теорема (7.1). *Пусть* $m > 0$ *и* $p(x) \equiv p_0 = \mathrm{const} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. *Тогда все нетривиальные решения уравнения* (36) *исчерпывающе описываются следующим образом:*

1. *Все непродолжаемые решения, определенные на полуоси* $(-\infty,\ x_0)$ *или* $(x_0, +\infty)$, *которые имеют точный вид:*
$$|y(x)| = |\,Y(|x - x_0|)\,|, \qquad \arg y(x) = \arg Y(|x - x_0|) + \varphi_0$$
с произвольными вещественными x_0 *и* φ_0.

2. *Для любого непродолжаемого решения, определенного на ограниченном интервале* $(x_1,\ x_2)$, *справедливо представление*
$$|y(x)| = |Y(|x - x_k|)|\ (1 + o(1)),$$
$$\arg y(x) = \arg Y(|x - x_k|)\ (1 + o(1))$$
где $x \to x_k$, $k = 1,\ 2$.

Теорема (7.2). *Пусть* $p(x)$ *— непрерывная комплекснозначная функция,* $m > 0$ *и* $p(x_0) = p_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. *Пусть* $y(x)$ *— непродолжаемое решение уравнения* (36), *определенное на* (x_1, x_0) *или* (x_0, x_2) *при* $-\infty \leqslant x_1 < x_0 < x_2 \leqslant +\infty$. *Тогда*
$$|y(x)| = |Y(|x - x_0|)|\ (1 + o(1)),$$
$$\arg y(x) = \arg Y(|x - x_0|)\ (1 + o(1)),$$
при $x \to x_0$.

Теорема (7.3). *Пусть* $p(x)$ *— непрерывная комплекснозначная функция,* $\varepsilon = \pm 1$, $m > 0$, $p(x) \to p_0 \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ *при* $x \to \varepsilon\infty$. *Пусть* $y(x)$ *— решение уравнения* (36), *определенное в окрестности* $\varepsilon\infty$. *Тогда*
$$|y(x)| = |Y(|x|)|\ (1 + o(1)),$$
$$\arg y(x) = \arg Y(|x|)\ (1 + o(1)),$$
при $x \to \varepsilon\infty$.

Теорема (7.4). *Пусть* $\operatorname{Re} p(x) > p_* > 0$. *Тогда для любого решения* $y(x)$ *уравнения* (36), *определенного на* $(x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon)$ *и такого, что* $y(x_0) \neq 0$, *справедлива оценка*
$$\varepsilon^2 < \frac{C}{p_*}|y(x_0)|^{-m},$$
с постоянной $C > 0$, *зависящей только от* m.

Следствие (7.4.1). *Пусть для функции $p(x)$ выполняются условия теоремы 7.4. Тогда для любого решения $y(x)$ уравнения* (36), *определенного на $[a, b]$, выполнено*

$$|y(x)| < \sqrt[m]{\frac{C}{\varepsilon^2 p_*}}$$

для всех $x \in [a+\varepsilon, b-\varepsilon]$.

Следствие (7.4.2). *Пусть для функции $p(x)$ выполняются условия теоремы 7.4. Тогда для любого решения $y(x)$ уравнения* (36), *определенного на $(-\infty,\ x_0)$ или $(x_0, +\infty)$, на всей области определения выполняется неравенство*

$$|y(x)| < |x - x_0|^{-2/m} \sqrt[m]{C/p_*}.$$

Следствие (7.4.3). *Если* $\operatorname{Re} p(x) > q_* x^{-r}$, $q_* > 0$, $r > 0$, *то для любого решения $y(x)$ уравнения* (36), *определенного на $(0, +\infty)$, для всех $x > 0$ выполнено*

$$|y(x)| < x^{(r-2)/m} \sqrt[m]{C/q_*}.$$

Во всех случаях C зависит только от m и совпадает с соответствующей постоянной из теоремы 7.4.

Следствие (7.4.4). *Если функция $p(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 7.4, то единственным решением уравнения* (36), *определенным на $(-\infty, +\infty)$, является тривиальное решение $y(x) \equiv 0$.*

Автор выражает глубокую благодарность своему учителю профессору В.А.Кондратьеву за внимание к работе и полезные рекомендации.

Список основных работ автора по теме диссертации

(из официального перечня ВАК)

[1] *И. В. Асташова.* Об асимптотическом поведении решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений. — УМН. 1985, т. 40, вып. 5 (245), с. 197.

[2] *И. В. Асташова.* Об асимптотическом поведении решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений. — Диф. уравнения. 1986, т. 22, № 12, с. 2185.

[3] *И. В. Асташова.* О качественных свойствах решений уравнений типа Эмдена – Фаулера. — УМН, 1996, т.51, № 5, с. 185.

[4] *И. В. Асташова.* Об одномерном уравнении Шредингера с комплекснозначным потенциалом. — Дифференц. уравнения. 1998, т. 34, N 6, с. 847.

[5] *И. В. Асташова.* О равномерных оценках положительных решений квазилинейных дифференциальных уравнений четного порядка. — Дифференц. уравнения, 2004, т. 40, №11, с.1570.

[6] *И. В. Асташова.* О равномерных оценках положительных решений квазилинейных дифференциальных уравнений. — Дифференц. уравнения, 2005, т. 41, № 11, с.1579–1580.

[7] *И. В. Асташова.* Равномерные оценки положительных решений квазилинейных дифференциальных уравнений четного порядка. — Труды Семинара И. Г. Петровского, 2006, т. 25, с. 21–34. (I.V. Astashova. Uniform estimates for positive solutions to quasy-linear differential equations of even order. — Journal of Mathematical Sciences.

New York. Springer Science+Business Media, 2006, v.135, № 1, p.2616–2624.)

[8] *И. В. Асташова.* Равномерные оценки положительных решений квазилинейных дифференциальных уравнений. — Доклады РАН, 2006, т. 409, № 5, с. 586–590.

[9] *И. В. Асташова.* О равномерных оценках положительных решений квазилинейных дифференциальных уравнений с отрицательным потенциалом. — Дифференц. уравнения, 2006, т. 42, № 6, с. 852.

[10] *И. В. Асташова.* О равномерных оценках решений квазилинейных дифференциальных неравенств. — Дифференц. уравнения, 2006, т. 42, № 6, с.855-856.

[11] *И. В. Асташова.* Равномерные оценки решений квазилинейных дифференциальных неравенств. — Труды семинара им. И. Г. Петровского, 2006, т. 26, с.1–10.

[12] *И. В. Асташова.* О колеблемости решений квазилинейных дифференциальных уравнений. — Дифференц. уравнения, 2007, т. 43, № 6, с. 852.

[13] *И. В. Асташова.* Равномерные оценки положительных решений квазилинейных дифференциальных уравнений высокого порядка. — Труды МИАН им. В. А. Стеклова, 2008, т. 261, с.26–36.

[14] *И. В. Асташова.* Равномерные оценки положительных решений квазилинейных дифференциальных уравнений. — Известия РАН, 2008, т. 72, № 6, с. 103–124.

(прочие)

[15] *И. В. Асташова.* Об асимптотическом поведении решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений. — В сб. Доклады расширенных заседаний семинара ИПМ им. И. Н. Векуа. Тбилиси: ТГУ, 1985, т. 1. № 3, с. 9–11.

[16] *И. В. Асташова.* Об асимптотическом поведении решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений. — Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 6152-85Деп, 16 с.

[17] *И. В. Асташова.* Асимптотическое поведение решений оцного нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка. — Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 7284-В86, 25 с.

[18] *И. В. Асташова.* Об асимптотическом поведении знакопеременных решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений третьего и четвертого порядка. — В сб.: Доклады расширенных заседаний семинара ИПМ имени И. Н. Векуа. Тбилиси. ТГУ, 1988, т. 3, № 3, с. 9–12.

[19] *И. В. Асташова.* О некоторых свойствах знакопеременных решений одного нелинейного дифференциального уравнения. — В сб.: Доклады расширенных заседаний семинара ИПМ имени И.Н. Векуа. Тбилиси. ТГУ, 1990, т. 5, № 3, с. 17–20.

[20] *И. В. Асташова.* Об асимптотическом поведении знакопостоянных решений одного нелинейного дифференциального уравнения. — 1990. ЦНТИ «Информсвязь». Деп. ВИНИТИ № 10, 12 с.

[21] *И. В. Асташова.* О существовании решения с заданной областью определения одного уравнения третьего порядка. — В сб.: Доклады расширенных заседаний семинара ИПМ имени И.Н. Векуа. Тбилиси. ТГУ, 1992, т. 7, № 3, с. 16–19.

[22] *I. V. Astashova.* On asymptotic properties of one-dimentional Shrodinger equation. — Operator Theory: Advances and Applications, 2000, v. 114, Birkhäuser Verlag Basel/Switzerland, p. 15–19.

[23] *I. V. Astashova.* On asymptotic Behaviour of One-dimentional Shrödinger Equation with Complex Coefficients. — J. of Natural Geometry. Jnan Bhawan. London, 2001, v. 19. p. 39–52.

[24] *Асташова И.В., Кондратьев В.А., Муравей Л.А., Филиновский А.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. — Москва, МАТИ, 2001, 147 с.(монография)

[25] *I. V. Astashova, A. V. Filinovskii, V. A. Kondratiev, L. A. Muravei.* Some Problems in the Qualitative Theory of Differential Equations. — Journal of Natural Geometry. Jnan Bhawan. London, 2003, v. 23, № 1–2, p. 1–126.(монография)

[26] *I. V. Astashova.* Estimates of Solutions to One-dimensional Schrödinger Equation. — World Scientific: Progress in Analysis. Proceedings of the 3rd International ISAAC Congress. Singapore, 2003, v. II, p. 955–960.

[27] *И. В. Асташова.* Применение динамических систем к исследованию асимптотических свойств решений нелинейных дифференциальных уравнений высоких порядков. — Современная математика и ее приложения, 2003, т.8, с.3–33. (Application of Dynamical Systems to the Study of Asymptotic Properties of Solutions to Nonlinear Higher-Order Differential Equations. — Journal of Mathematical Sciences. Springer Science+Business Media, 2005, v.126, № 5, p.1361–1391.)

[28] *И. В. Асташова.* О равномерных оценках положительных решений нелинейных дифференциальных уравнений. — Современная математика и ее приложения, 2005, Современная математика и ее приложения, 2005, т. 36, ч. 2, с. 3-7 (I.V. Astashova. On uniform estimates for positive solutions of nonlinear differential equations. — Journal of Mathematical Sciences. New York. Springer Science+Business Media, 2007, v.145, № 5, p.5149-5154.)

[29] *И. В. Асташова.* Об асимптотическом поведении решений уравнения типа Эмдена – Фаулера с комплексным коэффициентом. — Современная математика и ее приложения, 2005. Т.29, с.14–18. (I.V. Astashova. On the asymptotic behaviour of solutions of an equation of the Emden–Fowler type with a Complex Coefficient — Journal of Mathematical Sciences. New York. Springer Science+Business Media, 2007, v.142, № 3, p. 2033-2037.)

[30] *И. В. Асташова.* О равномерных оценках решений квазилинейных дифференциальных уравнений. — Фундаментальная и прикладная математика, 2006, т. 12, № 5, с.3-9.

[31] *I. V. Astashova.* On Existence of Non-oscillatory Solutions to Quasilinear Differential Equations. — Georgian Mathematical Journal, 2007, v. 14, № 2, p. 223-238.

[32] *И. В. Асташова.* Асимптотическая классификация решений уравнений типа Эмдена-Фаулера четвертого порядка. — Неклассические уравнения математической физики. Труды международной конференции «Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения», посвященной 100-летию со дня рождения академика И. Н. Векуа, Новосибирск, изд. института Математики, 2007, с. 41–55.