МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО–МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи
УДК 519.718.7

Бородина Юлия Владиславовна

СИНТЕЗ ЛЕГКОТЕСТИРУЕМЫХ СХЕМ ПРИ КОНСТАНТНЫХ НЕИСПРАВНОСТЯХ НА ВЫХОДАХ ЭЛЕМЕНТОВ

Специальность 01.01.09 — Дискретная математика и
математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2008

Работа выполнена на кафедре дискретной математики механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Николай Петрович Редькин
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Михаил Юрьевич Мошков кандидат физико-математических наук, доцент Дмитрий Сергеевич Романов
Ведущая организация:	Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

Защита диссертации состоится 23 мая 2008 г. в 16 часов 40 минут на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при МГУ по адресу: 119991, Российская Федерация, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова (Главное здание, 14-й этаж).

Автореферат разослан 23 апреля 2008 года.

Ученый секретарь
диссертационого совета
Д 501.001.84 при МГУ,
доктор физ.-матем. наук,
профессор А.О. Иванов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

Данная работа является исследованием в области математической теории контроля исправности и диагностики неисправностей управляющих систем.

Пусть S — некоторая схема из функциональных элементов с одним выходом, реализующая булеву функцию $f(\tilde{x})$, $\tilde{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Элементы схемы S могут приходить в неисправное состояние, в результате чего схема может реализовывать функцию, отличную от функции f.

Для обеспечения надежного функционирования схемы S необходимо решать задачу контроля исправности ее элементов. Для решения этой задачи С.В. Яблонским[1] предложены (в случае контроля исправности элементов общих управляющих систем) логические методы контроля, суть которых состоит в том, что на входы схемы S подаются некоторые специальным образом подобранные "проверяющие" наборы значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и на основе выходных значений схемы делается заключение об ее исправности и характере неисправностей (при их наличии).

Функция, реализуемая на выходе схемы при наличии в схеме неисправных элементов, называется *функцией неисправности*. Всякое множество T входных наборов схемы S называется *полным проверяющим тестом* для этой схемы, если для любой функции неисправности $g(\tilde{x})$, не равной тождественно $f(\tilde{x})$, в T найдется хотя бы один набор $\tilde{\sigma}$ такой, что $f(\tilde{\sigma}) \neq g(\tilde{\sigma})$[2]. Число наборов, составляющих тест, называется *длиной* теста. В качестве тривиального теста всегда можно взять тест, содержащий все 2^n наборов значений переменных булевой функции от n переменных.

Но прежде всего интересна задача построения минимальных тестов, т.е. тестов, содержащих минимальное число наборов. В простейшем случае решение задачи сводится к перебору, что затруднительно при росте n. Кроме того, длина минимального теста может существенно зависеть и от вида схемы, реализующей заданную функцию.

Пусть $D(T)$ — длина теста T; $D(S) = \min D(T)$, где минимум берется по всем полным проверяющим тестам T для схемы S; $D(f, B) = \min D(S)$, где минимум берется по всем схемам S в данном базисе B,

---

[1] Чегис И.А., Яблонский С.В. Логические способы контроля работы электрических схем // Труды МИАН. — 1958. — Т.51.— С.270–360.

[2] Яблонский С.В. Некоторые вопросы надежности и контроля управляющих систем // Математические вопросы кибернетики. — 1988. — № 1. — С.5–25.

реализующим функцию f;

$$D(n, B) = \max D(f, B),$$

где максимум берется по всем булевым функциям f от n переменных. Функция $D(n, B)$ называется *функцией Шеннона* длины полного проверяющего теста для базиса B.

Кроме проверяющих тестов, рассматриваются еще так называемые диагностические тесты. Множество T входных наборов схемы S называется *полным диагностическим тестом* для этой схемы, если T является полным проверяющим тестом для S и для любых двух различных функций неисправности $g_1(\tilde{x})$ и $g_2(\tilde{x})$ в T найдется набор $\tilde{\sigma}$ такой, что $g_1(\tilde{\sigma}) \neq g_2(\tilde{\sigma})$. Для длин полных диагностических тестов также определяется функция Шеннона $D(n, B)$ в заданном базисе B.

В настоящее время задачи логического контроля исправности схем из функциональных элементов часто формулируются так: оценить сверху и снизу (в идеале — найти точные значения) величин $D(f, B)$ и $D(n, B)$ для различных базисов B. Представляют интерес также оценки "промежуточных" величин $D(K, B) = \max\{D(f, B) : f \in K\}$, где K — некоторый выделенный класс булевых функций от n переменных.

Для упрощения решения этих задач существуют следующие пути: ограничение типов возможных неисправностей и их количества; выбор схем определенного типа; выбор класса K булевых функций; синтез легкотестируемых схем.

В настоящее время выделяются три основных типа неисправностей: константные, однотипные константные и инверсные. Неисправности каждого из указанных типов могут предполагаться либо на входах, либо на выходах элементов схемы. *Константная неисправность типа* α (где α равно 0 или 1) на входе (выходе) элемента означает, что на этот вход подается константа α (соответственно, значение на выходе этого элемента всегда равно α). В общем случае значение α может быть своим у каждого неисправного элемента. В случае *однотипных константных неисправностей* значение α предполагается одним и тем же у всех неисправных элементов. *Инверсная неисправность* на входе элемента означает, что подаваемое на этот неисправный вход значение противоположно значению, подаваемому на исправный вход; инверсная неисправность на выходе означает, что значение на выходе неисправного элемента противоположно значению на выходе исправного элемента.

Число неисправных элементов в схеме может предполагаться или любым, или не превосходящим N. В последнем случае обычно полагают $N = 1$, говоря о *единичных неисправностях* данного типа и, соответственно, о длине *единичного проверяющего теста* или длине *единичного диагностического теста*.

При синтезе легкотестируемых схем главной целью является построение схемы (со сколь угодно большой сложностью, без каких-либо ограничений на порядок ветвления выходов и т.д.) с минимально возможной длиной проверяющего теста.

Основоположник математической теории тестов С.В. Яблонский и ряд его учеников и последователей в основном разрабатывали логические методы контроля контактных схем. В дальнейшем существенное внимание стало уделяться схемам из функциональных элементов, однако соответствующая теория для схем из функциональных элементов все еще далека от завершенности. Ряд важных результатов в оценивании длин тестов для схем из функциональных элементов при различных типах неисправностей получен в работах S. Reddy, В.Н. Носкова, Н.П. Редькина, С.В. Коваценко, В.Г. Хахулина.

Для единичных константных неисправностей на выходах элементов S. Reddy[3] доказал, что для базиса Жегалкина $B_1 = \{\&, \oplus, 1\}$. при любом натуральном n функция Шеннона $D(n, B_1)$ длины единичного проверяющего теста в случае константных неисправностей на выходах элементов удовлетворяет неравенству $D(n, B_1) \leqslant n + 3$.

В третьей главе настоящей работы оценка Reddy уточнена в случае единичных однотипных константных неисправностей на выходах элементов.

Для произвольного полного конечного базиса B в случае константных неисправностей на выходах элементов Н.П. Редькин[4,5] получил оценку $D(n, B) \leqslant 2(2^{[n/2]} + 2^{]n/2[} + n)$ функции Шеннона длины полного проверяющего теста. Им же получены[6] асимптотические оценки функции Шеннона длины полного проверяющего теста в случае константных неисправностей на входах элементов схем в стандартном базисе $B_0 = \{\&, \vee, ^-\}$. В.Г. Хахулин[7] оценивал длины пол-

[3] Reddy S.M. Easily testable realization for logic functions // IEEE Trans. Comput. — 1972. — v.21. — N1. — P. 124–141.

[4] Редькин Н.П. О полных проверяющих тестах для схем из функциональных элементов // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 1986. — N 1. — С. 72–74.

[5] Редькин Н.П. О полных проверяющих тестах для схем из функциональных элементов // Математические вопросы кибернетики. — Вып. 2. — 1989. — С. 198–222.

[6] Редькин Н.П. О проверяющих тестах для схем при константных неисправностях на входах элементов // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 1997. — №1. — С. 12–18.

[7] Хахулин В.Г. О проверяющих тестах для счетчика четности // Дискретная математика. — 1995. — Т.7, вып. 4. — С. 51–59.

ных проверяющих тестов в случае константных неисправностей на входах элементов для реализаций функции счетчика четности в произвольном базисе.

В случае однотипных константных неисправностей верхние оценки функций Шеннона найдены Н.П. Редькиным[8]: при любом натуральном n функция Шеннона $D(n, B_0)$ длины полного проверяющего теста в случае однотипных константных неисправностей на выходах элементов удовлетворяет неравенству $D(n, B_0) \leqslant n$.

В первой главе настоящей работы эта оценка Н.П. Редькина уточнена, и найдено точное значение $D(n, B_0) = 2$, $n = 2, 3, \ldots$.

Кроме того, для стандартного базиса B_0 Н.П. Редькиным получены оценки длин тестов в случае же однотипных константных неисправностей на входах элементов[9], а также длин единичных диагностических тестов в случае однотипных константных неисправностей на входах или на выходах элементов[10,11].

Для инверсных неисправностей на выходах элементов оценки функций Шеннона длин различных тестов получены Н.П. Редькиным[12,13] и С.В. Ковaценко[14].

В серии работ В.Н. Носкова[15] предложены несколько иные методы логического контроля схем из функциональных элементов (и более общих логических устройств).

Цель работы

[8]Редькин Н.П. О схемах, допускающих короткие тесты // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 1988. — N 2. — С. 17–21.

[9]Редькин Н.П. О проверяющих тестах для схем при однотипных константных неисправностях на входах элементов // Известия вузов. Математика. — 1988. — №7. — С. 57–64.

[10]Редькин Н.П.О схемах, допускающих короткие единичные диагностические тесты // Дискретная математика. — 1989. — Т.1, вып. 3. — С. 71–76.

[11]Редькин Н.П. О единичных диагностических тестах для однотипных константных неисправностей на выходах функциональных элементов // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 1992. — N 5. — С. 43–46.

[12]Редькин Н.П. О единичных проверяющих тестах схем при инверсных неисправностях элементов // XII Международная конференция по проблемам теоретической кибернетики (Нижний Новгород, 1999). Тезисы докладов. — М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 1999.— С. 196.

[13]Редькин Н.П. Единичные проверяющие тесты для схем при инверсных неисправностях элементов // Математические вопросы кибернетики. — 2003.— Вып.12. — С. 217–230.

[14]Ковaценко С.В. Синтез легкотестируемых схем в базисе Жегалкина для инверсных неисправностей // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. — 2000.— №2. — С.45-47.

[15]см., напр. Носков В.Н. Метод синтеза удобных для контроля комбинационных схем // Дискретная математика. — 1993. — Т.5, вып. 4. — С. 3–23.

Целью настоящей работы является синтез легкотестируемых схем из функциональных элементов в различных базисах при однотипных константных неисправностях на выходах элементов и получение оценок длины тестов для рассматриваемых схем.

Научная новизна работы

Все результаты работы являются новыми. В диссертации получены следующие основные результаты.

1. Конструктивно установлено точное значение функции Шеннона длины полного проверяющего теста для схем из функциональных элементов в базисе $\{\&, \vee, ^-\}$ в случае однотипных константных неисправностей на выходах элементов.

2. Для однотипных константных неисправностях на выходах элементов разработаны методы синтеза легкотестируемых схем в базисе $\{\&, \vee, ^-\}$ для систем булевых функций из различных классов, получены соответствующие этим методам новые оценки длин полных проверяющих тестов, свидетельствующие об оптимальности предлагаемых методов синтеза в ряде важных случаев.

3. Для базиса Жегалкина в случае неисправностей типа "1" конструктивно найдено точное значение функции Шеннона длины единичного проверяющего теста.

4. Для базиса Жегалкина в случае неисправностей типа "0" разработан способ реализации произвольных булевых функций схемами, допускающими единичные проверяющие тесты длины 2.

Методы исследования

В диссертации используются методы дискретной математики и математической кибернетики, теории управляющих систем, математической теории диагностики управляющих систем.

Теоретическая и практическая ценность

Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение в теории диагностики управляющих систем. Представленные в диссертации методы синтеза могут быть использованы при практическом синтезе легкотестируемых схем.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на семинаре "Диагностика управляющих систем" под руководством профессора Н.П. Редькина

(2004–2008 гг.), на семинаре "Синтез и сложность управляющих систем" под руководством академика РАН О.Б. Лупанова (апрель 2006г.), профессора О.М. Касим-Заде (февраль–март 2008г.), на семинаре "Математические вопросы кибернетики" под руководством профессора О.М. Касим-Заде (ноябрь 2007г., апрель 2008г.), на VIII Международном семинаре "Дискретная математика и ее приложения" (Москва, февраль 2004г.), на IX Международном семинаре "Дискретная математика и ее приложения", посвященном 75-летию со дня рождения академика О.Б. Лупанова (Москва, июнь 2007г.), на Российской конференции "Математика в современном мире", посвященной 50-летию Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (Новосибирск, сентябрь 2007г.), на XXVIII Конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ (апрель 2006г.), на научной конференции "Ломоносовские чтения" (апрель 2006г., апрель 2007г., апрель 2008г.).

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в 5 работах автора, список которых приведен в конце автореферата [1–5].

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы из 35 наименований. Общий объем диссертации — 74 страницы, в работе содержится 8 рисунков.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** содержится обзор результатов, связанных с темой диссертации, приводится постановка задачи, дается краткое изложение основных результатов диссертации.

В **главе I** доказываются теоремы о реализации произвольных булевых функций, а также булевых функций из различных классов, схемами из функциональных элементов в базисе $\{\&, \vee, ^-\}$, допускающими полные проверяющие тесты длины 1 или 2 в случае однотипных константных неисправностей на выходах элементов. Во всех этих теоремах построение схемы проводится конструктивно, а тест зависит от рассматриваемой функции.

В § 1 главы I выделяются классы булевых функций, которые реализуются схемами, допускающими полный проверяющий тест длины 1 при неисправностях типа "1" на выходах элементов.

Теорема 1.1. *Пусть для функции f от n переменных найдутся такой нулевой набор $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ с максимальным числом единиц и такая тупиковая дизъюнктивная нормальная форма F, что если для какого-то $j \in \{1, \ldots, n\}$ значение $\sigma_j = 0$, то соответству-*

ющая переменная x_j входит в F без отрицания. Тогда функцию f можно реализовать схемой из функциональных элементов, допускающей полный проверяющий тест длины 1.

Назовем функцию $f(\tilde{x})$, где $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, монотонной (антимонотонной) по переменной x_i, если для любых двух соседних по i-ой переменной наборов $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)$ и $\tilde{\alpha}' = (\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)$ выполняется неравенство $f(\tilde{\alpha}) \leqslant f(\tilde{\alpha}')$ (соответственно, $f(\tilde{\alpha}) \geqslant f(\tilde{\alpha}')$).

Теорема 1.2. *Любую булеву функцию, монотонную или антимонотонную по каждой переменной, можно реализовать схемой из функциональных элементов, допускающей полный проверяющий тест длины* 1.

Следствие 1.1 *Любую монотонную булеву функцию, отличную от константы, можно реализовать схемой из функциональных элементов в базисе* $\{\&, \vee\}$, *допускающей полный проверяющий тест длины* 1.

Теорема 1.3. *Любую булеву функцию, отличную от константы и монотонную или антимонотонную по каждой переменной, кроме одной, можно реализовать схемой из функциональных элементов, допускающей полный проверяющий тест длины* 1.

В § 2 главы I установлено точное значение функции Шеннона длины полного проверяющего теста для схем из функциональных элементов в указанном базисе в случае константных неисправностей типа "1" на выходах элементов.

Теорема 1.4. *Любую булеву функцию от n переменных можно реализовать схемой, допускающей полный проверяющий тест, длина которого не превосходит* 2.

Этот результат уточняет сформулированную выше теорему Н.П. Редькина.

Теорема 1.5. *Для любого $n \geqslant 2$ выполняется равенство*

$$D(n, \{\&, \vee, ^{-}\}) = 2.$$

Верхняя оценка для этой теоремы следует из теоремы 1.4; требуемая нижняя оценка $D(n, \{\&, \vee, ^{-}\}) \geqslant 2$ достигается для функции $x_1 \& x_2 \vee \overline{x}_1 \& \overline{x}_2$.

В § 3 главы I аналогичные теоремам 1.1–1.5 результаты устанавливаются для случая константных неисправностей типа "0" на выходах элементов.

В **главе II** доказываются теоремы о реализации систем из m булевых функций от n одинаковых переменных, принадлежащих некоторому выбранному классу, схемами из функциональных элементов в базисе $\{\&, \vee, ^{-}\}$, для которых оценки длин полных проверяющих тестов в случае неисправностей типа "1" на выходах элементов так или иначе уточняют оценку $2m$, следующую непосредственно из теоремы 1.4.

В § 1 главы II для систем из произвольных булевых функций доказана

Теорема 2.1. *Любую систему $\mathcal{F}_{n,m}$ из m булевых функций, отличных от констант, можно реализовать схемой из функциональных элементов, допускающей полный проверяющий тест длины не более $1 + q$, где $q \leqslant m$ — число функций из $\mathcal{F}_{n,m}$, сохраняющих единицу (т.е. равных 1 на наборе $(1, \ldots, 1)$).*

Значение $1+q$ в этой оценке длины теста в общем случае нельзя заменить ни на какое число, меньшее q.

Следствие 2.1. *Любую систему $\mathcal{F}_{n,m}$ из m монотонных булевых функций, отличных от констант, можно реализовать схемой из функциональных элементов, допускающей полный проверяющий тест длины 2.*

Следствие 2.2. *Пусть $\mathcal{F}_{n,m}$ — система из m булевых функций, отличных от констант, каждая из которых монотонна по каждой из l переменных $x_1, x_2, \ldots, x_l$ и антимонотонна по каждой из k переменных $x_{l+1}, \ldots, x_{l+k}$. Тогда систему $\mathcal{F}_{n,m}$ можно реализовать схемой из функциональных элементов, допускающей полный проверяющий тест, длина которого не превосходит $1 + 2^{n-k-l}$.*

В § 2 главы II системы монотонных булевых функций реализуются легкотестируемыми схемами в монотонном базисе $\{\&, \vee\}$.

Теорема 2.2. *Любую систему $\mathcal{F}_{n,m}$ из m монотонных булевых функций, отличных от констант, можно реализовать схемой из функциональных элементов в базисе $\{\&, \vee\}$, допускающей полный проверяющий тест длины, не превосходящей $\min\{m, n\}$.*

В § 3 главы II рассматриваются системы булевых функций из некоторых специальных классов. Для таких систем предложен метод синтеза схем с определенными ограничениями на количество и расположение инверторов, допускающих полный проверяющий тест, длина которого не превосходит $\min\{m, l\}$ (теоремы 2.3 и 2.4).

В ряде случаев этот метод позволяет уточнить оценку длины теста в следствии 2.2.

В **главе III** доказываются теоремы о реализации произвольных булевых функций схемами из функциональных элементов в базисе Жегалкина $\{\&, \oplus, 1\}$, допускающими единичные проверяющие тесты длины 1 или 2 в случае однотипных константных неисправностей на выходах элементов. Во всех этих теоремах явно указывается способ построения схемы, а тест зависит от рассматриваемой функции.

В случае неисправностей типа "1" справедлива

Теорема 3.1. *Любую булеву функцию можно реализовать неизбыточной схемой из функциональных элементов в базисе* $\{\&, \oplus, 1, 0\}$, *допускающей единичный проверяющий тест длины* 1.

В случае неисправностей типа "0" справедлива

Теорема 3.2. *Любую булеву функцию можно реализовать неизбыточной схемой из функциональных элементов в базисе* $\{\&, \oplus, 1, 0\}$, *допускающей единичный проверяющий тест, длина которого не превосходит* 2.

Эти результаты уточняют приведенную выше теорему S. Reddy в случае однотипных константных неисправностей.

Автор глубоко благодарен своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Николаю Петровичу Редькину за постановку задач, ценные идеи и постоянное внимание к работе, профессору Л.А. Шоломову за ценные замечания, а также всем сотрудникам кафедры дискретной математики механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова и отдела теоретической кибернетики Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН за поддержку и доброжелательное отношение.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Бородина Ю.В. Синтез легкотестируемых схем в базисе $\{\&, \vee, ^-\}$ при однотипных константных неисправностях на выходах элементов // Дискретная математика. — 2005. — Т. 17, вып. 1. — С. 129–140.

2. Бородина Ю.В. Синтез легкотестируемых схем в базисе $\{\&, \vee, ^-\}$ для систем функций из некоторых классов // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 2007. — №4. — С. 68–72.

3. Бородина Ю.В. О синтезе легкотестируемых схем в случае однотипных константных неисправностей на выходах элементов // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. — 2008.— №1. — С. 40–44.

4. Бородина Ю.В. Синтез легкотестируемых схем в базисе $\{\&, \vee, ^-\}$

при однотипных константных неисправностях на выходах элементов // Материалы VIII Международного семинара "Дискретная математика и ее приложения"(Москва, 2004г.) — М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2004г.— С. 56–58.

5. Бородина Ю.В. О синтезе легкотестируемых схем в случае однотипных константных неисправностей на выходах элементов // Материалы IX Международного семинара "Дискретная математика и ее приложения", посвященного 75-летию со дня рождения академика О.Б. Лупанова (Москва, 2007г.) — М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2007г.— С. 64–65.