Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 512.745.2

Жгун Владимир Сергеевич

Геометрия действий торов на многообразиях флагов

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2008

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	кандидат физико-математических наук, доцент Аржанцев Иван Владимирович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Попов Владимир Леонидович
	кандидат физико-математических наук, доцент Панов Тарас Евгеньевич
Ведущая организация:	Научно-исследовательский институт системных исследований РАН, г. Москва РАН

Защита диссертации состоится 23 мая 2008 г. в 16 ч. 40 м. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж)

Автореферат разослан 23 апреля 2008 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор

А.О. Иванов

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Диссертация посвящена изучению действий подторов полупростой группы G на многообразиях флагов.

Введем необходимые обозначения, а также напомним основные определения. Пусть G — связная полупростая алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики, T — максимальный тор в G, а B — содержащая его борелевская подгруппа. Рассмотрим действие T на G/B левыми сдвигами. Иными словами, элемент тора $t \in T$ переводит смежный класс gB в tgB.

Пусть χ — некоторый вес тора T, строго доминантный относительно борелевской подгруппы B. Хорошо известно, что G/B вкладывается G-эквивариантно в проективизацию $\mathbb{P}(V(\chi))$ неприводимого модуля $V(\chi)$ старшего веса χ как проективизация орбиты старшего вектора. Обозначим через L_χ ограничение на G/B пучка $\mathcal{O}(1)$ на $\mathbb{P}(V(\chi))$, снабженного G-линеаризацией. Так реализуются все обильные G-линеаризованные линейные расслоения на G/B (Это утверждение содержится, например, в работе В.Л.Попова[1]).

Также можно рассматривать параболические подгруппы $P \subset G$, содержащие фиксированную борелевскую подгруппу B. Известно, что такая подгруппа P является стабилизатором прямой, натянутой на старший вектор неприводимого представления $V(\chi)$, для некоторого доминантного веса χ. Группа, порожденная такими весами χ, отождествляется с группой характеров $\Xi(P)$ параболической подгруппы P. Аналогичным образом, обозначим через L_χ ограничение на G/P пучка $\mathcal{O}(1)$ на $\mathbb{P}(V(\chi))$, снабженного G-линеаризацией. Хорошо известно, что так могут быть реализованы все обильные G-линеаризованные линейные расслоения на G/P (см. например[1]).

Зафиксировав обильное G-линеаризованное линейное расслоение на многообразии $X = G/P$, согласно Д.Мамфорду[2] можно определить открытое по Зарисскому подмножество $X^{ss}_{L_\chi}$ флагового многообразия $X = G/P$, для которого существует категорный фактор $X^{ss}_{L_\chi}/\!\!/T$ для действия T. Этот фактор мы назовем фактором Мамфорда.

Для удобства читателя напомним определение множеств стабильных и

[1]В.Л.Попов, *Группы Пикара однородных пространств линейных алгебраических групп и одномерные однородные векторные расслоения.* Изв. АН СССР. Сер. матем. **38:2**, (1974), 292–322.

[2]Ж.Дьедонне, Дж.Керрол, Д.Мамфорд, *Геометрическая теория инвариантов.* Москва, Мир, 1965.

полустабильных точек.

Определение. Пусть X — алгебраическое многообразие с действием редуктивной группы H, L — обратимый обильный H-линеаризованный пучок на X. Через $\Gamma(X, L)$ обозначим пространство глобальных сечений L на X.

(i) Множеством полустабильных точек называется

$$X_L^{ss} = \{x \in X : \exists n > 0, \exists \sigma \in \Gamma(X, L^{\otimes n})^H : \ \sigma(x) \neq 0\}.$$

(ii) Множеством стабильных точек называется

$$X_L^s = \{x \in X_L^{ss} : \text{орбита } Hx \text{ замкнута в } X_L^{ss} \text{ и стабилизатор } H_x \text{ конечен}\}.$$

Еще раз повторимся, что для множества X_L^s существует геометрический фактор X_L^s/H, а для X_L^{ss} — соответственно категорный фактор $X_L^{ss}/\!\!/H$.

Мы будем изучать ситуацию, когда $H = T$, $X = G/P$, а в качестве пучка L берется пучок $i^*\mathcal{O}(1)$, где $i : G/P \subset \mathbb{P}(V(\pi_\alpha))$ — естественное вложение.

Сделаем краткий обзор результатов, которые были получены ранее другими авторами в связи с изучением торических орбит на многообразиях флагов.

Упомянем некоторые работы, в которых изучались замыкания орбит действия максимального тора T на флаговых многообразиях. Дабровски [3] была доказана нормальность замыканий типичных T-орбит на G/P. Нормальность замыканий необщих T-орбит на G/P была изучена Каррелом и Куртом[4]. Точнее ими были построены примеры ненормальных замыканий T-орбит, а также описаны замыкания T-орбит для простых групп G малого ранга. Когомологии замыканий общих T-орбит изучались Клячко[5]. Пусть $x \in G/B$ — точка общего положения. Тогда вложение $\overline{Tx} \subset G/B$ индуцирует на когомологиях рассматриваемых многообразий естественный гомоморфизм ограничения $H^*(G/B, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^*(\overline{Tx}, \mathbb{Z})$. Этот гомоморфизм был описан в работе [5].

Следующая серия работ посвящена изучению множества полустабильных точек, а также факторов $X_{L_\chi}^{ss}/\!\!/T$. Сентамараи Каннан[6] интересовался вопросом, для каких групп G и их параболических подгрупп P возможно равенство $(G/P)_L^{ss} = (G/P)_L^s$ для некоторого обильного пучка L. Им было

[3] R.Dabrowski, *On normality of the closure of a generic torus orbit in G/P*. Pacific Journal of Mathematics **172:2**, (1996), 321–330.

[4] J.B.Carrell, A.Kurth, *Normality of torus orbit closures in G/P*. J. Algebra **233**, (2000), 122–134.

[5] A.A Клячко, *Торические многообразия и пространства флагов.* Тр. Мат. ин-та РАН **208**, (1995), 139–162.

[6] S.Senthamarai Kannan, *Torus quotients of homogeneous spaces - II.* Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.) **109:1**, (1999), 23–39.

показано, что в случае, когда группа G не содержит компонент типа A_n, это равенство возможно только в случае, когда P — борелевская подгрупа в G. В случае SL_n им были получены необходимые и достаточные условия для выполнения последнего равенства. Отметим, что в приложении к работе[6] приведены более простые доказательства основных теорем этой работы, принадлежащие Де-Кончини. Кольца рациональных когомологий факторов $X^{ss}_{L_\chi}/\!\!/T$ были посчитаны в работах Голдин и Маре[7,8] с помощью методов симплектической геометрии.

Хорошо известно, что имеет место вложение $\mathrm{Pic}(X^{ss}_{L_\chi}/\!\!/T) \hookrightarrow \mathrm{Pic}_T(X^{ss}_{L_\chi})$, где $\mathrm{Pic}_T(X^{ss}_{L_\chi})$ обозначает группу T-линеаризованных расслоений на $X^{ss}_{L_\chi}$. Заметим, что вопрос вычисления $\mathrm{Pic}(X^{ss}_{L_\chi}/\!\!/T)$ как подгруппы в $\mathrm{Pic}_T(X^{ss}_{L_\chi})$ достаточно сложен. Совсем недавно Ш.Кумаром[9] было выяснено при каких целых k расслоение $kL_\chi \in \mathrm{Pic}_T(X^{ss}_{L_\chi})$ принадлежит подгруппе $\mathrm{Pic}(X^{ss}_{L_\chi}/\!\!/T)$. Стоит отметить, что из наших результатов, опубликованных раньше работы[9], следует, что $kL_\chi \in \mathrm{Pic}(X^{ss}_{L_\chi}/\!\!/T)$ для некоторого достаточно большого k.

Представляет интерес гипотеза В.В.Батырева, которая утверждает наличие связи между универсальными торсерами над поверхностями дель-Пеццо и аффинными конусами над многообразиями флагов, вложенными в микровесовые представления.

Хорошо известно[10], что поверхности дель-Пеццо степени $d < 6$ можно сопоставить систему корней ранга $9 - d$ из следующего списка: A_4, D_5, E_6, E_7, E_8. Каждой такой поверхности соответствует простая группа G. У группы G, в свою очередь, есть квазимикровесовое представление $V(\pi_\alpha)$ (а именно представление, на ненулевых весах которого группа Вейля действует транзитивно) со старшим весом π_α, соответствующим отметке 1 на концевой вершине диаграммы Дынкина. Отметим, что в случае E_8 рассматриваемое представление $V(\pi_\alpha)$ является присоединенным, а в остальных случаях — микровесовым (то есть таким представлением, что на его весах группа Вейля действует транзитивно). В проективизации этого представления существует единственная замкнутая орбита — многообразие флагов G/P. Батыревым было замечено, что классы (-1)-кривых в группе Пикара поверхностей дель-Пеццо взаимно однозначно соответствуют весам

[7] R.F.Goldin, *The cohomology ring of weight varieties and polygon spaces.* Advances in Mathematics **160:2**, (2001), 175–204.

[8] R.F.Goldin, A.L.Mare, *Cohomology of symplectic reductions of generic coadjoint orbits.* Proc. Amer. Math. Soc. **132:10**, (2004), 3069–3074.

[9] S.Kumar, *Descent of line bundles to GIT quotients of flag varieties by maximal torus.* arXiv:math/0702556.

[10] Ю.Манин, *Кубические формы: алгебра, геометрия, арифметика.* Москва, Наука, 1972.

микровесовых представлений, указанных выше. Это наблюдение побудило многих авторов к попыткам прояснить данную связь.

Укажем, какие результаты были получены другими авторами в этом направлении.

Случай поверхности дель-Пеццо степени 5 был разобран А.Н.Скоробогатовым[11]. Рассмотрим грассманиан двумерных подпространств в пятимерном векторном пространстве, который иначе может быть представлен как SL_5/P для соответствующей параболической подгруппы P. В цитируемой работе было показано, что фактор Мамфорда $T\backslash(SL_5/P)^{ss}$ грассманиана SL_5/P по максимальному тору $T \subset SL_5$ изоморфен поверхности дель-Пеццо степени 5. Отметим, что последняя поверхность является плоскостью с раздутыми 4 точками в общем положении, и с точностью до бирегулярного автоморфизма существует только одна такая поверхность.

Полные координатные кольца поверхностей дель-Пеццо были вычислены В.В.Батыревым и О.Н.Поповым[12]. Также посредством этих вычислений им удалось выяснить связь между поверхностями дель-Пеццо и соответствующими микровесовыми представлениями. Геометрическое описание этой связи появилось в работе А.Н.Скоробогатова и В.В.Сергановой [13] для поверхностей дель-Пеццо степени больше 1.

Цель работы

• исследовать множества $X^{ss}_{L_\chi}$ полустабильных точек для действия максимального тора на многообразии полных флагов G/B в зависимости от G-линеаризованного пучка L_χ, дать явное описание интересующих нас множеств;
• вычислить группу Пикара многообразий $X^{ss}_{L_\chi}/\!\!/T$;
• построить вложения универсальных торсеров над поверхностями дель-Пеццо в аффинные конусы над многообразиями флагов, такие что их сечения весовыми гиперлоскостями связаны с (-1)-кривыми на поверхностях дель-Пеццо.

[11] A.N.Skorobogatov, *On a theorem of Enriques–Swinnerton-Dyer.* Ann. Fac. Sci. Toulouse 2, (1993), 429—440.

[12] V.V.Batyrev, O.N. Popov, *The Cox ring of a del Pezzo surface. In: Arithmetic of higher-dimensional algebraic varieties.* (Palo Alto, 2002), Progr. Math. **226** Birkhäuser, (2004), 85–103.

[13] A.N.Skorobogatov, V.V.Serganova, *Del Pezzo surfaces and representation theory.* to appear in J. Algebra and Number Theory arXiv:math/0611737.

Научная новизна

1. Для действия максимального тора T на многообразии полных флагов G/B изучен вопрос о вариации фактора Мамфорда в зависимости от T-линеаризованного пучка L_χ. С помощью критерия численной стабильности, принадлежащего Сешадри, получена формула, описывающая множество полустабильных точек относительно расслоения L_χ как пересечение клеток Брюа, сдвинутых на некоторые элементы группы Вейля. Последняя формула позволяет построить разбиение внутренности камеры Вейля C, которая является в данном случае конусом обильных линейных расслоений, на классы GIT-эквивалентности.

2. Вычислен ранг группы Пикара фактора $X^{ss}_{L_\chi}/\!\!/T$ — один из наиболее важных инвариантов многообразий. Было показано, что $\mathrm{Pic}(X^{ss}_{L_\chi}/\!\!/T)$ — конечно порожденная свободная абелева группа. Тем самым, последняя группа определяется своим рангом.

3. Построено локально замкнутое вложение торсера над поверхностью дель-Пеццо относительно тора $\widehat{T}$, полученного расширением максимального тора T с помощью тора, действующего гомотетиями на $V(\pi_\alpha)$, в аффинный конус над соответствующим многообразием флагов G/P. При этом образом морфизма факторизации по действию тора $\widehat{T}$ пересечения построенного торсера и весовых гиперплоскостей будет объединение (-1)-кривых на поверхности дель-Пеццо. Построение в целом следует построению А.Н.Скоробогатова и В.В.Сергановой, проделанного для поверхностей дель-Пеццо степени больше 1. Автором были предложены новые доказательства ключевых утверждений, а также построены соответствующие вложения для поверхностей дель-Пеццо степени 1.

Основные методы исследования

В работе применяются методы алгебраической геометрии, геометрической теории инвариантов, теории представлений редуктивных алгебраических групп. На протяжении всей работы автор использует результаты работы И.Н.Берштейна, И.М.Гельфанда, С.И.Гельфанда[14], которые описывают строение многообразий Шуберта при данном проективном вложении. В последней части работы автор опирается на результаты работы Б.Г.Мойшезона[15] об экстремальных стягиваниях.

[14] И.Н.Берштейн, И.М.Гельфанд, С.И.Гельфанд, *Клетки Шуберта и когомологии пространств G/P*, УМН **37:3** (171) (1973), 3–26.

[15] Б.Г.Мойшезон, *Теорема Кастельнуово–Энриквеса о стягивании для произвольной размерности.* Изв. АН СССР. Сер. матем. **33:5**,(1969), 974—1025.

Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация имеет теоретический характер. Полученные в диссертации результаты представляют интерес для алгебраической геометрии, геометрической теории инвариантов (вариации GIT-факторов), геометрии многообразий флагов, теории представлений.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на следующих научно-исследовательских семинарах:

- Семинар “Алгебраические группы и алгебры Ли” под руководством Э.Б.Винберга и А.Л.Онищика, МГУ (2005 и 2008);
- Школа по алгебраическим группам, Georg-August-Universitaet Göttingen, (2005);
- Кафедральный семинар кафедры высшей алгебры МГУ (2008);
- Семинар “Геометрия, топология и математическая физика” под руководством С.П.Новикова и В.М.Бухштабера, МГУ (2008);

Публикации

Результаты автора по теме диссертации опубликованы в 3 работах, список которых приводится в конце автореферата [1-3].

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из 4 глав (первая из которых является вводной) и библиографии (28 наименований). Общий объем диссертации составляет 131 страницу.

Краткое содержание работы

В **главе 1**, которая является вводной, изложена краткая история вопроса, показана актуальность темы и сформулированы основные результаты. Также формулируются известные ранее результаты, используемые в работе. Последние приведены без доказательства, однако они снабжены подробными ссылками на первоисточники.

В главе 2 нами получена формула, выражающая множество полустабильных точек $X^{ss}_{L_\chi}$ через пересечение сдвигов на элементы группы Вейля некоторых клеток Шуберта.

Теорема 1. *Рассмотрим G-эквивариантное замкнутое вложение $G/B \hookrightarrow \mathbb{P}(V(\chi))$. Тогда множество полустабильных точек относительно действия тора (с линеаризацией, пришедшей со стандартного действия T на $V(\chi)$) может быть найдено по следующей формуле:*

$$X^{ss}_{L_\chi} = \bigcap_{\widetilde{w}\in W} \bigcup_{w\in W^{st}_\chi} \widetilde{w}BwB/B,$$

где W^{st}_χ — множество таких $w \in W$, что $\langle w\chi; \lambda\rangle \leqslant 0$ для любого $\lambda \in C$ из камеры Вейля.

Из этой теоремы получается теорема о вариации фактора Мамфорда.

Пусть A — конус, порожденный простыми корнями. Определим по элементу $\chi \in C^0$ конус $\sigma_\chi = C \cap \bigcap\limits_{\substack{w\in W \\ \chi\in wA}} wA$.

Теорема 2. *(Вариация фактора Мамфорда)*

Множество конусов σ_χ для $\chi \in C^0$ конечно. Рассматриваемые конуса образуют веер с носителем C. Относительные внутренности этих конусов отвечают классам GIT-*эквивалентности.*

В этой главе приведены вспомогательные результаты, описывающие множество полустабильных точек в коразмерности 1. В частности, показано, что в случае когда G не имеет простых компонент типа A_n, дополнение к множеству полустабильных точек имеет коразмерность не меньше 2. В случае, когда $G = SL_n$, дано описание дивизоров, не лежащих в множестве полустабильных точек $X^{ss}_{L_\chi}$. Также получены технические результаты об устройстве линейных оболочек носителей стабильных T-орбит.

Поскольку факторы $X^{ss}_{L_\chi}/\!\!/T$ устроены достаточно сложно, представляет интерес вычисление каких-либо их инвариантов. **Глава 3** посвящена вычислению ранга группы Пикара фактора $X^{ss}_{L_\chi}/\!\!/T$. В данном случае несложно показать, что $\mathrm{Pic}(X^{ss}_{L_\chi}/\!\!/T)$ — конечно порожденная свободная абелева группа. Поэтому последняя группа определяется своим рангом.

Подсистемы корней $\widetilde{\Delta} \subset \Delta$, для которых выполнено равенство $\widetilde{\Delta} = \langle\widetilde{\Delta}\rangle \cap \Delta$ (где $\langle\widetilde{\Delta}\rangle$ обозначает линейную оболочку системы $\widetilde{\Delta}$), мы будем называть насыщенными. Напомним, что имеет место вложение $\pi^* : \mathrm{Pic}(X^{ss}_{L_\chi}/\!\!/T) \hookrightarrow \mathrm{Pic}(G/B) \times \Xi(T)$.

В случае, когда группа G не имеет компонент типа A_n имеет место теорема.

Теорема 3. *Пусть χ — строго доминантный вес, которому отвечает вложение $G/B \hookrightarrow \mathbb{P}(V(\chi))$. Пусть $\{\widetilde{\Delta}_j^w\}$ — всевозможные насыщенные подсистемы корней в Δ такие, что*

$$0 \in ww_0\chi + \sum_{\alpha_i \in (\widetilde{\Delta}_j^w)^+ \cap w\Delta^+} \mathbb{Q}_+\alpha_i.$$

Тогда элемент $\mu = (\mu_0; \mu_1) \in (\mathrm{Pic}(G/B) \times \Xi(T)) \otimes \mathbb{Q}$ принадлежит $\pi^*\mathrm{Pic}(X_{L_\chi}^{ss}/\!\!/T) \otimes \mathbb{Q}$ тогда и только тогда, когда

$$ww_0\mu_0 + \mu_1 \in \bigcap_j \langle \widetilde{\Delta}_j^w \rangle,$$

для всех $ww_0 \in W_\chi^{st}$. Ранг группы Пикара $\mathrm{Pic}(X_{L_\chi}^{ss}/\!\!/T)$ равен размерности линейного пространства, порожденного точками μ, удовлетворяющими условиям, описанным выше.

Имеет место аналогичная теорема для $G = SL_{l+1}$. В этом случае дополнение к множеству полустабильных точек может иметь компоненты коразмерности 1. Это приводит к тому, что вычисление группы $\mathrm{Pic}_T(X_{L_\chi}^{ss})$ становится нетривиальным. Приведем формулировку соответствующего предложения:

Предложение 1. *Пусть $G = SL(l+1)$, а π_1 и π_l — фундаментальные веса, двойственные к корням, отвечающим концевым вершинам схемы Дынкина A_l. Тогда*

(i) если $s_{\alpha_n} w_0 \in W_\chi^{st}$ для всех n, то

$$\mathrm{Pic}_T(X_{L_\chi}^{ss}) \otimes \mathbb{Q} \cong (\mathrm{Pic}(G/B) \times \Xi(T)) \otimes \mathbb{Q},$$

(ii) если $s_{\alpha_1} w_0 \in W_\chi^{st}$, а $s_{\alpha_l} w_0 \notin W_\chi^{st}$, то

$$\mathrm{Pic}_T(X_{L_\chi}^{ss}) \otimes \mathbb{Q} \cong (\Xi(B)/\langle \pi_l \rangle) \otimes \mathbb{Q},$$

(iii) если $s_{\alpha_l} w_0 \in W_\chi^{st}$, а $s_{\alpha_1} w_0 \notin W_\chi^{st}$, то

$$\mathrm{Pic}_T(X_{L_\chi}^{ss}) \otimes \mathbb{Q} \cong (\Xi(B)/\langle \pi_1 \rangle) \otimes \mathbb{Q}.$$

В случае (i) предыдущего предложения формула для ранга группы Пикара аналогична теореме 3.1.1 и мы опустим ее формулировку. В случаях (ii) и (iii) предыдущего предложения имеет место следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть $G = SL(l+1)$. Зафиксируем строго доминантный вес χ, которому отвечает вложение $G/B \hookrightarrow \mathbb{P}(V(\chi))$. Пусть $\{\widetilde{\Delta}_j\}$ — всевозможные насыщенные подсистемы корней в Δ такие, что $0 \in w_0\chi + \sum\limits_{\alpha\in(\widetilde{\Delta}_j)} \mathbb{Q}_+\alpha$. В случае, когда выполнено одно из условий:*

(i) $s_{\alpha_1}w_0 \in W_\chi^{st}$, а $s_{\alpha_l}w_0 \notin W_\chi^{st}$;

(ii) $s_{\alpha_l}w_0 \in W_\chi^{st}$, а $s_{\alpha_1}w_0 \notin W_\chi^{st}$,

имеет место формула

$$\mathrm{Pic}(X_{L_\chi}^{ss}/\!\!/T) \otimes \mathbb{Q} \cong \tilde{p}(w_0 \bigcap_j \langle\widetilde{\Delta}_j\rangle) \otimes \mathbb{Q},$$

где в случае (i) (соот. случае (ii)) $\tilde{p}$ определяется как проекция на $(\Xi(B)/\langle\pi_l\rangle)\otimes\mathbb{Q}$ (соот. на $(\Xi(B)/\langle\pi_1\rangle)\otimes\mathbb{Q}$).

Глава 4 посвящена изучению связи между универсальными торсерами над поверхностями дель-Пеццо и аффинными конусами над многообразиями флагов, вложенными в микровесовые представления.

Основным результатом является следующая теорема, доказанная А.Н.Скоробогатовым и В.В.Сергановой[13] в случае поверхностей дель-Пеццо степени строго больше 1.

Рассмотрим тор $T\times\mathbb{K}^\times$, первая компонента которого действует на неприводимом представлении $V(\pi_\alpha)$ стандартным образом, а вторая — с помощью гомотетий. Обозначим через $\widehat{T}$ фактор тора $T\times\mathbb{K}^\times$ по ядру неэффективности действия на $V(\pi_\alpha)$. Центр группы G обозначим через $Z(G)$.

Теорема 5. *Существует локально замкнутое $\widehat{T}$-эквивариантное вложение универсального торсера $\widehat{\mathcal{T}}$ с действием тора $\widehat{T}$ над поверхностью дель-Пеццо X_Δ (в случае E_8 рассматривается достаточно общая поверхность X_Δ) в аффинный конус в $V(\pi_\alpha)$ над подмножеством точек $(G/P)^{sf}$ многообразия флагов $G/P \subset \mathbb{P}(V(\pi_\alpha))$, стабильных относительно действия максимального тора T и имеющих стабилизатор $Z(G)$. Рассмотрим пересечение $\widehat{\mathcal{T}}$ с $\widehat{T}$-инвариантной гиперплоскостью $v_\omega = 0$ (где ω — ненулевой вес представления $V(\pi_\alpha)$). Его образом при морфизме факторизации по действию тора $\widehat{T}$ является (-1)-кривая на поверхности X_Δ. Все (-1)-кривые на X_Δ получаются таким способом.*

Кратко наметим план доказательства, который будет реализован ниже. Отметим, что общая схема доказательства заимствована из [13], однако шаги будут немного изменены, также будут даны доказательства отличные от [13].

Обозначим через G' и P' группу и ее параболическую подгруппу, которые соответствуют поверхности дель-Пеццо $X_{\Delta'}$, из которой получается поверхность X_Δ раздутием точки. Сначала мы докажем, что фактор по Мамфорду многообразия флагов G/P по некоторой однопараметрической подгруппе $\lambda : k^\times \longrightarrow T$ изоморфен раздутию $\mathbb{P}(V(\pi'_\beta))$ в многообразии флагов G'/P', которое мы обозначим через $Bl(\mathbb{P}(V(\pi'_\beta)), G'/P')$. Предположим по индукции, что для T'-торсера $\mathcal{T}\,'$ над $X_{\Delta'}$ построено его вложение в G'/P' (оно получено вложением универсального торсера $\widehat{\mathcal{T}}\,'$ в конус над G'/P' и последующей проекцией на G'/P'). Зафиксируем весовой базис в $V'(\pi'_\beta)$. Тогда точке $s \in \mathbb{P}(V'(\pi'_\beta))$, все координаты которой ненулевые, можно сопоставить преобразование проективного пространства $\mathbb{P}(V'(\pi'_\beta))$, умножающее координаты точки из $\mathbb{P}(V'(\pi'_\beta))$ на координаты точки s.

Пусть e_Δ — точка на поверхности $X_{\Delta'}$, а $\widetilde{\sigma} : X_\Delta \longrightarrow X_{\Delta'}$ — раздутие этой точки. Рассмотрим точку s торсера $\mathcal{T}\,'$, лежащую в слое над точкой e_Δ. Пусть $s' \in G'/P'$ — достаточно общая точка. Растяжением $s's^{-1}$ вдоль весовых векторов пространства $V'(\pi'_\beta)$ мы добьемся того, что образ торсера $s's^{-1}\mathcal{T}\,'$ пересекает G'/P' по одной T'-орбите Ts', лежащей над точкой e_Δ. Далее возьмем собственный прообраз $\widetilde{\mathcal{T}}$ торсера $s's^{-1}\mathcal{T}\,'$ относительно раздутия $\mathbb{P}(V(\pi'_\beta))$ вдоль G'/P', а затем полный прообраз относительно факторизации по λ. Обозначим полученный торсер через $\mathcal{T}$. Мы покажем, что аффинный конус над $\mathcal{T}$ будет искомым торсером.

Для удобства читателя приведем коммутативную диаграмму, иллюстрирующую схему доказательства.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{T} \arrow[rr, hook] \arrow[d, "\lambda\backslash\!\backslash"'] & & (G/P)^{sf} \arrow[d, "\lambda\backslash\!\backslash"'] \\
 & \widetilde{\mathcal{T}} \arrow[rr, hook] \arrow[dl, "T'\backslash\!\backslash"'] \arrow[d, "\sigma"'] & & Bl(\mathbb{P}(V(\pi'_\beta)); G'/P') \arrow[d, "\sigma"'] \\
X_\Delta \arrow[d, "\widetilde{\sigma}"'] & s's^{-1}\mathcal{T}\,' \arrow[r, hook] \arrow[dl, "T'\backslash\!\backslash"'] & s's^{-1}G'/P' \arrow[r, hook] & \mathbb{P}(V'(\pi'_\beta)) \\
X_{\Delta'} & \mathcal{T}\,' \arrow[r, hook] & G'/P' \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

Благодарности

Я благодарю своего научного руководителя кандидата физико-математических наук, доцента Ивана Владимировича Аржанцева за постановку задач и постоянное внимание к работе. Я также хочу поблагодарить профессора Эрнеста Борисовича Винберга, профессора Василия Алексеевича Исковских, профессора Юрия Геннадьевича Прохорова, доцента Дмитрия Андреевича Тимашева, профессора Алексея Николаевича Скоробогатова и профессора Веру Серганову за полезные обсуждения. Благодарю заведующего кафедрой высшей алгебры, доктора физико-математических наук, профессора Виктора Николаевича Латышева и всех сотрудников кафедры за творческую атмосферу, которая способствовала научной работе.

Работы автора по теме диссертации

[1] В. С. Жгун, *Вариация фактора Мамфорда действия тора на многобразии полных флагов. I.* // Изв. РАН. Сер. матем. **71:6**, (2007), 29–46.

[2] В. С. Жгун, *Вариация фактора Мамфорда действия тора на многобразии полных флагов. II.* // Математический сборник **199:3**, (2008), 25–44.

[3] В. С. Жгун, *О вложениях универсальных торсеров над поверхностями дель-Пеццо в конусы над многообразиями флагов.* // Депонировано ВИНИТИ РАН, 2008, 337-В 2008 52 с.