Московский государственный университет имени
М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 512.813.4, 514.75

Рыбаков Сергей Юрьевич

# Дзета-функции алгебраических поверхностей и якобианы кривых рода 3 над конечными полями

Специальность:
01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Москва – 2008

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

| | |
|---|---|
| Научные руководители: | доктор физико-математических наук Михаил Анатольевич Цфасман; |
| | доктор физико-математических наук профессор Василий Алексеевич Исковских. |
| Официальные оппоненты: | доктор физико-математических наук, профессор Игорь Вадимович Артамкин; |
| | кандидат физико-математических наук Александр Геннадьевич Кузнецов. |
| Ведущая организация: | Санкт–Петербургское Отделение Математического Института имени В.А. Стеклова РАН. |

Защита диссертации состоится 23 мая 2008 г. в 16 часов 40 минут на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ, Механико-математический факультет (Главное здание, 14 этаж).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Автореферат разослан 23 апреля 2008 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д.501.001.84 при МГУ
доктор физ.-мат. наук, профессор А. О. Иванов

# Общая характеристика работы

## Актуальность темы.

Пусть $X$ — гладкое проективное многообразие над конечным полем $k = \mathbb{F}_q$ с алгебраическим замыканием $\bar{k}$. В этом случае у многообразия есть набор важных инвариантов $N_r$. Для данного натурального $r$ число $N_r$ — это количество точек на $\bar{X} = X \times_k \bar{k}$, координаты которых лежат в $\mathbb{F}_{q^r}$. Эти инварианты можно объединить в дзета–функцию многообразия:

$$Z_X(t) = \exp(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{N_r t^r}{r}).$$

А. Гротендик доказал, что дзета–функцию многообразия над конечным полем можно вычислить через характеристические многочлены действия Фробениуса на этальных когомологиях[1].

В случае, когда $X$ — поверхность, можно классифицировать дзета–функции в терминах геометрии и комбинаторики $X$. Например, в статье М. А. Цфасмана[2] изучался вопрос о количестве $k$–точек на расслоениях на коники, а в книге Ю. И. Манина[3] классифицированы дзета–функции поверхностей дель–Пеццо степени не меньше $3$, но не доказано, что существуют поверхности с такими дзета–функциями.

Поскольку любая поверхность получается раздутием минимальной, достаточно вычислить дзета–функции минимальных поверхностей. Для этого требуется классификация минимальных поверхностей над конечным полем. Если размерность Кодаиры неотрицательна, то достаточно классических результатов Энриквеса, которые были доказаны Бомбьери и Мамфордом для поверхностей над алгебраически замкнутым полем произвольной характеристики[4]. В остальных случаях можно воспользоваться результатами В. А. Исковских[5] и Ю. И. Манина[6] о классификации рациональных поверхностей и расслоений на коники.

[1] M. Artin, J.-L. Verdier, A. Grothendieck. *Theorie des topos et cohomologie etale des schemas: Seminaire de Geometrie Algebrique.* Lecture notes in mathematics 269, 270, 305. Springer. 1972–1973.

[2] M.A. Tsfasman. *Nombre de points des surfaces sur un corps fini.* Algebraic Geometry and Coding Theory, de Gruyter, Berlin, 1996, 209–224.

[3] Ю. И. Манин. *Кубические формы: алгебра, геометрия, арифметика.* “Наука”, 1972.

[4] E. Bombieri, D. Mumford. *Enriques' classification of surfaces in characteristic $p$. II.* Complex analysis and algebraic geometry, Iwanami Shoten, Tokyo, 1977, 23–42.

[5] В. А. Исковских. *Минимальные модели рациональных поверхностей над произвольными полями.* Изв. Акад. Наук СССР Сер. мат.,**43**, 1979, 1, 19–43.

[6] Yu.I. Manin. *Rational surfaces over perfect fields.* Publ. Math. IHES 30, 1966, 55–113.

В случае, когда многообразие $A$ абелево, множество рациональных точек $A(k)$ является группой. Можно попытаться определить, какие группы данного порядка реализуются как группы точек многообразия. Для случая эллиптических кривых такая классификация получена Цфасманом[7], а также независимо Волохом[8] и Рюкком[9], которые использовали результаты Схофа[10]. Для данного простого $\ell$, не равного характеристике $k$, в диссертации изучаена структура групповых схем $A[\ell]$, где $A$ — абелева поверхность, и $A[\ell]$ — ядро умножения на $\ell$. В частности, можно классифицировать группы $A(k)/\ell A(k)$.

В диссертации также исследуются дзета-функции кривых рода 3. Классификация таких дзета–функций эквивалентна следующему вопросу. Пусть $f(x) = x^6 + a_1x^5 + a_2x^4 + a_3x^3 + qa_2x^2 + q^2a_1x + q^3$ — многочлен Вейля, соответствующий классу изогении трехмерных абелевых многообразий над конечным полем. Требуется выяснить, существует ли гладкая проективная кривая рода 3 над $k$, у которой был бы такой характеристический многочлен автоморфизма Фробениуса. Иначе говоря, есть ли якобиан гладкой проективной кривой в данном классе изогении.

Для абелевых поверхностей аналогичный вопрос был рассмотрен Рюкком[11], который предложил некоторые достаточные условия для случая обыкновенных поверхностей. Существенным продвижением стали работы Э. Хоува о ядрах поляризаций на абелевых многообразиях над конечным полем[12], которые позволили дать полную классификацию дзета–функций кривых рода 2, у которых якобиан является геометрически простым абелевым многообразием. Доказать существование кривой, у которой якобиан изогенен произведению двух эллиптических кривых можно при помощи *склейки поляризаций* — это простой, но эффективный метод, предложенный Серром[13]. При помощи метода Кани[14] можно выяснить, когда склейка поляризаций дает якобиан кривой. Эта программа была

[7]M. A. Tsfasman. *Group of points of an elliptic curve over a finite field.* Theory of numbers and its applications, Tbilisi, 1985, 286-287.

[8]J. F. Voloch. *A note on elliptic curves over finite fields.* Bull. Soc. Math. France 116 (1988), no. 4, 455–458.

[9]H.-G, Rück. *A note on elliptic curves over finite fields.* Math. Comp. 49 (1987), no. 179, 301–304.

[10]R. Schoof. *Nonsingular plane cubic curves over finite fields.* J. Combin. Theory Ser. A 46 (1987), no. 2, 183–211.

[11]H.-G, Rück. *Abelian surfaces and Jacobian varieties over finite fields.* Comp. Math. **76**, 1990, 351–366.

[12]Например, E. W. Howe. *Kernels of polarizations of abelian varieties over finite fields.* J. Algebraic Geom. 5 (1996), no. 3, 583–608.

[13]K. Lauter. *The maximum or minimum number of rational points on genus three curves over finite fields.* With an appendix by Jean-Pierre Serre. Compositio Math. 134 (2002), no. 1, 87–111.

[14]E. Kani. *The number of curves of genus two with elliptic differentials.* J. Reine Angew. Math. 485 (1997), 93–121.

реализована в статье Хоува, Нарта и Ритзенталлера[15], где дается полная классификация дзета–функций кривых рода 2. В их статье также можно найти более подробный обзор истории этого вопроса.

Про дзета–функции кривых рода 3 известно крайне мало. Из результатов Хоува и теоремы Торелли сразу следует, что геометрически простое абелево многообразие размерности 3 над конечным полем является якобианом над квадратичным расширением поля. В остальных случаях вопрос был открыт, и шестая глава диссертации посвящена рассмотрению «самого общего» из оставшихся случаев, когда абелево многообразие изогенно произведению геометрически неприводимой абелевой поверхности и несуперсингулярной эллиптической кривой. С другой стороны, известно, каково максимальное и минимальное количество точек на кривой рода три для некоторых классов конечных полей. Кривые с таким свойством называются максимальными или минимальными, соответственно. (Помимо упомянутой статьи К. Лаутер см., например, статью А. Зайцева[16].) Интерес к этому вопросу связан прежде всего с приложениями к теории кодирования. Якобианы максимальных и минимальных кривых изогенны произведению трех эллиптических кривых, и трудность вычисления даже количества точек на них не позволяет надеяться, что в ближайшее время будет получена сколько-нибудь полная классификация дзета–функций кривых рода 3.

### Цель работы.

Целью работы является классификация дзета–функций некоторых типов алгебраических поверхностей кодаировой размерности нуль и один, а также дзета–функций кривых рода 3, якобиан которых изогенен произведению суперсингулярной эллиптической кривой и геометрически простой абелевой поверхности.

### Структура и объем диссертации.

Диссертационная работа изложена на 88 страницах и состоит из введения и шести глав. Библиография включает 43 наименования.

[15] E. W. Howe, E. Nart, C. Ritzenthaler. *Jacobians in isogeny classes of abelian surfaces over finite fields.* Preprint 2006, arXiv:math/0607515

[16] A. Zaytsev. *Optimal curves of low genus over finite fields.* arXiv:0706.4203v1 [math.AG]

**Научная новизна.**

Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Получена классификация дзета–функций расслоений на коники над гладкими проективными кривыми, поверхностей дель-Пеццо степени 4, поверхностей Куммера и биэллиптических поверхностей при некоторых ограничениях на характеристику основного поля.

2. Получена классификация $\ell$-кручения абелевых поверхностей, где $\ell$ — простое число, отличное от характеристики основного поля.

3. Для абелевых многообразий размерности 3, которые изогенны произведению геометрически неприводимой абелевой поверхности и несуперсингулярной эллиптической кривой доказаны некоторые необходимые и некоторые достаточные условия существования главной неприводимой поляризации. Из них сразу следует достаточное условие существования кривой рода 3 над конечным полем с данной дзета–функцией.

**Основные методы исследования.**

Для исследования многообразий над конечными полями используются методы алгебраической геометрии и программы минимальных моделей над произвольными полями. Для изучения абелевых многообразий и поляризаций на них привлекются теории Тейта–Хонды и Хоува.

**Теоретическая и практическая ценность работы.**

Диссертация имеет теоретический характер. Доказанные в диссертации теоремы представляют интерес для алгебраической геометрии, алгебры, теории чисел и теории кодирования. Результаты диссертации могут быть полезны специалистам из Московского государственного университета, МИ РАН, ИППИ РАН, ПОМИ РАН и НМУ.

**Апробация работы.**

Результаты диссертации докладывались на следующих семинарах и конференциях.

1. Конференция “Arithmetique, geometrie et theorie des codes” (Франция, 2005). Доклад: ”On zeta–functions of Kummer surfaces over finite fields”.

2. Семинар “Арифметика алгебраических многообразий” под руководством М.А. Цфасмана в Независимом Московском Университете (2006). Доклад: ”Дзета-функции поверхностей Куммера над конечными полями”.

3. Семинар “Seminaire de Theorie des Nombres de Caen” в Университете г.Кан (Франция, 2007). Доклад: ”Zeta–functions of bielliptic surfaces over finite fields”.

4. Семинар под руководством Р.А. Минлоса в ИППИ РАН (2007). Доклад: ”Дзета-функции кривых рода 3 над конечными полями”.

5. Кафедральный семинар кафедры высшей алгебры МГУ (2007). Доклад: ”Дзета-функции алгебраических поверхностей над конечными полями”.

**Публикации автора по теме диссертации.**

Основное содержание диссертации опубликовано в четырех работах, список которых приведен в конце автореферата [1–4].

## Краткое содержание работы

Диссертация состоит из ведения и шести глав.

**Расслоения на коники и поверхности дель–Пеццо.**

Первая глава посвящена классификации дзета–функций расслоений на коники, которая обобщает теорему Цфасмана[17].

**Теорема 1.** [1, 2] *Пусть $S \to C$ — минимальное расслоение на коники над кривой рода $g$. У поверхности $S$ над полем $\bar{k}$ есть $f = \operatorname{rk}\operatorname{NS}(\bar{S}) - 2$ вырожденных слоев, причем $f = \sum r \cdot a_r$, где $a_r$ — число вырожденных*

[17]M.A. Tsfasman. *Nombre de points des surfaces sur un corps fini.*, Algebraic Geometry and Coding Theory, de Gruyter, Berlin, 1996, 209–224.

*слоев над точками степени $r$. Тогда дзета–функция $S$ имеет вид:*

$$Z_S(t) = Z_C(t) \cdot Z_C(qt) \prod_r (1 + q^r t^r)^{-a_r}.$$

*Для существования расслоения с такой дзета–функцией необходимо и достаточно существования таких точек $x_1, \ldots, x_s$ на $C$ для которых $\sum_i \deg x_i = f$, причем ровно $a_r$ точек имеют степень $r$, и $s$ четно.*

*Такие точки всегда существуют при достаточно больших $q$. Если $g = 0$, то требуемая поверхность существует тогда и только тогда, когда $q^r \geq a_r$.*

Мы используем этот результат во второй главе для доказательства следующей теоремы существования, которая позволяет при помощи таблицы Суиннертона-Даера и Манина вычислить дзета–функции поверхностей дель–Пеццо степени 4 при $q > 3$. Возможные типы действия группы Галуа основного поля на исключительные кривые поверхности дель-Пеццо классифицированы в книге Манина[18]. В случае конечного поля остается шесть типов: I, II, IV, V, XVIII и X.

**Теорема 2.** [1, 2] *При $q > 3$ существуют поверхности дель–Пеццо степени 4 типов* II, IV *и* V, *а поверхности типов* I, XVIII *и* X *существуют при всех $q$.*

### $\ell$-кручение абелевых многообразий и поверхности Куммера.

Пусть $\ell$ — простое число, отличное от характеристики поля $k$. В третьей главе приведена классификация $\ell$-кручения абелевых многообразий $A$ над $k$ с коммутативной алгеброй эндоморфизмов. Фиксируем класс изогении абелевых многообразий. Он однозначно определяется многочленом Вейля $f(t) = f_A(t)$ — характеристическим многочленом действия автоморфизма Фробениуса на модуле Тейта $T_\ell(A)$. Ядро умножения на $\ell$, которое мы будем обозначать $A[\ell]$, является конечной этальной групповой схемой. Для классификации групповых схем $A[\ell]$, где $A$ принадлежит классу изогении, соответствующему многочлену Вейля $f(t)$, достаточно классифицировать действия арифметического автоморфизма Фробениуса $F$ на $A[\ell](\bar{k})$. Это эквивалентно классификации модулей вида $T(A)/\ell T(A)$ над $R = \mathbb{Z}_\ell[t]/(f(t)) \cong \mathbb{Z}_\ell[F] \subset \mathrm{End}(A) \otimes \mathbb{Z}_\ell$. Мы сведем задачу к более простой в два этапа.

[18] Ю. И. Манин. *Кубические формы: алгебра, геометрия, арифметика.* “Наука”, 1972.

1. Пусть $f = \prod f_i$, и $f_i \equiv h_i^{d_i} \mod \ell$, где $f_i, h_i \in \mathbb{Z}_\ell[t]$ и многочлены $h_i$ взаимно просты по модулю $\ell$. Тогда $R \cong \prod R_i$, где $R_i = \mathbb{Z}_\ell[t]/(f_i(t))$. Поэтому любой модуль над $R$ можно разложить в прямую сумму модулей над $R_i$.

2. Можно считать, что для многочлена $f \in \mathbb{Z}_\ell[t]$ выполняется сравнение $f(t) \equiv h(t)^d \mod \ell$, где унитарный многочлен $h(t) \in \mathbb{Z}_\ell[t]$ неприводим по модулю $\ell$. Тогда $R$ содержит корень $\alpha$ многочлена $h(t)$, и кольцо $\Lambda = \mathbb{Z}_\ell[\alpha]$ регулярно и локально.

Мы свели нашу задачу к следующей. Пусть $\Lambda$ — кольцо целых неразветвленного расширения $\mathbb{Q}_\ell$, и $P(t) \in \Lambda[t]$ — многочлен без кратных корней, причем $P(t) \equiv t^d \bmod \ell$. Требуется описать (с точностью до сопряжения) такие нильпотентные матрицы $M$ над $\Lambda/\ell\Lambda$, что $M$ можно поднять до матрицы $N$ над $\Lambda$ с условием $P(N) = 0$. Для формулировки решения нам потребуется следующее определение.

**Определение 3.** Пусть дан конечный набор натуральных чисел $w_1, \dots, w_r$. Этому набору можно однозначно с точностью до сопряжения сопоставить нильпотентную матрицу $M = M(\{w_i\})$ с $r$ жордановыми клетками размера $w_i$. *Многоугольник Ньютона* $\mathrm{Np}(M)$ нильпотентной матрицы $M = M(\{w_i\})$, заданной последовательностью $\{w_i\}$, — это многоугольник с наклонами $\{1/w_i\}$.

Теперь мы можем сформулировать основной результат, который обобщает [4]. Пусть $R = \Lambda[t]/(P(t))$, и $x$ — образ $t$ в $R$. Нам нужно описать кручение $R$–модулей ранга 1.

**Теорема 4.** *Над $R$ существует такой модуль $T$ ранга 1, что $x$ действует на $T/\ell T$ нильпотентной матрицей $M = M(\{w_i\})$, тогда и только тогда, когда многоугольник Ньютона матрицы $M$ лежит не выше многоугольника Ньютона многочлена $P$.*

Благодаря этой теореме можно получить полную классификацию $\ell$-кручения абелевых поверхностей. В главе четыре мы применяем этот результат, чтобы дать классификацию дзета-функций поверхностей Куммера через дзета-функции соответствующих абелевых поверхностей при условии, что $\operatorname{char} k \neq 2$. Напомним определение.

Пусть $A$ — абелева поверхность, и $\operatorname{char} k \neq 2$. У инволюции $\tau : a \mapsto -a$ всего 16 неподвижных точек над $\bar{k}$. Это решения уравнения $2a = 0$. Разрешение особенностей $S$ фактора $A/\tau$ называется *поверхностью Куммера.*

**Теорема 5.** [4] *Пусть дзета-функция абелевой поверхности $A$ имеет вид:*

$$Z_A(t) = \prod_{i=0}^{4} P_i(A,t)^{(-1)^{i+1}}.$$

*Пусть $b_r$ количество точек степени $r$ на $A[2]$, и*

$$P(t) = P_2(A,t) \prod_r (1-(qt)^r)^{b_r}. \tag{1}$$

*Тогда дзета-функция $S$ равна*

$$Z_S(t) = (1-t)^{-1} P(t)^{-1} (1-q^2t)^{-1}. \tag{2}$$

*Числа $b_r$ можно вычислить, пользуясь таблицами 1, 2, 3 и 4. Числа $b_r$, не вошедшие в таблицу, равны нулю.*

Имеет место соотношение: $P_1(A,t) = t^4 f_A(1/t)$. Пусть $\mathrm{End}^\circ(A)$ коммутативна, и $f_A(t) \equiv (t+1)^4 \bmod 2$. Чтобы пользоваться таблицей 1, мы можем заменить все наклоны $f_1(t) = f_A(t+1)$, большие 1, на 1.

Таблица 1:

| Наклоны многоугольника Ньютона многочлена $f_1(t)=f_A(t+1)$ | Возможные значения $b_i$ |
|---|---|
| $(1/4)$ | $b_1=2, b_2=1, b_4=3$ |
| $(1/3,1)$ | $b_1=2, b_2=1, b_4=3$ |
| | $b_1=4, b_2=2, b_4=2$ |
| $(1/2,1/2)$ | $b_1=2, b_2=1, b_4=3$ |
| | $b_1=4, b_2=2, b_4=2$ |
| | $b_1=4, b_2=6$ |
| $(2/3,1)$,$(1/2,1,1)$ или $(3/4)$ | $b_1=2, b_2=1, b_4=3$ |
| | $b_1=4, b_2=2, b_4=2$ |
| | $b_1=4, b_2=6$ |
| | $b_1=8, b_2=4$ |
| $(1,1,1,1)$ | $b_1=2, b_2=1, b_4=3$ |
| | $b_1=4, b_2=2, b_4=2$ |
| | $b_1=4, b_2=6$ |
| | $b_1=8, b_2=4$ |
| | $b_1=16$ |

В случае, когда $f_A(t) \not\equiv (t+1)^4 \bmod 2$, таблица такая:

Таблица 2:

| $f_A(t) \bmod 2$ | |
|---|---|
| $t^4+t^3+t^2+t+1$ | $b_1=1, b_5=3$ |
| $t^4+t^3+t+1$<br>и 4 не делит $f_A(1)$ | $b_1=2, b_2=1, b_3=2, b_6=1$ |
| $t^4+t^3+t+1$<br>и 4 делит $f_A(1)$ | $b_1=2, b_2=1, b_3=2, b_6=1$<br>$b_1=4, b_3=4$ |
| $t^4+t^2+1$<br>и 4 не делит $a_1+a_2+1-2q$ | $b_1=1, b_3=5$ |
| $t^4+t^2+1$<br>и 4 делит $a_1+a_2+1-2q$ | $b_1=1, b_3=5$<br>$b_1=1, b_3=1, b_6=1$ |

Рассмотрим теперь случай, когда алгебра $\mathrm{End}^\circ(A)$ некоммутативна. Если поверхность $A$ простая, изогенна квадрату несуперсингулярной эллиптической кривой, или произведению двух неизогенных суперсингулярных с некоммутативными алгебрами эндоморфизмов, то $f_A(t) = P_A(t)^2$:

Таблица 3:

| $P_A(t) \bmod 2$ | |
|---|---|
| $t^2+t+1$ | $b_1=1, b_3=5$ |
| $t^2+1$<br>и 4 не делит $P_A(1)$ | $b_1=4, b_2=6$ |
| $t^2+1$<br>и 4 делит $P_A(1)$ | $b_1=4, b_2=6$<br>$b_1=8, b_2=4$<br>$b_1=16$ |

Если $A$ изогенна произведению суперсингулярной и обыкновенной эллиптических кривых, то $f_A(t) = (t \pm \sqrt{q})f(t)$:

Таблица 4:

| $f(t) \bmod 2$ | |
|---|---|
| $t^2+t+1$ | $b_1=4, b_3=4$ |
| $t^2+1$<br>и 4 не делит $f_B(1)$ | $b_1=8, b_2=4$<br>$b_1=4, b_2=2, b_3=2$ |
| $t^2+1$<br>и 4 делит $f_B(1)$ | $b_1=16$<br>$b_1=8, b_2=4$<br>$b_1=4, b_2=6$<br>$b_1=4, b_2=2, b_3=2$ |

Наконец, если $A$ изогенно квадрату эллиптических кривой с некоммутативной алгеброй эндоморфизмов, то $f_A(t)=(t\pm\sqrt{q})^4$, и всегда $b_1=16$.

**Биэллиптические поверхности.**

В главе пять изучаются биэллиптические поверхности. При помощи результатов Бомбьери и Мамфорда мы доказываем, что над конечным полем, характеристика которого не равна 2 или 3, классификация биэллиптических поверхностей аналогична классической, и у каждой поверхности есть тип: $(a_i)$, $(b_i)$, $(c_i)$ или $(d)$, где $i=1$ или 2. Кроме того, над $k$ определено отображение Альбанезе $S\to B$ в эллиптическую кривую $B$. Следующая теорема несколько уточняет основные результаты работы [3].

**Теорема 6.** *Дзета–функция биэллиптической поверхности $S\to B$ равна дзета-функции прямого произведения $\mathbb{P}^1\times B$.*

*Пусть $f(t)=t^2-bt+q$ — характеристический многочлен автоморфизма Фробениуса эллиптической кривой $B$. Необходимые и достаточные условия того, что существует биэллиптическая поверхность $S\to B$ данного типа, перечислены в таблице:*

| *Случай.* | *Условие.* |
|---|---|
| $(a_1)$ | 2 *делит* $1-b+q$ |
| $(a_2)$ | 4 *делит* $1-b+q$ |
| $(b_1)$ | 3 *делит* $1-b+q$ |
| $(b_2)$, $q\equiv 1 \bmod 3$ | 9 *делит* $1-b+q$ |
| $(b_2)$, $q\equiv 2 \bmod 3$ | 3 *делит* $1-b+q$ |

| | |
|---|---|
| $(c_1)$, $b \neq \pm 2\sqrt{q}$, | 4 *делит* $1-b+q$ |
| $(c_1)$, $b = \pm 2\sqrt{q}$ | 16 *делит* $1-b+q$ |
| $(c_2)$ | 8 *делит* $1-b+q$ |
| $(d)$ | 6 *делит* $1-b+q$ |

*Дзета-функции этих поверхностей можно вычислить по формуле*

$$Z_S(t) = \frac{(qt^2 - bt + 1)(q^3t^2 - bqt + 1)}{(1-t)(1-qt)^2(1-q^2t)}.$$

**Якобианы кривых рода** $3$.

В шестой главе изучаются главные поляризации на абелевых многообразиях, которые изогенны произведению несуперсингулрной кривой и геометрически неприводимой абелевой поверхности. Наша цель — выяснить, есть ли в классе изогении главнополяризованное многообразие. Для этого мы найдем условия на коэффициенты характеристических многочленов автоморфизмов Фробениуса поверхности и кривой: $f_A(t) = t^4 + a_1t^3 + a_2t^2 + qa_1t + q^2$ и $f_B(t) = t^2 - bt + q$. Пусть $K^+$ — вещественное квадратичное расширение $\mathbb{Q}$, заданное многочленом $P(t) = t^2 + a_1t + a_2 - 2q$, $\delta$ — дискриминант $K^+$, а $\Delta$ — дискриминант $K_1 = \mathrm{End}^\circ(B)$.

**Определение 7.** Будем говорить, что простое число $\ell \neq p, 2$ *исключительное*, если $\ell$ делит $P(b)$, многочлен $f_B(t)$ неприводим по модулю $\ell$, $\ell^2$ делит $a_1^2 - 4a_2 + 8q$, и $K^+$ неразветвлено над $\mathbb{Q}$ в $\ell$ (то есть $\ell$ не делит $\delta$). Будем говорить, что 2 *исключительное*, если $b$ нечетно, 4 делит $a_1 + a_2 + 1 - 2q$, и $K^+$ неразветвлено над $\mathbb{Q}$ в 2 (то есть 2 не делит $\delta$).

**Теорема 8.** [4] *Пусть $A$ — геометрически неприводимая абелева поверхность, а кривая $B$ несуперсингулярна. Если многообразие $A \times B$ изогенно главнополяризованному абелеву многообразию, то выполняется одно из следующих условий:*

(1) *существует не исключительное простое $\ell$, которое делит $P(b)$;*

(2) *существуют такие исключительные простые числа $\ell_1, \ldots, \ell_m$, такие простые идеалы $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m$ поля $K^+$, лежащие каждый над своим $\ell_i$, и натуральные числа $\alpha_i$, что $\mathfrak{p}_1^{\alpha_1}, \ldots, \mathfrak{p}_m^{\alpha_m}$ — главный идеал поля $K^+$, порожденный абсолютно положительным элементом, и что $\ell_i^{\alpha_i}$ делят $P(b)$ для всех $i$;*

(3) *$p$ делит $P(b)$.*

*Обратно, $A\times B$ изогенно главнополяризованному абелеву многообразию, если выполняется одно из условий $(1')$, $(2)$ или $(3)$, где*

$(1')$ *существует не исключительное простое $\ell$, которое делит $P(b)$, при этом если $f_B \equiv (t-\alpha)^2 \bmod \ell$, то $\ell^2$ делит $f_B(\alpha)$, если же $\Delta = -\ell$, и $\ell \equiv 3 \bmod 4$, то $f_B \not\equiv (t-\alpha)^2 \bmod \ell$ для всех $\alpha$.*

Пусть $k_1$ — квадратичное расширение $k$. Этот результат дает некоторые необходимые и достаточные условия того, что $(A\times_k B)\otimes_k k_1$ изогенно якобиану гладкой кривой рода 3.


**Благодарности.**

Я благодарю моих научных руководителей Михаила Анатольевича Цфасмана и Василия Алексеевича Исковских за постановку задач и внимание к работе. Благодарю заведующего кафедрой высшей алгебры, доктора физико-математических наук, профессора Виктора Николаевича Латышева и всех сотрудников кафедры за творческую атмосферу, которая способствовала научной работе.


## Публикации по теме диссертации


[1] С. Ю. Рыбаков. *Дзета-функции расслоений на коники и поверхности дель-Пеццо степени 4 над конечными полями.* Успехи математических наук, **60**:5 (2005), 986–987.

[2] S. Rybakov. *Zeta-functions of conic bundles and Dell–Pezzo surfaces of degree 4 over finite fields.* Moscow Math. Journal **5**:4 (2005), 919–926.

[3] С. Ю. Рыбаков. *Дзета–функции биэллиптических поверхностей.* Математические заметки, **83**:2 (2008), 278–290.

[4] С. Ю. Рыбаков. *Кручение абелевых поверхностей над конечными полями и приложения к якобианам кривых рода 3 и поверхностям Куммера.* Депонировано в ВИНИТИ РАН, 2007, 935-В2007, 35 с.