Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 512.628.2+519.688

Овчинников Алексей Игоревич

Алгоритмические методы в дифференциальной теории идеалов

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2008

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научные руководители:	кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Евгений Васильевич Панкратьев
	кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Марина Владимировна Кондратьева
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Александр Александрович Михалев
	кандидат физико-математических наук, доцент Ирина Николаевна Балаба
Ведущая организация:	Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН

Защита диссертации состоится 23 мая 2008 г. в 16 ч. 40 м. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Российская Федерация, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 23 апреля 2008 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор

А.О. Иванов

Общая характеристика работы

Актуальность темы

За последние десятилетия был достигнут значительный прогресс в области компьютерной алгебры, одной из приоритетных задач которой является развитие методов решения систем нелинейных алгебраических уравнений от нескольких переменных, а также методов изучения алгебраических идеалов, порожденных нелинейными полиномиальными системами. Настоящим прорывом в данной области стало появление базисов Гребнера и алгоритма их вычисления, предложенного Бухбергером еще в середине 60-х годов. Теория исключений, использовавшаяся ранее для решения систем, оказалась частью новой теории, позволяющей приводить произвольную систему уравнений к стандартному виду.

В данной работе мы имеем дело с алгебраическими *дифференциальными* уравнениями и теорией исключения для систем таких уравнений. Основной объект теории — радикальный дифференциальный идеал, порожденный заданной системой дифференциальных уравнений. Теория исключения для такого идеала состоит в его разложении в пересечение характеризуемых идеалов, представленных своими характеристическими множествами. Основной вопрос данной теории — оценка работы подобных алгоритмов разложения, в частности, их теоретической сложности.

На сегодняшний день результаты о порядках дифференцирований, которые присутствуют в характеристических множествах и производятся в ходе алгоритма характеристического разложения, нуждаются в систематизации и углублении. Кроме того, актуальной является и задача построения достаточно общей теории оценки порядков дифференцирований, без ограничения на обыкновенный случай.

Цель работы

Целью настоящей работы является исследование радикальных дифференциальных идеалов в кольцах дифференциальных многочленов. Более точно, требуется оценить порядки характеристических множеств характеризуемых дифференциальных идеалов, возникающих в ходе разложения радикальных дифференциальных идеалов на характеризуемые компоненты. Эта задача успешно решена автором в данной работе.

Научная новизна

В диссертации получены следующие основные результаты:

1. Впервые получена оценка порядка дифференцирований для элементов, входящих в каноническое характеристическое множество характеризуемого дифференциального идеала.

2. Впервые получена оценка сверху на число дифференцирований, выполняемых алгоритмом Rosenfeld-Gröbner, который разлагает радикальный дифференциальный идеал на характеризуемые компоненты.

Основные методы исследования

В работе используются методы и результаты теории базисов Гребнера, коммутативной алгебры, дифференциальной алгебры[1,2,3]. При исследованиии канонических характеристических множеств характеризуемых дифференциальных идеалов используются и улучшаются результаты, полученные Ф. Булье, Д. Лазаром, Ф. Оливье и М. Петито[4,5]. В диссертации приводится новое, более простое определение канонического характеристического множества, не ограничиваясь на случай характеризуемых идеалов.

Первые оценки на порядки характеристических множеств были получены Б. Садиком[6]. Эти результаты касались лишь исключающих ранжиров и простых дифференциальных идеалов. В диссертации же получены результаты, не имеющие таких ограничений: ранжиры допускаются любые, а идеалы должны быть лишь характеризуемыми дифференциальными. Простые дифференциальные идеалы таковыми являются. Для доказательства основных результатов о канонических характеристических множествах в диссертации также используются утверждения, доказанные Э. Юбер[7] о связи между характеристическим множеством характеризуемого дифференциального идеала и характеристическими множествами его минималь-

[1] E. Kolchin, *Differential Algebra and Algebraic Groups.* Academic Press, New York, 1973.

[2] M. Kondratieva, A. Levin, A. Mikhalev, and E. Pankratiev, *Differential and difference dimension polynomials.* Kluwer Academic Publisher, 1999.

[3] J. Ritt, *Differential Algebra.* American Mathematical Society, New York, 1950.

[4] F. Boulier, D. Lazard, F. Ollivier, and M. Petitot, Representation for the radical of a finitely generated differential ideal. In *Proceedings of ISSAC 1995*, pages 158–166. ACM Press, 1995.

[5] F. Boulier, D. Lazard, F. Ollivier, and M. Petitot, Computing representations for radicals of finitely generated differential ideals. Technical report, IT-306, LIFL, 1997.

[6] B. Sadik, A bound for the order of characteristic set elements of an ordinary prime differential ideal and some applications. *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, 10(3):251–268, 2000.

[7] E. Hubert, Factorization-free decomposition algorithms in differential algebra. *Journal of Symbolic Computation*, 29(4-5):641–662, 2000.

ных дифференциальных простых компонент и о соответствии между характеристическим разложением регулярного дифференциального и регулярного алгебраического идеалов.

Для получения оценки на порядки для алгоритма разложения радикального дифференциального идеала на характеризуемые компоненты в диссертации используются и улучшаются методы Дж. Ф. Ритта[3], которые были им разработаны для систем линейных дифференциальных уравнений с частными производными и обыкновенных систем из двух алгебраических дифференциальных уравнений. В диссертации приводится оценка порядка дифференцирований в *обыкновенном* случае, но допускается *любое* число уравнений в системе.

Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация имеет как теоретический, так и прикладной характер. Данная работа закладывает основы для детального анализа производительности алгоритмов дифференциальной алгебры. Полученная верхняя оценка на порядок дифференцирований, имеющихся на выходе алгоритма Rosenfeld-Gröbner, может позволить получить верхнюю оценку на число операций, производимых данным алгоритмом, пользуясь оценками на число операций в чисто алгебраическом случае.

Также получена оценка на порядки элементов канонического характеристического множества характеризуемого идеала. Эта оценка позволила получить новый алгоритм преобразования характеристического разложения радикального дифференциального идеала от одного ранжира к другому[8]. Подобный алгоритм может быть реализован на компьютере, например, в системе компьютерной алгебры Maple. Предыдущие исследования по этому вопросу проводились Ф. Булье, Ф. Лемэром, М. Морено Маза[9] и О. Голубицким[10].

Результаты диссертации могут быть полезны специалистам, которые исследуют алгоритмические проблемы алгебраических дифференциальных уравнений и используют методы конструктивной дифференциальной алгебры.

[8] O. Golubitsky, M. Kondratieva, and A. Ovchinnikov. *Algebraic transformation of differential characteristic decompositions from one ranking into another.* Submitted for publication, 2007.

[9] F. Boulier, F. Lemaire, and M. Moreno-Maza, PARDI! In *Proceedings of ISSAC 2001*, pages 38–47. ACM Press, 2001.

[10] O. Golubitsky. *Gröbner walk for characteristic sets of prime differential ideals.* In: Ganzha, V., Mayr, E., Vorozhtsov, E. (Eds.), Proc. 7th Workshop on Comp. Alg. in Sc. Comp. TU München, Germany, pp. 207–221, 2000.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались:

• на семинаре по компьютерной алгебре Механико-математического факультета МГУ в 2003–2007 годах,

• на конференции «Компьютерная алгебра и ее приложения в физике» (CAAP) и семинарах по компьютерной алгебре в 2001–2007 годах в Дубне,

• на Международной алгебраической конференции, посвященной 250-летию МГУ и 75-летию кафедры высшей алгебры в МГУ в 2004 году,

• на международной конференции «Приложения компьютерной алгебры» в 2003 году (Роли, Северная Каролина) и 2004 году (Бомонт, Техас),

• на международной конференции «Компьютерная алгебра в научных вычислениях» в 2002 году (Ялта, Крым) и в 2004 году (Санкт-Петербург),

• на Колчинском семинаре по дифференциальной алгебре (Нью-Йорк) в 2004 и 2005 годах,

• на конференции по дифференциальной алгебре в Университете Линца (RISC), Австрия, в 2006 году,

• на конференции по алгебраическим методам в дифференциальных уравнениях (Эдинбург, Шотландия) в 2006 году.

Публикации

Результаты автора по теме диссертации опубликованы в 8 работах, список которых приводится в конце автореферата [1–8].

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из 5 глав (первая глава является вводной) и заключения. Библиография содержит 32 наименования. Общий объем диссертации составляет 61 стр.

Краткое содержание работы

В **первой главе**, которая является вводной, изложена краткая история вопроса, показана актуальность темы и сформулированы основные результаты.

Во **второй главе** приводятся необходимые понятия и обозначения конструктивной дифференциальной алгебры.

В **третьей главе** сформулированы классические результаты дифференциальной алгебры о характеристических множествах и соответствии между характеризуемыми алгебраическими и дифференциальными идеалами: теоремы 1–3. Данные результаты используются в диссертации.

Четвертая глава посвящена каноническим характеристическим множествам характеризуемых дифференциальных идеалов. Сначала дается определение *канонического характеристического множества* по аналогии с редуцированным базисом Гребнера. Пусть $\mathbf{k}$ — дифференциальное поле нулевой характеристики с основным множеством дифференцирований $\Delta = \{\delta_1, \ldots, \delta_m\}$ и $\Theta = \left\{\delta_1^{k_1}\delta_2^{k_2}\cdots\delta_m^{k_m}, k_i \geqslant 0\right\}$. Мы также предполагаем, что зафиксирован ранжир на множестве переменных ΘY, где $Y = y_1, \ldots, y_n$. Пусть $\mathbb{A}$ — автоf редуцированное множество в кольце дифференциальных многочленов $\mathbf{k}\{y_1, \ldots, y_n\} = \mathbf{k}[\Theta Y]$ и пусть $\mathbf{k}[N][L]$ — кольцо многочленов, ассоциированное с $\mathbb{A}$, где L — множество лидеров многочленов из $\mathbb{A}$ и N — множество нелидеров, то есть, $N = \Theta Y \setminus \Theta L$.

Определение. Характеристическое множество $\mathbb{C} = C_1, \ldots, C_p$ дифференциального идеала I называется *каноническим,* если следующие условия выполнены для $i = 1, \ldots, p$:

- инициал $\mathbf{i}_{C_i}$ зависит только от нелидеров N множества $\mathbb{C}$;
- многочлен C_i не имеет делителей в I, кроме самого C_i;
- старший коэффициент C_i относительно индуцированного лексикографического упорядочения $<_{\mathrm{lex}}$ на мономах над $N \cup L$ равен 1.

Рассмотрим $\mathbf{k}\{y_1, \ldots, y_n\}$ с $\Delta = \{\delta\}$. Это означает, что мы находимся в обыкновенном случае. *Дифференциальной размерностью* простого дифференциального идеала P называется максимальное число q, такое что $P \cap \mathbf{k}\{y_{i_1}, \ldots, y_{i_q}\} = \{0\}$. Если f — дифференциальный многочлен, то $\operatorname{ord} f$ обозначает максимальный порядок дифференциальных переменных, входящих в f. Пусть $\mathbb{A} = A_1, \ldots, A_p$ — автоf редуцированное множество. Определим порядок множества $\mathbb{A}$ следующим равенством:

$$\operatorname{ord}\mathbb{A} = \operatorname{ord} A_1 + \ldots + \operatorname{ord} A_p.$$

Если $\mathbb{C}$ — характеристическое множество простого дифференциального идеала P относительно степенного ранжира, то, по определению, порядок идеала P равен неотрицательному целому числу $\operatorname{ord}\mathbb{C}$. Обозначим через $P(s)$ множество элементов P, чей порядок меньше или равен s. Множество $P(s)$ образует простой алгебраический идеал в соответствующем кольце многочленов. Известно[1,2], что размерность $P(s)$ — многочлен от s для

$s \geqslant h = \operatorname{ord} P$. Более точно,

$$\dim P(s) = q(s+1) + \operatorname{ord} P,$$

где q — дифференциальная размерность идеала P. Более того, $q = n - p$, где p — число элементов характеристического множества идеала P относительно любого степенного ранжира. Таким образом, числа $\operatorname{ord} P$ и p не зависят от выбора степенного ранжира. Определим порядок характеризуемого дифференциального идеала.

Определение. Для характеризуемого дифференциального идеала $I = \bigcap_{i=1}^{k} P_i$, где P_i — минимальные дифференциальные простые компоненты I, определим

$$\operatorname{ord} I = \max_{1 \leqslant i \leqslant k} \operatorname{ord} P_i.$$

Доказательство основной оценки в этой главе диссертации (теорема 6)

Теорема. *Пусть $\mathbb{C} = C_1, \ldots, C_p$ — каноническое характеристическое множество характеризуемого дифференциального идеала I. Тогда*

$$\operatorname{ord} C_i \leqslant \operatorname{ord} I, \quad 1 \leqslant i \leqslant p.$$

опирается существенным образом на аналогичную оценку для простых идеалов, доказанную в диссертации (теорема 4):

Теорема. *Пусть P — простой дифференциальный идеал порядка h в $\mathbf{k}\{y_1, \ldots, y_n\}$ и $>$ —* **любой** *ранжир. Тогда существует характеристическое множество $\mathbb{C} = C_1, \ldots, C_p$ идеала P относительно ранжира $>$, такое что порядок по y_t каждого C_i не превосходит h для всех $1 \leqslant t \leqslant n$.*

В **пятой главе** рассматривается алгоритм разложения Rosenfeld-Gröbner радикального дифференциального идеала $\{F\}$, заданного конечной системой образующих F, на характеризуемые компоненты. Основной результат этой главы состоит в следующем. Пусть на вход алгоритма разложения (алгоритм 3), корректность которого доказана в предложении 5, подается конечная система F из кольца дифференциальных многочленов $\mathbf{k}\{y_1, \ldots, y_n\}$. Определим:

$$m_i(F) = \max_{f \in F} \operatorname{ord}_{y_i} f, \quad M(F) = \sum_{i=1}^{n} m_i(F).$$

Тогда все системы $\mathbb{A}$, H, получающиеся на выходе и в ходе работы алгоритма, удовлетворяют оценке

$$M(\mathbb{A} \cup H) \leqslant (n-1)! \cdot M(F).$$

Основной идеей доказательства данной оценки было заменить использование дифференциальной редукции на применение дифференцирования в начале вычисления, а затем — алгебраической редукции (см. алгоритм 2). Корректность этой процедуры доказана в предложении 4. Это и позволило оценить порядки дифференцирований, появляющиеся в алгоритме разложения. Единственным неудобством данного результата является то, что такой алгоритм может выполнять дифференцирования, в которых нет необходимости.

От этого осложнения можно избавиться и существенно повысить привлекательность и применимость данного результата. В предложении 7 и теореме 7 показывается, как избежать применения упомянутого алгоритма алгебраической редукции. В частности, доказывается, что, если получившийся остаток не удовлетворяет оценке, то можно отбросить мономы у этого остатка, не удовлетворяющие оценке, при этом сохранив корректность алгоритма. Это рассуждение подытожено в двух последних алгоритмах диссертации (см. алгоритмы 4 и 5).

Благодарности

Автор благодарит своих научных руководителей: ведущего научного сотрудника Лаборатории вычислительных методов МГУ, к. ф.–м. н. Евгения Васильевича Панкратьева и старшего научного сотрудника Лаборатории вычислительных методов МГУ, к. ф.-м. н. Марину Владимировну Кондратьеву за помощь в выборе темы исследования, внимательное руководство в процессе исследовательской деятельности и множество полезных идей. Невозможно оценить их вклад в общее образование и становление автора. Автор благодарит также за неоценимую поддержку доктора физико-математических наук, профессора кафедры высшей алгебры Александра Васильевича Михалева. Многие из результатов автора диссертации были получены на семинаре по компьютерной алгебре на Механико-математическом факультете МГУ под его руководством. Автор искренне благодарен всем участникам семинара за интересные идеи, примеры и рекомендации. Автор выражает благодарность Майклу Синеру (Michael Singer) за очень плодотворные обсуждения содержания данной работы и мотивацию. Неоценима помощь моего бессменного соавтора, к. ф.-м. н. Олега Дмитриевича Голубицкого. Автор благодарит зав. кафедрой высшей алгебры, д. ф.-м. н., профессора Виктора Николаевича Латышева и всех сотрудников кафедры высшей алгебры за доброжелательную и творческую атмосферу. Автор также благодарит к. ф.-м. н. Алексея Игоревича Зобнина и организаторов и участников ежегодного семинара по компьютерной алгебре в Дубне за оживленные дискуссии по различным вопросам компьютерной алгебры.

Работы автора по теме диссертации

[1] А. И. Овчинников, *Порядки дифференцирований в разложении радикальных дифференциальных идеалов,* Успехи математических наук **63**(2) (2008) 179–180

[2] О.Д. Голубицкий, М. В. Кондратьева и А. И. Овчинников, *Канонические характеристические множества характеризуемых дифференциальных идеалов*, Вестник МГУ. Математика, (2) (2008) 49–51

В данной работе Овчинникову А.И. принадлежит доказательство основной теоремы 2, дающей верхнюю оценку на порядки дифференцирований в каноническом характеристическом множестве простого дифференциального идеала относительно любого ранжира. Кондратьевой М.В. принадлежит доказательство теоремы 3, дающей обобщение упомянутой оценки на случай произвольных характеризуемых дифференциальных идеалов. Голубицкому О.Д. принадлежат доказательства теоремы 1 и предложения 3, дающих критерий равенства характеризуемых дифференциальных идеалов, заданных своими характеристическими множествами.

[3] М. В. Кондратьева, А. И. Овчинников, *Характеристические множества обыкновенных дифференциальных уравнений,* Программирование **31**(2) (2005) 56–63

В данной работе Овчинникову А.И. принадлежит доказательство основной теоремы 4, дающей способ вычисления характеристического множества радикального дифференциального идеала относительно степенного ранжира. Кондратьевой М.В. принадлежат формулировка основного результата и вычислительные примеры.

[4] M.V. Kondratieva, A. Ovchinnikov, *On Computing Characteristic Sets of Arbitrary Radical Differential Ideals,* в трудах конференции Applications of Computer Algebra 2004 (ACA 2004) 38–48

В данной работе Овчинникову А.И. принадлежат доказательства основных результатов, находящихся в теоремах 4 и 5 и формулировка теоремы 5. Эти теоремы позволяют вычислять характеристические *множества как в обыкновенно случае, так и в случае частных производных. Кондратьевой М.В. принадлежат формулировка теоремы 4, алгоритмы 1 и 2, вычислительные примеры и гипотеза, находящаяся в разделе 6.*

[5] A. Ovchinnikov, *Computation of Characteristic Sets of Radical Differential Ideals*, в трудах конференции Computer Algebra in Scientific Computing 2004 (CASC 2004) 371–378

[6] А. И. Овчинников, *Характеризуемые радикальные дифференциальные идеалы и некоторые свойства характеристических множеств,* Программирование **30**(3) (2004) 33–43

[7] A. Ovchinnikov, *On Characterizable ideals and characteristic sets,* Contributions to General Algebra **14** (2004) 91–108

[8] А. Овчинников, *Сечения над дифференциальным спектром и вычисления, не использующие факторизацию,* Фундаментальная и прикладная математика, том 9, вып. 3 (2003) 133–144