Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Механико-Математический факультет

На правах рукописи
УДК 515.16

Граев Михаил Маркович

# Оценка числа инвариантных эйнштейновых метрик на однородных пространствах

Специальность:
01.01.04 – геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Москва - 2008

Работа выполнена на кафедре высшей геометрии и топологии Механико-Математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова

**Научный руководитель:**
доктор физико-математических наук,
профессор Алексей Викторович Чернавский.

**Официальные оппоненты:**
доктор физико-математических наук,
профессор Эрнест Борисович Винберг;
доктор физико-математических наук,
профессор Аркадий Львович Онищик.

**Ведущая организация:**
Санкт-Петербургское Отделение Математического
Института им. В.А.Стеклова РАН.

Защита диссертации состоится 6 июня 2008 г. в $16^{40}$ на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Российская Федерация, Москва ГСП-1, Ленинские горы, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-Математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-Математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 6 мая 2008г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д.501.001.84 при МГУ
доктор физ.-мат. наук, профессор А. О. Иванов.

## Общая характеристика работы.

**Актуальность темы.** Важный класс римановых однородных пространств $M$ составляют изотропно неприводимые пространства, классифицированные О.Мантуровым и, позднее, независимо, Дж.Вольфом [1]. Каждая инвариантная риманова метрика $g$ на таком пространстве удовлетворяет уравнению Эйнштейна $\mathrm{ricci}(g) = \lambda g$.

В частности, этот класс однородных пространств включает неприводимые римановы симметрические пространства с действиями полных связных групп изометрий. Открытие симметрических пространств Э.Картаном [2] около 1926 г. и последовавшее построение теории этих пространств явились одними из главных достижений XX века.

В диссертации изучается более широкий класс однородных пространств $M = G/H$ с однократным спектром представления изотропии. Этот класс содержит, наряду с редко встречающимися, многие из наиболее значительных однородных пространств $M$ (их рассмотрение в рамках одного класса продиктовано сходством многообразий инвариантных метрик). Важными представителями этого класса являются все компактные однородные пространства положительной эйлеровой характеристики, в том числе все (обобщенные) флаговые пространства. Под флаговым пространством понимается факторпространство связной полупростой компактной группы Ли $G$ по централизатору любого тора в $G$.

Основными примерами флаговых пространств являются комплексное $n$-мерное проективное пространство $\mathbb{C}P^n$, грассманово многообразие $\mathrm{Gr}_{k+1,n+1}$, точками которого являются $k$-мерные подпространства пространства $\mathbb{C}P^n$, и пространство флагов, точками которого являются последовательности двух и более вложенных друг в

---

[1] О.В.Мантуров. *Однородные несимметрические римановы пространства с неприводимой группой вращений.* ДАН СССР, 141 (1961), 792–795. *Римановы пространства с ортогональными и симплектическими группами движений и неприводимой группой вращений.* ДАН СССР, 141 (1961), 1034–1037. *Однородные римановы многообразия с неприводимой группой изотропии.* Труды семинара по векторному и тензорному анализу, 13 (1966), 68–145.

J.A. Wolf, *The geometry and structure of isotropy irreducible homogeneous spaces,* Acta. Math. 120 (1968) 59-148. *Erratum,* Acta. Math. 152 (1984) 141-142.

Продолжение классификации на случай изотропно неприводимых пространств, где связная подгруппа изотропии приводима: M.Y. Wang and W. Ziller, *On isotropy irreducible Riemannian manifolds,* Acta Math. 199 (1991) 223-261.

[2] E.Cartan. *Sur une classe remarquable d' espaces de Riemann,* Oeuvres complètes, t.I, vol. 2, 587–659. Имеется сокращенный перевод с фр. в сб.: Э.Картан, *Геометрия групп Ли и симметрические пространства,* М.: ИЛ, 1949, на с. 112–149.

друга подпространств пространства $\mathbb{C}P^n$; первые два из них являются симметрическими; пространство флагов является изотропно приводимым. Несомненно, роль уже только этих трех однородных пространств в математике и математической физике огромна.

По теореме Вана (1954г) флаговые пространства, и только они, составляют класс односвязных компактных однородных пространств кэлерова типа [3]. Известно, что каждое флаговое пространство $M$ допускает одну и только одну, с точностью до пропорциональности,
инвариантную метрику Кэлера-Эйнштейна для каждой пары противоположных инвариантных комплексных структур в $M$. Описание инвариантных комплексных структур в $M$ и соответствующих кэлеровых конусов восходит к классическому описанию камер Вейля. Теория инвариантных метрик Кэлера и Кэлера–Эйнштейна во флаговых пространствах была построена в основном вскоре после работы Вана в классических статьях [4] Бореля, Кошуля, Хано, Мацусимы, Бореля–Хирцебруха[5] в 1954-1958гг. и позднее совершенствовалась [6].

Теория некэлеровых инвариантных метрик Эйнштейна во флаговых пространствах далека от завершения.

В классе изотропно приводимых пространств с однократным спектром представления изотропии задача *описания инвариантных метрик Эйнштейна* и даже *оценки их числа* решена только для метрик специального вида, например, для метрик Кэлера-Эйнштейна во флаговых пространствах, о которых только что говорилось. Отсюда очевидна актуальность их рассмотрения в общем случае.

---

[3] H.C. Wang. *Closed manifolds with homogeneous complex structure.* Amer., J. Math., 76 (1954), 1–32.

[4] A. Borel, *Kählerian coset spaces of semi-simple Lie groups,* Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 40 (1954), No 12, 1147-1151.

J.L. Koszul, *Sur la forme hermitienne canonique des espaces homogènes complexes,* Canad. J. Math., 7 (1955), No. 4, 562–576.

J.I. Hano, *On Kähelrian homogeneous spaces of unimodular Lie groups,* Amer. J. Math., 79 (1957), 885–900.

Y. Matsushima. *Sur les espaces homogǹes kählerіes d'un groupe de Lie réductif,* Nagoya Math. J., 11, 53–60 (1957), J.I. Hano and Y. Matsushima, *Some studies of Kähelrian homogenous spaces,* Nagoya Math. J., 11, 77–92 (1957), Y. Matsushima. *Sur la structure du groupe d'homéomorphismes analitiques d'une sertaine variété kählerienne,* Nagoya Math. J., 11, 145–150 (1957).

[5] A. Borel and F. Hirzebruch, Characteristic classes and homogeneous spaces I, Amer. J. Math. 80 (1958), No 2, 458–538.

[6] См., в частности: Y. Matsushima, *Remarks on Kähler-Einstein manifolds.* Nagoya Math. J., 46, 161–173 (1972).

Данная работа посвящена оценке числа решений алгебраического уравнения Эйнштейна, точнее, уравнения Эйнштейна для гомотетических классов инвариантных метрик на однородном пространстве $M = G/H$ группы Ли $G$ с компактной подгруппой изотропии $H$ и с однократным спектром представления изотропии.

**Цель работы.** Оценка числа голоморфных инвариантных метрик Эйнштейна (рассматриваемых с точностью до пропорциональности) в комплексификациях однородных пространств $M = G/H$ с однократным спектром представления изотропии. Нахождение конструкций комбинаторики и линейной алгебры, которые могут использоваться для практической оценки при заданном $M$.

**Основные методы исследования.** Средства римановой геометрии и теории однородных пространств. Сжатия алгебр Ли, групп Ли, однородных пространств и т. д. Элементы комплексной алгебраической геометрии. Используется теория систем рациональных алгебраических уравнений (Лорана), построенная в работах А.Г.Кушниренко и Д.Н.Бернштейна. Комплексные торические многообразия лишь упоминаются (из них рассматривается только $\mathbb{C}P^3 \times \mathbb{C}P^2$); вместо них непосредственно привлекаются многогранники Ньютона, которыми эти многообразия задаются.

**Научная новизна.** Основные результаты диссертации являются новыми. Развит подход, основанный на сопоставлении однородному пространству $M$ с однократным спектром представления изотропии (в частности, каждому флаговому пространству) компактного выпуклого целочисленного многогранника $P = P_M$ и ассоциированного с $P$ торического многообразия, которое является компактификацией комплексифицированного пространства инвариантных метрик на $M$.

Введен инвариант $\nu(M) = \operatorname{vol}(P)/\operatorname{vol}(S)$ ($S$ — стандартный симплекс) однородной структуры на $M$, названный целым числом Ньютона, такой, что для отличного от тора компактного пространства Эйнштейна $M$ выполняется неравенство $\nu(M) > 0$.

Основные результаты диссертации состоят в следующем.

Показано, что наличие отклонения $\delta_M \neq 0$ числа изолированных комплексных решений алгебраического уравнения Эйнштейна в $M$ от числа $\nu(M)$ (при $\nu(M) > 0$) приводит к существованию таких решений в подходящем сжатии однородного пространства $M$.

Показано, что для изучения $\delta_M$ можно использовать сжатия пространства $M{=}G/H$, локально изометричные прямым произведениям сжатий слоя и базы $G$-эквивариантной римановой субмерсии $G/H \to$

$G/K$, где $H \subset K$. Для нумерации сжатий (в некоторых важных случаях) использованы метрические графы.

**Теоретическая ценность.** Диссертация имеет теоретический характер. Ее результаты могут применяться для исследования пространств модулей инвариантных метрик Эйнштейна. Полезно было бы попытаться перенести их на различные классы эйнштейновых метрик.

**Апробация работы.** Результаты работы докладывались на международной конференции Euler and Modern Combinatorics (St.-Petersburg, June 1-7 2007) и на следующих семинарах мех-мат факультета МГУ: на кафедральном семинаре кафедры высшей геометрии и топологии, на семинаре им. М.М. Постникова, руководимом В.М. Бухштабером и А.В. Чернавским, и на семинаре Э.Б. Винберга и А.Л. Онищика "Группы Ли и теория инвариантов".

**Публикации.** Основные результаты работы опубликованы в двух работах автора, полные названия которых приведены в конце реферата [1-2].

**Структура и объем диссертации.** Диссертационная работа изложена на 110 страницах и состоит из введения и трех глав. Библиография включает 21 наименование.

## Краткое содержание работы.

Рассматривается класс связных римановых однородных пространств $M = G/H$ ($G$ — не обязательно связная группа Ли, $H$ — компактная подгруппа) с однократным спектром представления изотропии $\iota : H \to GL(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$.

Через $d$ обозначается число неприводимых компонент в $\iota$.

Пространство инвариантных римановых метрик на $M$ является конусом $(\mathbb{R}_{>0})^d$.

Точки пространства $(\mathbb{C} \setminus 0)^d$ называются комплексными инвариантными метриками в вещественном многообразии $M = G/H$. Если существует комплексификация $M^{\mathbb{C}} = G^{\mathbb{C}}/H^{\mathbb{C}}$ однородного пространства $M$, то они соответствуют голоморфным метрикам в $M^{\mathbb{C}}$. С точностью до накрытий $M \leftarrow \widetilde{M} \to M'$ пространство $M$ всегда обладает односвязной комплексификацией. Комплексные инвариантные метрики (Эйнштейна) в $M$ — это ограничения голоморфных инвариантных метрик (соответственно метрик Эйнштейна) в $G^{\mathbb{C}}/H^{\mathbb{C}}$ на вещественную часть.

В §1 дается оценка числа изолированных комплексных метрик Эйнштейна в $M$, рассматриваемых с точностью до гомотетии, т.е. до постоянного множителя. Утверждается, что оно не превосходит целого числа $\nu(M) < 6^{d-1}$, названного числом Ньютона. Следовательно, число гомотетических классов комплексных метрик Эйнштейна конечно, если и только если каждый из них можно изолировать от остальных (в классической топологии в $(\mathbb{C} \setminus 0)^{d-1}$).

В 2004 г. К.Бём, М.Ван и В.Циллер опубликовали доказательство компактности пространства и пространства модулей положительно определенных инвариантных метрик Эйнштейна объема 1 на любом компактном однородном многообразии с конечной фундаментальной группой [7)]. Это привело их к гипотезе о конечности множества гомотетических классов положительно определенных инвариантных метрик Эйнштейна положительной скалярной кривизны $s > 0$ в однородном пространстве $M = G/H$ с однократным спектром представления изотропии. Естественно сформулировать такую же гипотезу для г.к. комплексных метрик Эйнштейна в $M$ (где $M$ компактно, а $s \neq 0$).

Следующие утверждения из диссертационной работы показывают, что обе эти гипотезы справедливы по крайней мере в случае выполнения некоторых условий типа "общего положения" для $M$, и позволяют эффективно находить эти случаи.

При $d = 1$ инвариантная риманова метрика на $M$ единственна, с точностью до гомотетии, и является эйнштейновой (по замечанию [8)] еще Э.Картана). Тогда мы полагаем по определению $\nu(M) = 1$.

При $d > 1$ система уравнений Эйнштейна для инвариантных голоморфных метрик на $M^{\mathbb{C}}$ является системой $d-1$ однородных рациональных алгебраических уравнений (Лорана) для $d$ переменных. Переходя от инвариантных метрик к их гомотетическим классам (г.к.), получаем такую же систему неоднородных уравнений для $d-1$ переменных. Имеется теория Кушниренко – Бернштейна таких систем уравнений[9)]. В силу этой теории выполняется следующее.

1) *Число $\mathcal{E}(M)$ изолированных решений с учетом кратностей*

---

[7)]C. Böhm, M. Wang, W. Ziller. *A variational approach for compact homogeneous Einstein manifolds.* Geom. Funct. Anal. 14 (2004), 681-733.

[8)]E.Cartan. *Sur la détermination d'un système orthogonal complet dans un espace de Riemann symmetric clos.* Rendic. di Circ. Matem. di Palermo 53 (1929) 217–252

[9)]Д.Н.Бернштейн. *Число корней системы уравнений.* Функциональный Анализ и его приложения, 9 (1975), вып. 3. 1–4.

A.G.Kouchnirenko, *Polyèdres de Newton et nombres de Milnor.* Invent. Math., 32 (1976) No.1, 1–31.

А.Г.Кушниренко. *Многогранники Ньютона и теорема Безу.* Функциональный Анализ и его приложения, 10 (1976), вып. 3. 82–83.

*не превосходит объема соответствующего компактного выпуклого многогранника Ньютона $X$, отнесенного к объему стандартного $d-1$-мерного симплекса $S$;*

$$\mathcal{E}(M) \leqslant \nu(M) = \mathrm{vol}(X)/\,\mathrm{vol}(S).$$

2) *В случае равенства $\mathcal{E}(M) = \nu(M) > 0$ все решения изолированы.*

3) *Равенство $\mathcal{E}(M) = \nu(M)$ при $\nu(M) > 0$ имеет место в том и только том случае, когда "сужение системы уравнений" на каждую $p$-грань многогранника $X$, где $0 < p < d-1$, не имеет решений в $(\mathbb{C} \setminus 0)^d$ (т.е. выполнено дискриминантное условие Д.Н.Бернштейна).*

Здесь сужение произвольного ряда Лорана на грань многогранника $X$ означает сумму членов ряда с показателями, принадлежащими этой грани. Компактность $M$ не предполагается.

Имеем $\nu(M) \in \mathbb{Z}$. Целое число $\nu(M)$ названо *числом Ньютона.*

Возникают вопросы об эффективной проверке и выполнимости условий $\nu(M) > 0$ (т.е. $\dim X = d-1$, где $d > 1$) и $\mathcal{E}(M) = \nu(M)$. Ответ на эти вопросы приводится ниже.

**Предложение.** *В классе однородных пространств $M = G/H$ полупростых групп Ли $G$ выполняется неравенство $\nu(M) > 0$ и, для некоторых $M$, достигается равенство $\mathcal{E}(M) = \nu(M)$.*

Например, на $M = SU_3/T^2$ существуют 4 попарно негомотетичные положительно определенные метрики Эйнштейна (изучавшиеся Д.В.Алексеевским [10], 1986), и $\nu(M) = 4$. Но, как показано в диссертации, $\mathcal{E}(M) < \nu(M)$ для факторпространств $M$ простых компактных групп Ли по их максимальным торам, кроме $M = SU_{l+1}/T^l$, $l = 1, 2$.

**Достаточные условия положительности числа Ньютона. Однородные пространства класса a.** В диссертации показано, что условие $\nu(M) > 0$ влечет унимодулярность группы $G$ и что $\nu(M) > 0$ в случае полупростой группы Ли $G$. Условие

$$X \supset S$$

влечет полупростоту группы $G$. Однородные пространства $M$, для которых $X \supset S$, составляют важный класс **a**. Класс **a** включает, например, любые компактные однородные пространства положительной эйлеровой характеристики и, в частности, все флаговые пространства компактных полупростых групп Ли $G$.

[10] D. V. Alekseevsky. *Homogeneous Einstein metrics,* in : Differential Geometry and its Applications, communications. (Proceedings of Brno Conference, 1986). Univ. of J. E. Purkyně, Brno, 1987, 1-21.

Однако, обобщенные расслоения Хопфа $M$ над флаговыми пространствами $M'$ этому классу не принадлежат (под обобщенным расслоением Хопфа понимается расслоение единичных окружностей любого обильного голоморфного линейного расслоения над $M'$).

**Многогранник Ньютона $P_M$. Критерий равенства $\nu(M) = \mathcal{E}(M)$ и его достижимость.** В §1 каждому однородному пространству $M$ с простым спектром представления изотропии сопоставлен компактный выпуклый многогранник $P = P_M$ — многогранник Ньютона многочлена Лорана $s(t)$, $t = (t_1, \dots, t_d)$, выражающего скалярную кривизну инвариантной метрики $t$ :

$$P = \mathrm{Nw}(s).$$

В диссертации показано, что в случае унимодулярной группы Ли $G$

$$X = P$$

(на самом деле равенство $X = P$ выполняется и в неунимодулярном случае за некоторыми исключениями, которые можно легко описать, рассматривая пространство Лобачевского $L^n$ с транзитивным действием расширения $\mathbb{R} \rightthreetimes \mathbb{R}^{n-1}$ посредством сохраняющей точку группы изометрий $H$). В §1 равенство $X = P$ для унимодулярного случая объясняется исходя из вариационного принципа для семейства всех инвариантных метрик — теоремы Гильберта–Йенсена, доказательство которой приводится в §4. С использованием этой теоремы и дискриминантных условий Д.Н.Бернштейна доказано следующее предложение.

Пусть $s_\gamma(t)$ — сужение многочлена Лорана $s(t)$ на грань $\gamma \subset P$.

**Предложение.** *Пусть $G$ — полупростая группа Ли. Тогда неравенство $\mathcal{E}(M) \neq \nu(M)$ выполняется, если и только если для некоторой $p$-грани $\gamma$ многогранника Ньютона $P$ такой, что $0 < \dim(\gamma) < d-1$, комплексная гиперповерхность в $(\mathbb{C} \setminus 0)^d$, заданная уравнением $s_\gamma(t) = 0$, имеет хотя бы одну особую точку.*

С учетом этого критерия построены бесконечные серии однородных пространств $M = G/H$ компактных простых групп Ли $G$ с фиксированным многогранником Ньютона $P_M = P$, в которых равенство

$$\mathcal{E}(M) = \nu(M)$$

достигается для всех или для большинства членов.

Достижимость равенства $\mathcal{E}(M) = \nu(M)$ является одним из основных сделанных в диссертации наблюдений. Этим наблюдением мотивировано дальнейшее изучение многогранника Ньютона $P = Nw(s)$. Кроме того, оно показывает достаточность верхней оценки числа $\mathcal{E}(M)$ объемом многогранника $P$,

$$\mathcal{E}(M) \leqslant \nu(M) = \operatorname{vol}(P_M)/\operatorname{vol}(S)$$

(основанной на теореме А.Г.Кушниренко) вместо более тонкой верхней оценки числа $\mathcal{E}(M)$ смешанным объемом Минковского нескольких многогранников (основанной на теореме Д.Н.Бернштейна).

**Теоремы главы 1.** Основные результаты диссертации сформулированы в трех теоремах главы 1, доказательства которых приводятся в главах 1 и 2. В главе 3 рассматриваются частные случаи.

В §2 доказана теорема о двойственности между многогранником $P = P_M$ и конусом, состоящим из фильтраций некоторой алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{g}}$ или $\mathfrak{j}$, удовлетворяющих простому условию допустимости.

Считая $M$ односвязным или имеющим односвязную комплексификацию, мы можем заменить группу $G$ группой $J$ всех изометрий, сохраняющих сразу все $G$-инвариантные римановы метрики (или, что эквивалентно, одну такую метрику, находящуюся в общем положении). Можно также заменить $G$ некоторым "расширением" $\widehat{G} \subset J$ (посредством тора). В диссертации группа $\widehat{G} \supset G$ явно строится по $G$. В неодносвязном случае соответствующие алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{g}}$ и $\mathfrak{j}$ можно определить как подалгебры полной алгебры Ли ростков киллинговых векторных полей в точке $eH \in G/H$ по отношению к фиксированной инвариантной римановой метрике в $G/H$.

Под фильтрацией алгебры Ли $\mathfrak{g}$ понимается возрастающая фильтрация $(F_a\,\mathfrak{g})_{a\in\mathbb{R}}$ :

$$\ldots \subset F_a\,\mathfrak{g} \subset \ldots \subset F_{a+1}\,\mathfrak{g} \subset \ldots, \qquad [F_a\,\mathfrak{g}, F_b\,\mathfrak{g}] \subset F_{a+b}\,\mathfrak{g}\,,$$

которая является исчерпывающей и отделимой, и для которой функция $a \mapsto \dim(F_a\,\mathfrak{g})$ является полунепрерывной сверху. Фильтрация $F$ называется допустимой, если

$$\mathfrak{h} \subset F_0\mathfrak{g}, \qquad \operatorname{Ad}(H)\cdot F_a\mathfrak{g} = F_a\mathfrak{g} \qquad \forall a \in \mathbb{R}\,.$$

Через $\mathcal{C}(P)$ обозначен двойственный конус многогранника Ньютона $P$, являющийся выпуклым $d$-мерным многогранным конусом в $\mathbb{R}^d$ :

$$\mathcal{C}(P) = \{f \in \mathbb{R}^d : \langle x, f\rangle \leqslant 0\ \forall x \in P\}$$

Доказана следующая теорема (см. теорему 2.1):

1) *Для пространств $M$ класса* **a**

$$\mathcal{C}(P) = \{\textit{допустимые фильтрации алгебры Ли } \mathfrak{g}\}$$

2) *Равенства из п.1) можно добится для каждого однородного пространства $M$ унимодулярной группы Ли $G$ с простым спектром представления изотропии, заменяя, в случае надобности, $G$ на любую из упоминавшихся групп $J$ или $\widehat{G} \subset J$.*

3) *Если* $\mathfrak{g}$ *полупроста, то* $\mathfrak{j}$ *редуктивна и* $\widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{c}$*, где* $\mathfrak{c}$ *— центр алгебры Ли* $\mathfrak{j}$ *(явно описанный в диссертации). Пространство* $M$ *принадлежит классу* $\mathbf{a}$*, если и только если* $\mathfrak{j}$ *полупроста.*

В §2 приводится описание конуса $\mathcal{C}(P)$ многогранника Ньютона $P = Nw(s)$ и носителя $\mathrm{supp}(s)$ для любого однородного пространства $M = G/H$ полупростой группы Ли $G$ с простым спектром представления изотропии, состоящим из $d$ неприводимых слагаемых.

В частном случае однородного пространства $M$ класса $\mathbf{a}$ конус $\mathcal{C}(P)$ задается неравенством треугольника

$$f(i) + f(j) \geqslant f(k) \quad \forall\, (i, j, k) \in \mathrm{T},$$

где $\mathrm{T} \subset [d] \times [d] \times [d]$ — *симметричное тройное отношение* на множестве индексов $[d] = \{1, \dots, d\}$, нумерующих части спектра. (Тройное отношение $\mathrm{T}$ названо инвариантом де Зибенталя однородного пространства $M$.) Во Введении это описание конуса $\mathcal{C}(P)$ специализировано для односвязного пространства $M$, $\chi(M) > 0$.

Приведем описание конуса $\mathcal{C}(P)$ в случае флагового пространства $M = G/H$, т.е. факторпространства полупростой компактной группы Ли $G$ по централизатору $H$ любого тора в $G$. Пусть $T \subset H$ — максимальный центральный тор группы $H$. Пусть $\Omega = \{\omega_1, -\omega_1, \dots, \omega_d, -\omega_d\}$ — полная система ненулевых характеров естественного представления тора $T$ в пространстве $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$. Следуя Д.В.Алексеевскому и А.М.Переломову[11], будем называть $\Omega$ *системой* $T$*-корней* флагового пространства $M$. Тогда $\mathcal{C}(P)$ является конусом четных неотрицательных функций $f : \Omega \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, удовлетворяющих неравенству треугольника:

$$\mathcal{C}(P) = \{f : f(\omega) = f(-\omega) \geqslant 0,\ f(\alpha) + f(\beta) \geqslant f(\gamma) \text{ при } \alpha + \beta + \gamma = 0\}.$$

Из этого описания ясно, что многогранник Ньютона $P$ флагового пространства $M$ зависит только от системы $T$-корней $\Omega$, которую достаточно рассматривать с точностью до автоморфизмов решетки $\mathbb{Z}\,\Omega = \mathbb{Z}^k$, т.е.

$$P = P(\Omega).$$

В работе дана следующая классификация систем $T$-корней $\Omega$ флаговых пространств классических простых компактных групп Ли с точностью до изоморфизмов решеток $\mathbb{Z}\,\Omega$ (уточнение классификации, данной в статье Алексеевского и Переломова):

[11]Д.В.Алексеевский, А.М.Переломов. *Инвариантные метрики Кэлера–Эйнштейна на компактных однородных пространствах.* Функциональный Анализ и его приложения, 20 (1986), вып. 3. 1–16.

1) классические системы корней типа $A_k$, $C_k$ и неприведенные системы корней $BC_k$,
2) неполные системы корней следующих типов:

$$D_k, \ldots, C_{k,j-1}, C_{k,j}, \ldots, C_k, \quad B_k, \ldots, BC_{k,j-1}, BC_{k,j}, \ldots, BC_k,$$

(среди которых системы корней $B_k = BC_{k,0}$ и $D_k = C_{k,0}$), где $X_{k,j-1}$ получается из из $X_{k,j}$ исключением пары противоположных длинных корней; $1 \leqslant j \leqslant k$. Каждой из этих систем, кроме $D_k$, $k > 3$, отвечают бесконечные серии пространств $M$ с общим многогранником Ньютона $P = P(\Omega)$. Между перечисленными системами $T$-корней существует несколько изоморфизмов, в том числе $A_1 \simeq B_1 \simeq C_1$, $A_2 \simeq C_{2,1}$.

В диссертации в качестве примеров рассматриваются серии флаговых и иных однородных пространств с многогранниками Ньютона
$P(A_2)$ – правильный треугольник,
$P(B_2)$ – трехмерная призма,
$P(A_3)$ – прямое произведение тетраэдра и правильного треугольника,
и другими многогранниками Ньютона, в том числе $P(G_2)$.

Во Введении перечислены простые (т.е. двойственные к симплициальным) многогранники $P$, служащие многогранниками Ньютона флаговых пространств $M = G/H$ компактных простых групп Ли $G$ (простота многогранника является сильным дополнительным условием на $M$). Это, прежде всего, точка, соответствующая эрмитовым симметрическим пространствам, и еще 5 многогранников $P$, а именно: отрезок, трапеция, а также $P(A_2)$, $P(B_2) = \triangle_2 \times \mathrm{I}$ и $P(A_3) = \triangle_3 \times \triangle_2$.

В §3 каждой грани $\gamma \neq P$ многогранника Ньютона $P = P_M$ однородного пространства $M = G/H$ сопоставлено новое однородное пространство $M_\gamma = G_\gamma/H_P$ с простым спектром представления изотропии такое, что $P_{M_\gamma} = \gamma$. Оно является, грубо говоря, сжатием однородного пространства $M$.

При $\nu(M) > 0$ наличие положительного дефекта $\nu(M) - \mathcal{E}(M) > 0$ интерпретировано как условие существования голоморфной метрики Эйнштейна $g_\gamma$ в комплексификации хотя бы одного из пространств $M_\gamma$, $\varnothing \subsetneqq \gamma \subsetneqq P$.

Показано, что если $G$ полупроста, то каждая инвариантная комплексная метрика Эйнштейна в $M_\gamma$ имеет нулевую скалярную кривизну, и установлено взаимнооднозначное соответствие этих метрик и особых точек поверхности $s_\gamma(t) = 0$ в $(\mathbb{C} \setminus 0)^d$. Это позволяет интерпретировать неравенство $\mathcal{E}(M) < \nu(M)$ как условие существования у $M$ риччи-плоских сжатий $M_\gamma$ (теорема 3.1).

В определении $M_\gamma$ и $\mathfrak{g}_\gamma$ имеется произвол. В случае однородного пространства $M$ класса **a** пространство $M_\gamma$ можно определить как сжатие однородного пространства $M$ и алгебру Ли $\mathfrak{g}_\gamma$ — как сжатие Иненю–Вигнера алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Вместо сжатия Иненю–Вигнера можно, перейдя на алгебраический язык, говорить о переходе к градуированной алгебре $\mathfrak{g}_\gamma$ от фильтрованной алгебры Ли $\mathfrak{g}$. При этом используется фильтрация $F\mathfrak{g}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$, соответствующая точке общего положения в пересечении конуса $\mathcal{C}(P)$ векторным подпространством $\gamma^\perp \subset \mathbb{R}^d$ ($\gamma^\perp$ — ортогональное дополнение множества $\gamma$, а $\gamma^\perp \cap \mathcal{C}(P)$ — грань многогранного конуса $\mathcal{C}(P)$). Фильтрация $F\mathfrak{g}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ полностью определяет алгебру Ли $\mathfrak{g}_\gamma$. В общем случае (при любом $M$) в определениях $M_\gamma$ и $\mathfrak{g}_\gamma$ группа $G$ заменяется на $\widehat{G}$ или $J$ и используются фильтрации $F\widehat{\mathfrak{g}}$ или $F\mathfrak{j}$ алгебр Ли $\widehat{\mathfrak{g}}$ или $\mathfrak{j}$ соответственно.

В §3.2 построены примеры сжатий пространства $M$, приводящих к появлению положительного дефекта $\delta_M = \nu(M) - \mathcal{E}(M) > 0$.

Далее в §3.3 рассматривается последовательность компактных групп Ли $H \subset K \subset G$ и эквивариантное отображение

$$\pi : G/H \to G/K$$

такие, что база $M' = G/K$, тотальное пространство $M = G/H$ и (в естественном смысле) связная компонента $M''$ слоя $K/H$ содержатся в классе **a**. Снабдим $M$ инвариантной римановой метрикой, по отношению к которой $\pi$ будет римановой субмерсией. Теория сжатий таких римановых субмерсий $\pi$ развивается отдельно в главе 2 (§6). Дается критерий того, что сжатие тотального пространства $M$ локально изометрично прямому произведению сжатий слоя и базы. Из этого критерия легко выводится следующая теорема (теорема 3.2):

a) *если $\mathcal{E}(M'') < \nu(M'')$ то $\mathcal{E}(M) < \nu(M)$;*
b) *при $\mathcal{E}(M') < \nu(M')$ и некотором дополнительном условии также $\mathcal{E}(M) < \nu(M)$.*

Дается оценка дефекта $\delta_M$ при условиях типа общего положения.

В силу a), доказательство следующего предложения сводится к исследованию трех случаев $M = Sp_2/T^2$, $SU_4/T^3$, $G_2/T^2$ (рассмотренных вместе с другими примерами в §7.2, 7.3 и 8.6):

**Предложение.** *Пусть $G$ — компактная простая группа Ли ранга $n \geqslant 2$, $T^n$ — ее максимальный тор, $M = G/T^n$. Тогда или $\nu(M) \neq \mathcal{E}(M)$, или $M = \mathrm{SU}_3/T^2$.*

**Частные случаи.** Остановимся на простом примере. Легко проверяется, что $\mathcal{E}(SU_3/T^2) = \nu(SU_3/T^2) = 4$. В этом случае $d = 3$. Конус $\mathcal{C}(P)$ в $\mathbb{R}^3$ задается неравенством треугольника:

$$x_1 + x_2 - x_3 \geqslant 0,$$
$$x_1 - x_2 + x_3 \geqslant 0,$$
$$-x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 0.$$

Многогранник Ньютона $P$ является треугольником в $\mathbb{R}^3$ с вершинами $(-1,-1,1)$, $(-1,1,-1)$, $(1,-1,-1)$. В нем содержится, очевидно, стандартный треугольник $S$ с вершинами $(-1,0,0)$, $(0,-1,0)$, $(0,0,-1)$. Поэтому всякое однородное пространство $M = G/H$ с многогранником Ньютона $P_M = P$ принадлежит классу **a**, в частности, $G$ полупроста. В диссертации приводится необходимое и достаточное условие равенства $\mathcal{E}(M) = 4$ и бесконечная серия пространств $M$ с $\mathcal{E}(M) = 4$. Проверка этого условия (признак 7.2) не требует вычислений [12].

В §7 и §8 рассматривается десять многогранников $P$, семь из которых являются простыми, т.е. двойственными к симплициальным многогранникам. Для каждого из них строится серия компактных однородных пространств $M$ с фиксированным многогранником Ньютона $P_M = P$. В большинстве случаев выполняется равенство $\nu(M) = \mathcal{E}(M)$. Часто оно следует без вычислений из признаков 7.1 и 7.2. Появляются также исключения с положительным дефектом $\delta_M = \nu(M) - \mathcal{E}(M) > 0$. Найдены явные формулы для $\delta_M$.

Например, рассмотрен пятимерный простой многогранник

$$P(A_3) = \triangle_3 \times \triangle_2,$$

соответствующий системе корней $\Omega$ типа $A_3$ (примеры 1.4, 1.5, 3.2, 7.3). Он является многогранником Ньютона однородного пространства $\mathrm{SU}_4/T^3$ (см. пример 1.7 и замечание 7.2). Соответствующее число Ньютона равно 80, $\nu = \nu(P(A_3)) = 80$. В §7.3 приводится следующая бесконечная серия однородных пространств $M = G/H$ с многогранником Ньютона $P(A_3)$ :

$$\mathrm{SU}_n/\mathrm{S}(\mathrm{U}_{n_1} \times \ldots \times \mathrm{U}_{n_4}),\ (n_i \geqslant 1),\ \mathrm{Sp}_n/\mathrm{Sp}_{n_1} \times \ldots \times \mathrm{Sp}_{n_4},\ (n_i \geqslant 1),$$
$$\mathrm{SO}_n/\mathrm{SO}_{n_1} \times \ldots \times \mathrm{SO}_{n_4},\ ((n_1, n_2) \neq (1,1), (2,2); n_3 \geqslant 3, n_4 \geqslant 3),$$

[12] Число положительно определенных инвариантных эинитйновых метрик на однородных пространствах с этим треугольником $P$ достигает 4-х, например, для флаговых пространств (М.Кимура, 1990). О случаях равенства и неравенства 4-м см.: А.М.Ломшаков, Ю.Г.Никоноров и А.В.Фирсов. *Инвариантные эйнштейновы метрики на локально трисимметрических пространствах,* Siberian Adv. Math. 14 (2004), no. 3, 43-62 (Translation of Mat. Tr. 6 (2003), no. 2, 80-101)

где $n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$. В §7.3 показано, что для этих пространств $M$ дефект $\delta = 80 - \mathcal{E}(M)$ принимает пять значений: $0, 2, 4, 12, 18$ (в зависимости от $n_1$, $n_2$, $n_3$, $n_4$). Именно, *пусть*

$$\mathrm{f} = n_2 n_3 - n_1 n_4, \quad \mathrm{d}_\epsilon = \det\begin{pmatrix} n + n_1 + n_4 + \epsilon & (n_1 + n_4 + \epsilon)\, n_1 n_4 \\ n + n_2 + n_3 + \epsilon & (n_2 + n_3 + \epsilon)\, n_2 n_3 \end{pmatrix},$$

*где* $\epsilon = 0, 1, -2$, *соответственно, для* $G = \mathrm{SU}_n$, $\mathrm{Sp}_n$, $\mathrm{SO}_n$, *и пусть* $n_1 \leqslant n_2 \leqslant n_3 \leqslant n_4$. *Тогда*

1) $80 = \mathcal{E}(M)$, *если и только если* $\mathrm{f} \neq 0$, $\mathrm{d}_\epsilon \neq 0$*;*

2) *дефект* $\delta = 80 - \mathcal{E}(M)$ *положителен только в следующих* 4-*х случаях:*

$$\delta = \begin{cases} 18 & \textit{при } n_1 = n_2 = n_3 = n_4; \\ 12 & \textit{при } n_1 = n_2 < n_3 = n_4; \\ 4 & \textit{при } \mathrm{d}_\epsilon \neq 0,\ \mathrm{f} = 0; \\ 2 & \textit{при } \mathrm{d}_\epsilon = 0,\ \mathrm{f} \neq 0; \end{cases}$$

3) *все решения* $[g_t^M]$ *уравнения Эйнштейна изолированы.*

Приведем все пространства такие, что $\mathrm{d}_\epsilon = 0$, $\mathrm{f} \neq 0$, $n < 44$ :

$$\mathrm{Sp}_{21}/\mathrm{Sp}_1 \times \mathrm{Sp}_4 \times \mathrm{Sp}_4 \times \mathrm{Sp}_{12};$$
$$\mathrm{SO}_{27}/\mathrm{SO}_5 \times \mathrm{SO}_5 \times \mathrm{SO}_{16} \quad (n_1 = 1);$$
$$\mathrm{SU}_{39}/\mathrm{S}(\mathrm{U}_1 \times \mathrm{U}_5 \times \mathrm{U}_8 \times \mathrm{U}_{25}).$$

В соответствии с вышеизложенным, эти однородные пространства допускают риччи-плоские сжатия (описанные в примере 3.2).

В §8 рассматривается пятимерный многогранник $P = P(\Omega)$, где $\Omega$ — система корней ранга 2 типа $G_2$. Существует пять флаговых пространств $M$ с этой системой $T$-корней, а значит, с многогранником Ньютона $P(\Omega)$, а именно:

$$G_2/T^2,\ E_6/T^2(A_2)^2,\ E_7/T^2 A_5,\ E_8/T^2 E_6,\ F_4/T^2 A_2,$$

где $T^2 A_5 \subset A_2 A_5 \subset E_7$. Для этих пространств $M$ в диссертации доказано равенство

$$\nu(M) = 152,$$

и приведена следующая формула дефекта $\delta = \nu(M) - \mathcal{E}(M)$ :

$$\delta = \begin{cases} 18, & \text{при } M = G_2/T^2, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Пусть $\sigma : M \to M$ — автоморфизм однородного пространства $M$, соответствующий отражению системы корней типа $G_2$. В §8 проверено, что многогранник Ньютона однородного пространства $M/\sigma$ трехмерен, и

$$\mathcal{E}(M/\sigma) = \nu(M/\sigma) = 16.$$

Эти 16 решений описаны в добавлениях, где показано, что среди них существуют вещественные положительно определенные метрики Эйнштейна. В частности, это приводит к "римановым некэлеровым" метрикам Эйнштейна в двенадцатимерном особом однородном пространстве $M = G_2/T^2$ (по-видимому, ранее неизвестным).

Рассматриваются также другие примеры.

В §9 развит подход к описанию граней многогранников Ньютона однородных пространств класса **a**. Рассмотрены также более общие многогранники $P$, ассоциированные с симметричными тройными отношениями. Их двойственные конусы задаются неравенствами треугольника. В этих терминах определены некоторые понятия (камер, корней 1 и 2 типов и др.) Они иллюстрированы примерами. Устанавливается связь с классическими камерами Вейля конечного и бесконечного объемов и т.д. В §9.10 грани двойственного конуса $\mathcal{C}$ многогранника $P(A_{n-1})$ интерпретируются с помощью метрических графов.

**Благодарности.** Выражаю глубокую благодарность моему учителю профессору Д. В. Алексеевскому. Приведенная здесь на 10-й странице классификация написана в продолжение одной из его работ. Мне приятно поблагодарить профессора В. А. Голубеву и своего научного руководителя профессора А. В. Чернавского за внимание и поддержку в моей работе и за предоставление важной научной информации. Я признателен коллективу кафедры высшей геометрии и топологии за дружелюбную атмосферу и полезное обсуждение результатов работы.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах:

[1] Michail M. Graev. *On the number of invariant Einstein metrics on a compact homogeneous space, Newton polytopes and contractions of Lie algebras.* International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. Vol. 3, Nos. 5 & 6 (2006) 1047-1075

[2] М.М.Граев. *Число инвариантных метрик Эйнштейна в однородном пространстве, многогранник Ньютона и сжатия алгебры Ли.* Известия АН, сер.матем., т.72, номер 2, 2007, с.29–88.