Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 519.2

Александрова Дарья Евгеньевна

СХОДИМОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБРАЗОВ МЕР ПО ВАРИАЦИИ

01.01.01 — математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Москва, 2008

Работа выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор В.И. Богачев.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук А.В. Колесников, доктор физико-математических наук, профессор В.В. Ульянов
Ведущая организация:	Математический институт РАН им. В.А. Стеклова

Защита диссертации состоится "23 мая" 2008 г. в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д.501.001.85 в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16–24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан "23 апреля" 2008 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д.501.001.85 в МГУ,
доктор физико-математических
наук, профессор И.Н. Сергеев

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Нелинейные преобразования и различные виды сходимости мер играют важную роль во многих задачах функционального анализа, теории вероятностей и теории случайных процессов. Изучение этих объектов было начато в 1930–1950 годах в классических трудах А.Н. Колмогорова, Дж. фон Неймана, Н.Н. Боголюбова, Н.М. Крылова, А.Д. Александрова, Л.В. Канторовича, Ю.В. Прохорова, А.В. Скорохода и других исследователей. Особенно здесь можно отметить работы[1,2,3,4]. Подробный историко-библиографический обзор дан в книге[5]. В настоящее время активные исследования в этом направлении продолжаются, обогащая взаимодействующие области математики.

Можно выделить следующие два общих вопроса нелинейной теории меры, с которыми так или иначе связано множество самых разных более специальных задач. Пусть дана последовательность измеримых отображений F_j на пространстве с мерой μ. Будут ли индуцированные меры $\mu \circ F_j^{-1}$ сходиться в каком-то смысле? Многие задачи нелинейного анализа и теории вероятностей приводят к рассмотрению слабой сходимости мер, однако весьма важен и случай более сильной сходимости по вариации, причем этот случай гораздо менее изучен; ряд важных результатов получен здесь в связи с предельными теоремами теории вероятностей[6,7] и вариационным исчислением[8]. В этом направлении в диссертации исследуется сходимость по вариации образов заданной меры относительно сходящейся в подходящем смысле последовательности отображений. Типичная ситуация возникает при сходимости дифференцируемых в смысле С.Л. Соболева (или даже еще более слабом смысле) отображений к

[1] Bogoliouboff N.N., Kryloff N.M. La théorie générale de la mesure dans son application à l'étude de systèmes dynamiques de la mécanique non-linéaire. Ann. Math., 1937, B. 38, 65–113.

[2] Александров А.Д. О поверхностной функции выпуклого тела. Матем. сб., 1939, т. 6(48), в. 1, 167–174.

[3] Канторович Л.В. О перемещении масс. ДАН СССР, 1942, т. 37, в. 7-8, 227–229.

[4] Прохоров Ю.В. Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей. Теория вероятн. и ее примен., 1956, т. 1, в. 2, 177–238.

[5] Богачев В.И. Основы теории меры. Т. 1,2. 2-е изд. РХД, Москва–Ижевск, 2006.

[6] Давыдов Ю.А., Лифшиц М.А., Смородина Н.В. Локальные свойства распределений стохастических функционалов. Физматлит, Москва, 1995.

[7] Жакод Ж., Ширяев А.Н. Предельные теоремы для случайных процессов. Т. 1,2. Наука, Москва, 1994.

[8] Giaquinta M., Modica G., Souček J. Cartesian currents in the calculus of variations. V. I, II. Springer, Berlin – New York, 1998.

отображению, у которого производная невырожденна почти всюду относительно преобразуемой меры. Результаты этой части работы тесно связаны с геометрической теорией меры[9,10,11] и существенно опираются на последнюю.

Второй общий вопрос связан с возможностью преобразовать одну заданную вероятностную меру μ в другую вероятностную меру ν. Хорошо известно, что при весьма широких предположениях такие преобразования имеются. Например, так обстоит дело, если эти меры заданы на достаточно хороших пространствах (например, полных сепарабельных метрических или суслинских) и μ не имеет атомов. Однако преобразования такого рода обычно задаются весьма неявно. Кроме того, подобные общие теоремы существования не дают каких-либо канонических способов выбора преобразования. Лишь для мер на прямой имеется естественная конструкция перевода одной меры в другую с помощью их функций распределения и обратных к ним. В частности, всякую вероятностную меру без атомов можно преобразовать в любую другую меру с помощью возрастающей функции. Имеются содержательные многомерные и бесконечномерные аналоги возрастающих функций. Важный для приложений класс таких отображений составляют так называемые оптимальные транспортировки, возникающие в задаче Монжа–Канторовича и ее современных версиях[12,13]. Однако в последние годы стал интенсивно изучаться почти не пересекающийся с классом оптимальных отображений другой класс многомерных аналогов возрастающих функций, состоящий из треугольных преобразований. Эти отображения имеют ясную геометрическую структуру и находят многочисленные применения на стыке выпуклой геометрии и теории вероятностей (см. работы[14,15]). Существенное продвижение в изучении свойств треугольных преобразований достигнуто в

[9] Федерер Г. Геометрическая теория меры. Наука, Москва, 1987.

[10] Гольдштейн В.М., Решетняк Ю.Г., Квазиконформные отображения и пространства Соболева. Наука, Новосибирск, 1983.

[11] Решетняк Ю.Г. Пространственные отображения с ограниченным искажением. Наука, Москва, 1982.

[12] Rachev S.T., Rüschendorf L. Mass transportation problems. V. 1,2. Springer, New York, 1998.

[13] Villani C. Topics in optimal transportation. Amer. Math. Soc., Rhode Island, 2003.

[14] Knothe H. Contributions to the theory of convex bodies. Michigan Math. J., 1957, v. 4, 39–52.

[15] Bobkov S.G. Large deviations via transference plans. Adv. Math. Research, 2003, v. 2, 151–175.

работах[16,17] (см. также книгу[5]), в которых введен ряд новых интересных объектов, в частности, понятие канонического треугольного отображения. В диссертации исследована сходимость канонических треугольных преобразований одной сходящейся по вариации последовательности мер в другую заданную сходящуюся по вариации последовательность мер. Стоит отметить, что оба обсуждавшихся направления имеют интересные связи с теорией условных мер (см. книгу[5]).

Основные результаты диссертации связаны с исследованием сходимости по вариации образов фиксированной меры относительно сходящейся последовательности нелинейных преобразований, а также с изучением в некотором смысле обратной задачи о сходимости треугольных преобразований, порожденных сходящимися мерами. Таким образом, тематика работы актуальна для обеих указанных выше общих задач нелинейной теории меры.

Цель работы. Получить достаточные условия сходимости по вариации для последовательности мер, индуцированных сходящимися слабо дифференцируемыми отображениями. Исследовать зависимость канонических треугольных преобразований мер от преобразуемых мер и их образов при наделении пространства мер расстоянием по вариации.

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Доказана сходимость по вариации образов абсолютно непрерывной меры μ на $\mathbf{R}^d$ при отображениях $F_j\colon\ \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$, которые сходятся к отображению F, при условии, что якобианы F_j удовлетворяют некоторым условиям ограниченности, а якобиан F невырожден почти всюду относительно μ.

2. Построены примеры, показывающие, что использованные в теореме о сходимости условия близки к оптимальным и не могут быть существенно ослаблены.

3. Получены аналоги первого результата для отображений пространств или многообразий разной размерности, а также для отображений бесконечномерных пространств в конечномерные.

---

[16] Богачев В.И., Колесников А.В., Медведев К.В. Треугольные преобразования мер. Матем. сб., 2005, т. 196, n 3, 3–30.

[17] Богачев В.И., Колесников А.В. Нелинейные преобразования выпуклых мер. Теория вероятн. и ее примен., 2005, т. 51, n 1, 27–51.

4. Доказано существование треугольных преобразований мер на счетных произведениях измеримых пространств и доказана сходимость канонических треугольных преобразований T_{μ_n,ν_n} заданной последовательности вероятностных мер μ_n на $\mathbf{R}^\infty$ в другую заданную на $\mathbf{R}^\infty$ последовательность вероятностных мер ν_n при условии сходимости обеих последовательностей мер по вариации.

Методы исследования. В работе применяются методы теории меры, в частности, теория условных мер, функционального анализа, теории вероятностей, а также некоторые оригинальные конструкции.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Ее результаты и методы могут быть использованы в теории меры, теории вероятностей, теории случайных процессов, нелинейном анализе и математической физике.

Апробация диссертации. Результаты диссертации неоднократно докладывались и обсуждались на научно-исследовательском семинаре „Бесконечномерный анализ и стохастика" под руководством проф. В.И. Богачева и Н.А. Толмачева (1998–2007 гг.), на международном семинаре „Бесконечномерный стохастический анализ" в Билефельде (Германия, ноябрь 1999 г.), на конференции молодых ученых Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова (апрель 2005 г.) и на международной конференции по теории вероятностей в г. Черновцы (июнь, 2005 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 4 работах автора, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, включающих 5 параграфов, и списка литературы из 48 наименований. Общий объем диссертации составляет 58 страниц.

Краткое содержание диссертации

Глава 1.

В этой главе исследуется следующая задача. Пусть ξ_j – последовательность случайных векторов в $\mathbf{R}^n$, сходящаяся по вероятности к случайному вектору ξ. Когда распределения векторов ξ_j сходятся к распределению ξ по вариации? Эта задача возникает при изучении предельных теорем теории вероятностей (см., например, книги[6,7] и работу[18]); она имеет и самостоятельный интерес. Простое достаточное условие сходимости по вариации получено Ю.А. Давыдовым в цитированной работе, где $\{\xi_j\}$ – абсолютно непрерывные функции на отрезке $[0,1]$, равномерно сходящиеся к абсолютно непрерывной функции ξ, причем $\|\xi_j' - \xi'\|_{L^1[0,1]} \to 0$. При этих условиях сужение $\lambda|_E$ меры Лебега на множество $E = \{\xi' \neq 0\}$ переводится функциями ξ_j в меры, сходящиеся по вариации к образу меры $\lambda|_E$ при отображении ξ. В диссертации дано доказательство значительно более общего результата. В частности, приведенное утверждение верно, если ξ_j и ξ – измеримые отображения в $\mathbf{R}^n$ со свойством Лузина (N) (т.е. переводящие множества меры в множества меры нуль), почти всюду имеющие производные (или хотя бы регулярные аппроксимативные производные) $D\xi_j$ и $D\xi$, которые локально равномерно интегрируемы, причем отображения ξ_j сходятся равномерно на компактах к ξ, а их производные сходятся по мере на ограниченном измеримом множестве E к производной отображения ξ, которая невырожденна на E. Таким образом, и в одномерном случае результат работы Ю.А. Давыдова усилен. Аналогичные результаты получены для отображений между конечномерными римановыми многообразиями, где невырожденность производной $D\xi$ ограниченного отображения заменяется сюръективностью $D\xi$. Кроме того, получены следствия основного результата для отображений из бесконечномерных пространств, применимые к широким классам мер, в частности, к гауссовским мерам и гиббсовским распределениям. Приведем точные формулировки.

Для всякого открытого множества $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ и всякого числа $p \geq 1$ пространство Соболева $W^{p,1}(\Omega)$ состоит из функций $f \in L^p(\Omega)$, обобщенные частные производные которых также являются элементами $L^p(\Omega)$. Пространство Соболева $W^{p,1}(\Omega, \mathbf{R}^n)$ состоит из отображений

$$f = (f_1, \ldots, f_n)\colon\ \Omega \to \mathbf{R}^n,$$

таких, что $f_i \in W^{p,1}(\Omega)$. Символом $W^{p,1}_{loc}(\Omega, \mathbf{R}^n)$ обозначается класс отображений $f\colon\ \Omega \to \mathbf{R}^n$, для которых $\zeta f \in W^{p,1}(\Omega, \mathbf{R}^n)$ при всех $\zeta \in C_0^\infty(\Omega)$, где $C_0^\infty(\Omega)$ – класс всех гладких функций с компактными носителями в Ω.

[18] Давыдов Ю.А. О сходимости по вариации образов одномерных мер. Зап. научн. семин. ПОМИ, 1992, т. 194. Проблемы теории вероятностных распределений, XII. С. 48–58.

В основной теореме используется понятие аппроксимативной производной (см. книгу[10]). Обычная дифференцируемость f в точке влечет аппроксимативную дифференцируемость в этой точке, причем обычная производная Df в этом случае служит аппроксимативной. В отличие от обычных производных, в определении аппроксимативной производной не требуется, чтобы отображение f было определено в окрестности точки x. Любое отображение f класса $W^{1,1}_{loc}(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^n)$ обладает модификацией, имеющей почти всюду частные производные, что влечет аппроксимативную дифференцируемость почти всюду. При желании можно считать, что ниже речь идет об обычных частных производных. Следует отметить, что даже в случае непрерывно дифференцируемых отображений основные результаты диссертации являются новыми.

Пусть дано измеримое пространство $(X, \mathcal{A})$ с конечной мерой μ, $\mathcal{A}_\mu$ — пополнение $\mathcal{A}$ относительно μ. Если f – μ-измеримое отображение со значениями в некотором измеримом пространстве $(Y, \mathcal{B})$, т.е. $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_\mu$ при $B \in \mathcal{B}$, то образ меры μ при отображении f обозначается через $\mu \circ f^{-1}$ и определяется формулой

$$\mu \circ f^{-1}(B) = \mu\big(f^{-1}(B)\big), \quad B \in \mathcal{B}.$$

Сужение меры μ на измеримое множество E обозначается через $\mu|_E$. Мера Лебега обозначается через λ.

Теорема 1. *Пусть $F\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ и $F_j\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ – измеримые отображения, λ – мера Лебега на $\mathbf{R}^n$, а E – измеримое множество конечной лебеговской меры в $\mathbf{R}^n$. Предположим, что во всякой точке $x \in E$ существуют аппроксимативные частные производные $D_iF(x)$ и $D_iF_j(x)$, $i = 1, \ldots, n$, причем отображения F_j сходятся по мере на множестве E к F, а их аппроксимативные частные производные D_iF_j, $i = 1, \ldots, n$, сходятся по мере на множестве E к соответствующим аппроксимативным частным производным F. Предположим также, что аппроксимативный якобиан $J(F) := \det DF$ отображения F не обращается в нуль на E. Тогда следующие условия равносильны:*

(i) *для всякого измеримого множества $A \subset E$ меры $\lambda|_A \circ F_j^{-1}$ сходятся по вариации к мере $\lambda|_A \circ F^{-1}$;*

(ii) *для всякого измеримого множества $A \subset E$ и всякого $\delta > 0$ существует такой компакт $K_\delta \subset A$, что $\lambda(A \backslash K_\delta) \le \delta$ и выполнено равенство $\lim\limits_{j\to\infty} \lambda\big(F_j(K_\delta)\big) = \lambda\big(F(K_\delta)\big)$.*

Если не желать иметь дело с аппроксимативными производными, то в формулировке приведенной выше теоремы их можно заменить на более привычные обычные частные производные (хотя при этом получится несколько более слабое утверждение). Например, теорема применима к отображениям из класса $W^{1,1}_{loc}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$, удовлетворяющим условиям сходимости на E.

Следствие 1. *Предположим, что в ситуации теоремы* 1 *выполнено какое-нибудь из равносильных условий* (i) *или* (ii), *причем* E *может иметь бесконечную меру Лебега. Пусть* μ *– абсолютно непрерывная вероятностная мера на* $\mathbf{R}^n$. *Тогда меры* $\mu|_E \circ F_j^{-1}$ *сходятся по вариации к мере* $\mu|_E \circ F^{-1}$.

В диссертации показано, что предположение о невырожденности $J(F)$ на множестве E существенно. Отметим, что невырожденность $J(F)$ на E необходима и для абсолютной непрерывности индуцированной меры $\lambda|_E \circ F^{-1}$. Если отображения F_j инъективны на E, то условие (i) теоремы 1 (следовательно и условие (ii)) следует из предположений этой теоремы. Однако в общем случае равносильные условия (i) и (ii) не вытекают автоматически из предположений доказанной теоремы. Соответствующий пример построен в диссертации. Кроме того, построен пример, показывающий, что из условия (ii) не следует, что $\lambda\big(F_j(E)\big) \to \lambda\big(F(E)\big)$.

Приведем теперь условия, достаточные для выполнения (ii). Эти условия, не являясь необходимыми, для практической проверки могут оказаться более полезными.

Следствие 2. *Пусть непрерывные отображения* $F_j\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ *сходятся к непрерывному отображению* $F\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ *равномерно на компактах, причем* F_j *и* F *обладают* (N)*-свойством Лузина и почти всюду имеют регулярные аппроксимативные производные (например,обычные производные)* DF_j *и* DF, *такие, что* DF_j *сходятся к* DF *по мере на некотором множестве* E *конечной меры Лебега. Предположим, что* $\det DF \neq 0$ *на* E *и что на каждом компакте последовательность* $\{|\det DF_j|\}$ *равномерно интегрируема. Тогда меры* $\lambda|_E \circ F_j^{-1}$ *сходятся по вариации к мере* $\lambda|_E \circ F^{-1}$. *Кроме того, если* μ *– абсолютно непрерывная вероятностная мера на* $\mathbf{R}^n$, *то меры* $\mu|_E \circ F_j^{-1}$ *сходятся по вариации к мере* $\mu|_E \circ F^{-1}$

(это верно также для E бесконечной меры Лебега). Наконец,

$$\lim_{j\to\infty} \mu\big(F_j(A) \triangle F(A)\big) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{j\to\infty} \mu\big(F_j(A)\big) = \mu\big(F(A)\big)$$

для всякого измеримого множества $A \subset E$.

Характерным примером, в котором выполнены указанные выше условия, является следующая ситуация. Пусть $F_j, F \in W^{p,1}_{loc}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$, где $p \geq n$, и пусть отображения F_j сходятся к F по соболевской норме $\|\cdot\|_{p,1}$ на каждом шаре. Предположим, что $E \subset \{\det F \neq 0\}$ – измеримое множество конечной лебеговской меры. Тогда меры $\lambda|_E \circ F_j^{-1}$ сходятся по вариации к мере $\lambda|_E \circ F^{-1}$. В случае $p > n$ то же самое верно, если вместо сходимости по норме $\|\cdot\|_{p,1}$ на каждом шаре потребовать ограниченность $\{F_j\}$ в $W^{p,1}(U, \mathbf{R}^n)$ для каждого шара U и сходимость F_j к F почти всюду.

Для отображений между пространствами разных размерностей имеет место следующий результат.

Предложение 1. *Пусть F, $F_j\colon \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^n$ – непрерывные отображения с (N)-свойством Лузина, имеющие почти всюду регулярные аппроксимативные производные (например, просто обычные производные) DF и DF_j, и пусть $E \subset \mathbf{R}^d$ – множество конечной лебеговской меры. Предположим, что отображения F_j сходятся к F равномерно на компактных множествах, отображения DF_j сходятся к DF по мере на E, и что миноры порядка n матриц DF_j либо сходятся в $L^1(K)$ для каждого компактного множества K, либо мажорируются по абсолютной величине локально интегрируемой функцией. Если оператор $DF(x)$ сюръективен для почти всех $x \in E$, то меры $\lambda|_E \circ F_j^{-1}$ сходятся к $\lambda|_E \circ F^{-1}$ по вариации. Более того, если μ – абсолютно непрерывная конечная мера, то меры $\mu|_E \circ F_j^{-1}$ сходятся к мере $\mu|_E \circ F^{-1}$ по вариации (это верно и для E бесконечной лебеговской меры).*

Это предложение распространяется на отображения между римановыми многообразиями в том случае, если соответствующие условия выполнены в локальных картах.

Приведем следствие для отображений из бесконечномерных пространств. Пусть дана вероятностная радоновская мера μ на локально выпуклом пространстве X (т.е. для всякого борелевского множества $B \subset X$ и всякого $\varepsilon > 0$ существует такой компакт $K_\varepsilon \subset B$, что $\mu(B\backslash K_\varepsilon) < \varepsilon$). Пусть X является прямой суммой конечномерного линейного подпространства Z и замкнутого линейного подпространства Y. Тогда существует система вероятностных мер μ^y на множествах $y+Z$, где $y \in Y$, называемых условными мерами, для которых при всяком борелевском множестве B выполнено равенство

$$\mu(B) = \int_Y \mu^y(B)\,\nu(dy),$$

где ν – образ μ относительно естественной проекции X на Y.

Теорема 2. *Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – базис в Z. Предположим, что условные меры μ^y на подпространствах $Z+y$, $y \in Y$, абсолютно непрерывны относительно естественных лебеговских мер на Z, порождаемых каким-нибудь линейным изоморфизмом между Z и $\mathbf{R}^n$, причем соответствующие плотности либо локально строго положительны, либо непрерывны. Пусть $F_j, F\colon X \to \mathbf{R}^n$ – μ-измеримые отображения, которые для μ-почти всех x абсолютно непрерывны на прямых $x + \mathbf{R}^1 e_i$, $i = 1, \ldots, n$, причем $F_j \to F$ и $\partial_{e_i} F_j \to \partial_{e_i} F$ в $L^p(\mu, \mathbf{R}^n)$, где $p \geq n$. Если E – такое μ-измеримое множество, что $\det\Big((\partial_{e_i} F, \partial_{e_k} F)\Big)_{i,k=1}^n \neq 0$ на E, то меры $\mu|_E \circ F_j^{-1}$ сходятся по вариации к мере $\mu|_E \circ F^{-1}$.*

Эта теорема применима к гиббсовским мерам (см. книгу[19]), обладающим абсолютно непрерывными условными распределениями с локально строго положительными плотностями на конечномерных подпространствах.

Приведем пример, относящийся к гауссовским мерам (используемые здесь понятия из теории гауссовских мер имеются в книге[20]). Пусть γ – радоновская гауссовская мера на локально выпуклом пространстве X, имеющая пространство Камерона–Мартина H. Обозначим через $W^{p,1}(\gamma, \mathbf{R}^n)$ определяемый ею класс Соболева $\mathbf{R}^n$-значных отображений, входящих вместе с первыми производными в $L^p(\gamma)$. Пусть F_j, $F \in W^{p,1}(\gamma, \mathbf{R}^n)$, где $p \geq n$, причем имеет место сходимость $F_j \to F$ по норме $W^{p,1}(\gamma, \mathbf{R}^n)$. Тогда для всякого γ-измеримого множества $E \subset \big\{x\colon D_H F(x)(H) = \mathbf{R}^n\big\}$ меры $\gamma|_E \circ F_j^{-1}$ сходятся по вариации к мере $\gamma|_E \circ F^{-1}$.

---

[19] Георги Х.-О. Гиббсовские меры и фазовые переходы. Мир, Москва, 1992.

[20] Богачев В.И. Гауссовские меры. Наука, Москва, 1997.

Глава 2.

В последние годы активно исследуются так называемые треугольные преобразования мер, т.е. такие отображения $T = (T_i)\colon\ X \to X$ конечного или счетного произведения $X = \bigotimes_{i=1}^{\infty} X_i$ измеримых пространств X_i, что каждая координатная функция T_i зависит только от переменных $x_1, \ldots, x_i$: $T_i(x) = T_i(x_1, \ldots, x_i)$. В работах[16,17] даны интересные применения треугольных отображений. В этих же работах в случае конечного или счетного произведения прямых введено понятие канонического треугольного отображения как такого борелевского треугольного отображения T с компонентами T_i, что при всех i функции $x_i \mapsto T_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i)$ возрастают. При этом показано, что для всякой абсолютно непрерывной вероятностной меры μ на $\mathbf{R}^n$ и всякой вероятностной меры ν на $\mathbf{R}^n$ существует каноническое треугольное отображение $T_{\mu,\nu}$, переводящее μ в ν, причем такое отображение единственно с точностью до переопределения на множестве μ-меры нуль. В частности, в качестве μ можно использовать меру Лебега λ на кубе и получать все остальные меры как образы λ при канонических треугольных отображениях. В одномерном случае каноническое треугольное отображение представляет собой возрастающую функцию. В этом случае преобразование меры Лебега в заданную вероятностную меру ν строится с помощью функции распределения меры ν (нужно взять псевдообратную функцию); это наблюдение восходит к А.Н. Колмогорову. Замечательной особенностью канонических треугольных отображений является то, что, в отличие от общих измеримых изоморфизмов мер, они строятся конструктивно по индукции с помощью условных мер. В случае мер с плотностями такие отображения можно задавать в явном виде, правда, при $n > 2$ соответствующие формулы становятся весьма громоздкими. В диссертации изучены треугольные преобразования мер на произведениях суслинских пространств. Напомним, что пространство X называется суслинским, если оно является образом полного сепарабельного метрического пространства при непрерывном отображении. Пусть X_i, где $i \in \mathbb{N}$, — суслинские пространства и пусть μ и ν — борелевские вероятностные меры на $X := \prod_{i=1}^{\infty} X_i$. В главе 2 показано, что найдется борелевское треугольное отображение $T\colon\ X \to X$, для которого $\mu \circ T^{-1} = \nu$. В цитированных выше работах[16,17] был рассмотрен случай, когда отображаемая мера μ на $\mathbf{R}^n$ абсолютно непрерывна. В диссертации показано, что это верно для мер из существенного более широкого класса, рассматриваемого ниже. Наконец, в работе установлено существование треугольных отображений с одним полезным свойством непрерывности, что и составляет основной результат второй главы.

Предложение 2. *Пусть μ и ν – борелевские вероятностные меры на X. Предположим, что при каждом n проекция меры μ на $\prod_{j=1}^{n} X_j$ и условные меры на X_n для этой проекции не имеют атомов. Тогда найдется такое борелевское треугольное отображение $T\colon X \to X$, что $\mu \circ T^{-1} = \nu$.*

Основной результат главы 2 состоит в следующем. Обозначим через $\mathcal{P}_0$ класс всех борелевских вероятностных мер μ на X, удовлетворяющих условию предыдущего предложения. Через $\mathcal{P}$ обозначим множество всех борелевских вероятностных мер на X.

Теорема 3. *Каждой паре мер $\mu \in \mathcal{P}_0$ и $\nu \in \mathcal{P}$ можно сопоставить борелевское треугольное отображение $T_{\mu,\nu}$, переводящее μ в ν и обладающее следующим свойством: если последовательность мер $\mu_j \in \mathcal{P}_0$ сходится по вариации к мере $\mu \in \mathcal{P}_0$, а последовательность мер $\nu_j \in \mathcal{P}$ сходится по вариации к мере $\nu \in \mathcal{P}$, то некоторая подпоследовательность отображений T_{μ_j,ν_j} сходится к отображению $T_{\mu,\nu}$ μ-п.в.*

В частности, если X метризуемо (т.е. все пространства X_n метризуемы), то отображения T_{μ_j,ν_j} сходятся по мере μ к отображению $T_{\mu,\nu}$.

Имеются примеры, показывающие, что в утверждении о сходимости почти всюду выделение подпоследовательности существенно, т.е. вся последовательность не обязана сходиться почти всюду.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору В.И. Богачеву за постановку задач и постоянное внимание к работе.

Работы автора по теме диссертации

[1] Александрова Д.Е. Сходимость треугольных преобразований мер. Теория вероятн. и ее примен. 2005. Т. 50, N 1. С. 145–150.

[2] Александрова Д.Е., Богачев В.И., Пилипенко А.Ю. О сходимости индуцированных мер по вариации. Матем. сб. 1999. Т. 190, N 9. С. 3–20 (Д.Е. Александровой принадлежат теорема 2.1, следствия 2.3, 2.5, 2.6, теорема 3.1, следствие 3.2, предложение 3.5; В.И. Богачеву принадлежат общая постановка задач, лемма 2.4 и следствие 3.4; А.Ю. Пилипенко принадлежат следствия 2.7 и 3.3).

[3] Alexandrova D., Bogachev V., Pilipenko A. On the convergence in variation for the images of measures under differentiable mappings. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, sér. 1. 1999. T. 328, N 11. P. 1055–1060 (Д.Е. Александровой принадлежат теоремы 1,2, следствия 1,2,3; В.И. Богачеву принадлежат общая постановка задач и следствия 5 и 7; А.Ю. Пилипенко принадлежат следствия 4 и 6).

[4] Alexandrova D.E. Convergence of triangular transformations of measures. Abstracts of the International Conference “Modern Problems and New Trends in Probability Theory”, Chernovtsi, pp. 3–4. Институт Математики НАН, Киев, 2005.