Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 512.542 + 512.547.21

Федоров Сергей Николаевич

МОНОМИАЛЬНОСТЬ И АРИФМЕТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КОНЕЧНЫХ ГРУПП

(01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел)

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2008

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	кандидат физико-математических наук, доцент Игорь Андреевич Чубаров.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Сергей Петрович Струнков;
	доктор физико-математических наук, профессор Виссарион Викторович Беляев.
Ведущая организация:	Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова.

Защита диссертации состоится 6 июня 2008 г. в 16 ч. 40 мин. на заседании диссертационного совета Д 501.001.84 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, Российская Федерация, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ имени М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет, ауд. 1408.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 6 мая 2008 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 501.001.84 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор А. О. Иванов

Общая характеристика работы

Актуальность темы

В теории конечных групп существует область исследований, направленных на получение абстрактных свойств групп исходя из информации об их представлениях или характерах. Изучением структуры конечной группы в зависимости от свойств их характеров занимались такие математики, как Р. Брауэр, У. Бернсайд, М. Судзуки, Б. Хупперт, М. Айзекс, Л. Дорнхофф и др. Примером применения соответствующих методов являются доказательства теорем Фробениуса, Бернсайда (о разрешимости $\{p, q\}$-групп), Фейта — Томпсона (о разрешимости групп нечетного порядка) и т. д.

В этой области можно выделить исследования, посвященные мономиальным группам (или $\mathcal{M}$-группам), определяемым как группы, каждое линейное представление которых в некотором базисе пространства представления для всех элементов группы имеет только мономиальные матрицы, т. е. матрицы с единственным ненулевым элементом в каждой строке и каждом столбце. Это условие равносильно тому, что все неприводимые характеры группы индуцированы характерами степени 1 некоторых подгрупп (не обязательно собственных)[1].

Сам термин «мономиальная группа» появился благодаря Генриху Машке[2] в конце XIX века, правда, применительно к подстановочным группам специального вида. Исторически первым подходом к изучению мономиальных групп (в нашем понимании этого термина), по-видимому, следует счи-

[1] Кэртис, Ч., Райнер, И. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. М. : Наука, 1969. С. 292, 322.

[2] Maschke, H. On ternary substitution-groups of finite order which leave a triangle unchanged // Amer. J. Math. 1895. Vol. 17, no. 2. P. 168—184.

тать работу Ганса Фредерика Блихфельдта [3] 1904 года, где, по сути, было доказано, что примарные группы мономиальны. Основополагающим же в этой теории стал опубликованный двадцатью шестью годами позже результат Киёси Такеты [4], утверждающий, что $\mathcal{M}$-группы разрешимы. С тех пор началось более или менее активное изучение $\mathcal{M}$-групп, особенно в том направлении, которое связано с определением свойств группы, влекущих ее мономиальность. С середины 30-х и до конца 60-х годов XX века несколькими математиками был найден ряд достаточных признаков мономиальности группы [5], при этом следующие утверждения обобщали предыдущие и, таким образом, постепенно приближались к критерию. Однако подобные исследования столкнулись с определенными сложностями. Еще в 1952 году Нобору Ито [6] показал, что подгруппы $\mathcal{M}$-групп не обязаны быть мономиальными. А в конце 1960-х годов — в период, пожалуй, наиболее интенсивного изучения $\mathcal{M}$-групп — Эвереттом Дейдом было доказано, что любая конечная разрешимая группа может быть вложена в $\mathcal{M}$-группу той же производной длины (доказательство этого утверждения можно найти в работе Г. М. Зейца [7]). Этот результат показывает, насколько велик класс мономиальных групп и как трудно отделить их от других разрешимых групп и получить их общую теоретико-групповую характеризацию.

Кроме попыток приблизиться к теоретико-групповой характеризации $\mathcal{M}$-групп, проводились исследования и в таких направлениях, как поиск условий мономиальности тех или иных подгрупп $\mathcal{M}$-групп, изучение минимальных не-$\mathcal{M}$-групп, различные обобщения понятия $\mathcal{M}$-групп и т. д.

---

[3] Blichfeldt, H. F. On the order of linear homogeneous groups. II // Trans. Am. Math. Soc. 1904. Vol. 5. P. 310—325.

[4] Taketa, K. Über die Gruppen, deren Darstellungen sich sämtlich auf monomiale Gestalt transformieren lassen // Proc. Jap. Imp. Acad. 1930. Bd. 6. S. 31—33.

[5] См.: Zassenhaus, H. Über endliche Fastkörper // Abh. math. Seminar Hamburg. Univ. 1935/36. Bd. 11. S. 187—220; Huppert, B. Monomiale Darstellung endlicher Gruppen // Nagoya Math. J. 1953. Vol. 6. P. 93—94; Dornhoff, L. M-groups and 2-groups // Math. Z. 1967. Vol. 100, no. 3. P. 226—256; Seitz, G. M. M-Groups and the supersolvable residual // Math. Z. 1969. Vol. 110, no. 2. P. 101—122.

[6] Itô, N. Note on A-groups // Nagoya Math. J. 1952. Vol. 4. P. 79—81.

[7] Seitz, G. M. Op. cit.

Среди авторов, много занимавшихся данной тематикой, кроме уже упомянутых, — И. М. Айзекс, Я. Г. Беркович, С. Д. Берман, Й. К. Бьох, Р. В. ван дер Ваалл, М. Лукаки, М. Л. Льюис, А. Паркс, Д. Т. Прайс, В. К. Туркин, Э. Хорват, Б. Хупперт и И. А. Чубаров.

Цель работы

Цель диссертации — исследование мономиальных групп, получение условий (в основном арифметического характера), при которых конечная группа имеет только мономиальные неприводимые обыкновенные характеры.

Методы исследования

В работе использованы методы теории конечных групп и теории характеров конечных групп, а также элементарной теории чисел. Кроме того, использовались подходы, разработанные в рамках теории графов.

Научная новизна

Основные результаты диссертации являются новыми и заключаются в следующем:

1) получены критерии мономиальности групп Фробениуса в терминах принадлежности дополнения группы Фробениуса некоторым классам конечных групп;
2) найдены условия мономиальности конечной группы (и всех ее подгрупп), имеющей не более трех классов сопряженных элементов, лежащих вне некоторой нормальной подгруппы;
3) доказана мономиальность конечных групп с определенными ограничениями на числовые характеристики множества классов сопряженных элементов;
4) доказана теорема о мономиальности конечной группы со свободными от квадратов степенями неприводимых характеров и некоторыми дополнительными условиями.

Теоретическая и практическая ценность

Диссертация носит теоретический характер. Ее результаты могут найти применение в теории конечных групп, их представлений и характеров. В частности, они могут быть использованы в исследованиях свойств линейных представлений и характеров конечных групп, удовлетворяющих определенным числовым условиям, а также при изучении свойств и структуры самих групп.

Апробация результатов

Результаты диссертации докладывались на научно-исследовательском семинаре Механико-математического факультета МГУ «Избранные вопросы алгебры» под руководством профессора М. В. Зайцева, профессора А. А. Михалёва, доцента И. А. Чубарова, ассистента А. Э. Гутермана в ноябре 2006 г. и сентябре 2007 г.; на научно-исследовательском семинаре кафедры высшей алгебры Механико-математического факультета МГУ в декабре 2007 г.; на Международной конференции «Алгебра и ее приложения», посвященной 75-летию В. П. Шункова (Красноярск, 12—18 августа 2007 г.).

Публикации

Основное содержание диссертации опубликовано в четырех работах, список которых приведен в конце автореферата [1—4].

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на параграфы, и приложения. Общий объем работы — 81 страница. Список цитированной литературы включает 48 наименований.

Краткое содержание работы

Во введении затронута история вопроса. Представлены ключевые этапы и проблемы развития теории $\mathcal{M}$-групп. Кроме того, в этом разделе описана структура диссертации и сформулированы основные результаты. Далее приведены используемые обозначения и предварительные сведения общего характера.

В первой главе, посвященной общим вопросам, представлены основные направления развития теории $\mathcal{M}$-групп, систематизирована информация о каждом из них, приведены примеры. Эти сведения даны в том объеме, который требуется для обоснования рассуждений в последующих главах диссертации, а также для составления общей картины развития данной теории.

Исследования в теории $\mathcal{M}$-групп распадаются на следующие основные ветви: поиск необходимых и достаточных условий мономиальности группы, характеризация класса $\mathcal{M}$-групп; поиск условий мономиальности тех или иных подгрупп $\mathcal{M}$-групп; изучение минимальных не-$\mathcal{M}$-групп; различные обобщения и аналоги понятия $\mathcal{M}$-групп (и, в частности, попытки доказать для них утверждения, подобные известным результатам об $\mathcal{M}$-группах).

Что касается определения места мономиальных групп среди различных классов конечных групп, то известны следующие вложения: сверхразрешимые и метабелевы группы [8], а также разрешимые группы, все силовские подгруппы которых абелевы (т. н. $\mathcal{A}$-группы) [9], мономиальны, а $\mathcal{M}$-группы, как уже говорилось, разрешимы.

Минимальными не-$\mathcal{M}$-группами называют немономиальные разрешимые

---

[8] Zassenhaus, H. Op. cit.

[9] Itô, N. Op. cit.

группы, все собственные подгруппы и гомоморфные образы которых являются $\mathcal{M}$-группами. Среди них следует выделить группу $G = SL(2,3)$, состоящую из всех 2×2-матриц с определителем 1 над полем из трех элементов. Она является минимальным по порядку ($|G| = 24$) примером немономиальной группы. В данной главе более или менее подробно описана ее структура, поскольку эта группа часто служит контрпримером к различным предположениям в дальнейших рассуждениях.

Во второй главе диссертации исследуются квазифробениусовы группы — обобщение понятия групп Фробениуса — конечные группы, имеющие фробениусову факторгруппу по центру. Потребность в изучении именно этого класса конечных групп объясняется тем, что квазифробениусовы и, в частности, фробениусовы группы довольно часто выступают в качестве одного из вариантов строения группы, возникающих при попытках классификации групп с определенными ограничениями (в том числе числовыми) на множество классов сопряженных элементов. Таким образом, результаты второй главы носят вспомогательный характер, хотя полученный критерий мономиальности группы Фробениуса может представлять интерес и сам по себе — как решение задачи теоретико-групповой характеризации, суженной на отдельно взятый класс конечных групп.

Теорема 2.3.2. *Пусть G — группа Фробениуса с дополнением H. Тогда следующие условия эквивалентны:*
(1) *G — $\mathcal{M}$-группа;*
(2) *G — $\tilde{\mathcal{M}}$-группа;*
(3) *H — $\mathcal{M}$-группа;*
(4) *H сверхразрешима;*
(5) *H метабелева.*

Простейшие следствия из этой теоремы представляют собой набор условий, в том числе и арифметических, накладываемых на ядро и дополнение, которые влекут мономиальность группы Фробениуса. При распространении этого критерия на квазифробениусовы группы часть импликаций перестает быть верной, тем не менее, некоторые необходимые и достаточные признаки мономиальности для таких групп получить можно.

Исследования **в третьей главе** посвящены собственно арифметическим условиям мономиальности конечных групп. Выбор условий именно такого типа можно объяснить тем, что подобный подход к $\mathcal{M}$-группам практиковался крайне мало, тогда как, по-видимому, он способен внести некоторый вклад в развитие теории данного класса групп и помочь еще приблизиться к решению вопроса его теоретико-групповой характеризации.

Следующие три утверждения представляют достаточные условия мономиальности группы, обладающей нормальной подгруппой, вне которой лежит не более трех классов сопряженных элементов ($k_G(X)$ здесь обозначает количество классов сопряженности, пересечение которых с множеством X непусто).

Теорема 3.1.4. *Пусть G — конечная группа, имеющая такую нормальную подгруппу N, что $k_G(G - N) = 1$. Тогда G — $\tilde{\mathcal{M}}$-группа.*

В формулировке следующей теоремы фигурирует понятие $\mathcal{H}_p$-свободной группы (p — простое число), которое обозначает группу, не имеющую сечений (т. е. гомоморфных образов подгрупп), являющихся экстраспециальными группами порядка p^3 экспоненты p для нечетных p и кватернионными группами порядка 8 для $p = 2$. Наличие подобных сечений имеет зачастую определяющее значение в теории $\mathcal{M}$-групп [10].

Теорема 3.1.5. *Пусть G — конечная группа, содержащая нормальную подгруппу N с условием $k_G(G - N) = 2$. Тогда G — $\tilde{\mathcal{M}}$-группа, если выполнено одно из условий:*

(а) $|G/N| \neq 2$;

(б) $|G/N| = 2$, *и если $G_2 \in \mathrm{Syl}_2(G)$ — кватернионная группа, то N — $\mathcal{H}_p$-свободная группа для любого нечетного простого p.*

Теорема 3.1.6. *Пусть G — конечная разрешимая группа, имеющая нормальную подгруппу N, удовлетворяющую двум условиям: $|G/N| \neq 2$ и $k_G(G - N) = 3$. Тогда G — $\tilde{\mathcal{M}}$-группа.*

Несколько иной взгляд на множество классов сопряженных элементов, точнее на выбор его числовых характеристик, позволяет сформули-

[10] Price, D. T. Character ramification and M-groups // Math. Z. 1973. Vol. 130. P. 325—337.

ровать следующую теорему о мономиальности группы, имеющей ограничения на количество классов сопряженности и наибольшую из их мощностей. Основным инструментом, использованным при доказательстве этого утверждения, является граф классов сопряженных элементов группы, идея которого была предложена Л. С. Казариным в работе 1981 года [11].

Теорема 3.2.10. *Пусть для количества $k(G)$ классов сопряженных элементов группы G и наибольшей из их мощностей $\mathrm{bcs}(G)$ справедливо одно из утверждений:*
(1) $\mathrm{bcs}(G)$ *— простое число;*
(2) $\mathrm{bcs}(G) \leqslant 9$ *и* $6 \notin \mathrm{cs}(G)$ *($\mathrm{cs}(G)$ — множество мощностей классов сопряженности группы G);*
(3) $k(G) \leqslant 6$, *кроме случаев* $\big(k(G), \mathrm{bcs}(G)\big) = (5, 20)$ *и* $(6, 56)$.
Тогда G — $\tilde{\mathcal{M}}$-группа.

Ослабить числовые ограничения в этой теореме, не накладывая дополнительных условий на группу, затруднительно — существуют примеры немономиальных групп с небольшими значениями $k(G)$ и $\mathrm{bcs}(G)$.

Далее в работе рассматривается множество $\mathrm{cd}(G)$ степеней неприводимых (обыкновенных) характеров. Известный параллелизм результатов, в основе которых лежат, с одной стороны, мощности классов сопряженных элементов, а с другой — степени неприводимых характеров, дает основания полагать, что для степеней характеров можно получить некоторые аналоги признаков мономиальности, сформулированных в терминах мощностей классов сопряженности. Однако оказывается, что в случае характеров для получения тех же выводов требуются более жесткие ограничения. Например, в то время как условие «*мощности всех классов сопряженных элементов группы свободны от квадратов*» (т. е. не делятся на квадрат никакого простого числа) влечет сверхразрешимость группы [12], для степеней неприводимых характеров группы G справедлива лишь следующая теорема.

---

[11] Казарин, Л. С. О группах с изолированными классами сопряженных элементов // Изв. вузов. Математика. 1981. № 7 (230). С. 40—45.

[12] Chillag, D., Herzog, M. On the length of the conjugacy classes of finite groups // J. Algebra. 1990. Vol. 131, no. 1. P. 110—125.

Теорема 3.3.2. *Пусть G — конечная группа. Предположим, что силовские p-подгруппы подгруппы Фиттинга $F(G)$ $\mathcal{H}_p$-свободны. Если элементы множества $\mathrm{cd}(G)$ свободны от квадратов, то либо*

(1) *G мономиальна;*

либо

(2) *$G \cong A_7 \times H$, где H — $\mathcal{M}$-группа, и тогда*

$$\mathrm{cd}(G) \supseteq \{1,\ 2 \cdot 3,\ 2 \cdot 5,\ 2 \cdot 7,\ 3 \cdot 5,\ 3 \cdot 7,\ 5 \cdot 7\}$$

(т. е. $\mathrm{cd}(G)$ содержит все возможные произведения пар различных чисел из множества $\{2, 3, 5, 7\}$).

В приведенной теореме от условия на подгруппу Фиттинга отказаться нельзя, как показывает пример немономиальной группы $SL(2, 3)$, имеющей во всех отношениях «хороший» набор степеней неприводимых характеров: $\mathrm{cd}(SL(2, 3)) = \{1, 2, 3\}$.

Одним из аргументов в пользу изучения множества $\mathrm{cd}(G)$ может быть то, что, имея в своем распоряжении некоторые условия на это множество, влекущие мономиальность группы G, мы сможем на основе только информации о степенях неприводимых характеров ограничить производную длину $\mathrm{dl}(G)$ (ступень разрешимости) этой группы. Это соображение основывается на том факте, что для $\mathcal{M}$-группы G справедливо неравенство $\mathrm{dl}(G) \leqslant |\mathrm{cd}(G)|$ (кстати, пока не известно, выполняется ли оно для произвольной разрешимой группы) [13].

В приложении представлен перечень работ, полностью или частично посвященных различным вопросам, касающимся мономиальности конечных групп или отдельных представлений и характеров. Всего собраны ссылки на более чем 120 статей и 8 диссертаций. К некоторым работам даны краткие комментарии.

[13] Huppert, B. Character theory of finite groups. Berlin ; New York : Walter de Gruyter, 1998. P. 319—320.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю кандидату физико-математических наук, доценту Игорю Андреевичу Чубарову за постановку задачи, всестороннюю помощь и внимание к работе над диссертацией, а также всем сотрудникам кафедры высшей алгебры — за доброжелательное отношение и творческую атмосферу.

Публикации автора по теме диссертации

[1] Федоров, С. Н. Признаки мономиальности группы Фробениуса / С. Н. Федоров // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. — 2007. — № 5. — С. 64—65.

[2] Федоров, С. Н. О мономиальности конечной группы с небольшим числом классов сопряженных элементов вне нормальной подгруппы / С. Н. Федоров // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. — 2008. — № 2. — С. 45—46.

[3] Федоров, С. Н. Мономиальность конечных групп с некоторыми условиями на классы сопряженных элементов / С. Н. Федоров // Фундаментальная и прикладная математика. — 2007. — Т. 13, № 5. — С. 201—212.

[4] Федоров, С. Н. О квазифробениусовых M-группах / С. Н. Федоров // Международная конференция «Алгебра и ее приложения» : Тезисы докладов. — Красноярск, 2007. — С. 138—139.