Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 511.72 + 511.464

Михайлов Сергей Владимирович

О НЕКОТОРЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОБЛЕМАХ ТЕОРИИ ДИОФАНТОВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Специальность 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2008

Работа выполнена на кафедре теории чисел Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель: член-корреспондент РАН, профессор Юрий Валентинович Нестеренко

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Евгений Михайлович Матвеев
кандидат физико-математических наук, доцент Виктор Тимофеевич Марков

Ведущая организация: Московский педагогический государственный университет

Защита диссертации состоится 20 июня 2008 г. в 16 ч. 40м. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Российская Федерация, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультет МГУ имени М.В. Ломоносова (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 20 мая 2008 года.

Ученый секретарь
диссертационого совета Д.501.001.84 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор А.О. Иванов

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Изучение приближений действительных чисел рациональными позволяет многое сказать об арифметической природе чисел. На этом пути впервые было доказано существование трансцендентных чисел, иррациональность $\zeta(3)$ и т.д. Метрическая теория диофантовых приближений началась, по-видимому, со знаменитой теоремы о приближении действительных чисел рациональными, доказанной А.Я. Хинчиным [1] в начале прошлого века, в которой утверждается, что для почти всех (в смысле меры Лебега на $\mathbb{R}$) действительных чисел x отрезка $[a, b]$ неравенство

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{\psi(q)}{q} \tag{1}$$

имеет бесконечно много решений в целых числах p и натуральных числах q, если ряд $\sum\limits_{q=1}^{\infty} \psi(q)$ расходится (здесь $\psi(x)$ — монотонно убывающая неотрицательная функция, определенная на $\mathbb{R}_+$). Причем, если вышеуказанный ряд сходится, то таких чисел x почти нет.

Перепишем неравенство (1) в виде

$$|qx - p| < \psi(q). \tag{2}$$

Вместо (2) естественно рассмотреть более общее неравенство, в котором под знаком абсолютной величины стоит многочлен произвольной фиксированной степени n с целыми коэффициентами. Пусть

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j, \quad a_j \in \mathbb{Z},\ 0 \leqslant j \leqslant n, \quad H(P) = \max_{0 \leqslant j \leqslant n} |a_j|.$$

Обозначим через $L_n(\psi)$ множество $x \in \mathbb{R}$, для которых неравенство

$$|P(x)| < H^{-n+1}\psi(H), \quad H = H(P)$$

имеет бесконечное число решений в полиномах $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ степени не выше n. Задача о мере множества $L_n(\psi)$ имеет давнюю историю. Так, в 1932г. К.

[1] A. Khintschine, Math. Ann., 1924, Bd. **92**, 115-125.

Малер[2] предположил, что при $\psi(H) = H^{-\lambda}$, $\lambda > 1$, множество $L_n(\psi)$ имеет нулевую меру. Эту гипотезу доказал В.Г. Спринджук[3] в 60-х годах прошлого века. Спустя несколько лет А. Бейкер[4] улучшил теорему Спринджука и предположил, что для множества $L_n(\psi)$ справедливо утверждение, подобное теореме Хинчина в случае сходимости. Это предположение было доказано в 1980-х годах В.И. Берником[5]. Спустя примерно десятилетие В.В. Бересневич[6] доказал нужное утверждение и в случае расходимости соответствующего ряда. Вскоре эти результаты были обобщены[7] на поля комплексных и p-адических чисел.

Другое направление для обобщений теоремы Спринджука заключалось в переходе от многочленов одной переменной к многочленам многих переменных. Было выдвинуто предположение[8], что для почти всех (в смысле m-мерной меры Лебега) точек $\overline{\xi} \in \mathbb{R}^m$ неравенство

$$|P(\overline{\xi})| < H^{-N-\varepsilon}, \quad H = H(P)$$

имеет лишь конечное число решений в полиномах $P \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m]$ степени не выше n, где $N = C_{m+n}^m - 1$ (число различных нетривиальных мономов от m переменных степени не выше n), $\varepsilon > 0$ — вещественное число. Эта гипотеза была доказана[9] в конце прошлого века Д. Клейнбоком и Г. Маргулисом, как следствие их общей метрической теоремы о диофантовых приближениях точек на аналитических многообразиях.

---

[2]K. Mahler, Math. Ann., 1932, Bd. **105**, 131-139.

[3]В.Г. Спринджук, *Доказательство гипотезы Малера о мере множества S-чисел*, Изв. АН СССР, сер. мат., **29**:2, 1965, 379-436.

[4]A. Baker, Proc. Roy. Soc. Lond., 1966, V. A **292**, p. 92-104.

[5]В.И. Берник, *О точном порядке приближения нуля значениями целочисленных многочленов*, Acta Arith., **53**:1, 1989, 17-28.

[6]V. Beresnevich, *On approximation of real numbers by real algebraic numbers*, Acta Arith., **90**:2, 1999, 97-112.

[7]В.И. Берник, Д.В. Васильев, Тр. Ин-та математики НАН Беларуси, 1999, т. 3, 10-20;

Э.И. Ковалевская, Преп. № 8 (547), Тр. Ин-та математики НАН Беларуси, 1998, 14с.

[8]В.Г. Спринджук, *Проблема Малера в метрической теории чисел*, Минск: Наука и техника, 1967, Заключение, §3, Проблема B.

[9]D.Y. Kleinbock, G.A. Margulis, *Flows on homogeneous spaces and Diophantine approximation on manifolds*, Ann. Math., **148**, 1998, 339-360.

Описанные выше теоремы характеризуются общим свойством — полиномы, участвующие в их формулировках, имеют ограниченную степень, растет лишь их *высота* $H(P)$. Далее мы перейдем к рассмотрению ситуации, когда меняются и высота полинома и его степень. Исторически сложилось при изучении этой ситуации использовать некий агрегат степени полинома и его высоты. Назовем *типом многочлена* P величину

$$t(P) = \deg P + \ln H(P).$$

Пусть ξ — вещественное число, трансцендентное над $\mathbb{Q}$, $\tau > 0$ — также вещественное. Будем говорить, что ξ имеет *тип трансцендентности* $\leqslant \tau$, если для любого многочлена $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $P \not\equiv 0$ выполнено неравенство

$$|P(\xi)| > e^{-c_1 t(P)^\tau},$$

где $c_1 > 0$ — константа, зависящая, вообще говоря, от ξ, но не от многочлена P. Это определение было дано С. Ленгом[10] в 1966 г.

Пусть вещественное трансцендентное число ξ имеет *тип трансцендентности* $\leqslant \tau$. Используя принцип Дирихле, можно доказать, что $\tau \geqslant 2$. Задача определения типа трансцендентности для конкретного числа ξ очень сложна. Например, π имеет[11] *тип трансцендентности* $\leqslant 2 + \varepsilon$ для любого положительного ε. Можно ли утверждать, что π имеет *тип трансцендентности* $\leqslant 2$, не известно до сих пор.

В 1971 г. К. Малер предложил[12] классификацию трансцендентных чисел, основанную на понятии *функции порядка* вещественного числа ξ. В связи с предложенной классификацией Малер сформулировал несколько проблем. Одна из них — предположение о том, что почти все вещественные числа имеют *тип трансцендентности* $\leqslant 2$. Это предположение было доказано[13] Ю.В.

[10] S. Lang, *Introduction to transcendental numbers*, Addison-Wesley series in math., 1966, гл. 5, §1, с. 45

[11] Н.И. Фельдман, *Аппроксимация некоторых трансцендентных чисел*, Известия Ак. наук СССР, сер. мат., **15**, 1951, 53-74; теорема 4, с.72

[12] K. Mahler, *On the order function of a transcendental number*, Acta Arith., **18**, 1971, 63-76.

[13] Ю.В. Нестеренко, *Функция порядка для почти всех чисел.*, Матем. заметки, **15**:3, 1974, 405-414.

Нестеренко в 1973 г. Кроме того, было установлено, что почти все точки $\overline{\xi} \in \mathbb{R}^m$ имеют *тип трансцендентности* $\leqslant m+2$ и выдвинуто предположение, что на самом деле почти все точки $\overline{\xi} \in \mathbb{R}^m$ имеют *тип трансцендентности* $\leqslant m+1$ (определения, связанные с понятием типа трансцендентности, дословно переносятся с одномерного на многомерный случай; аналогом трансцендентного числа $\xi \in \mathbb{R}$ является точка $\overline{\xi} \in \mathbb{R}^m$, координаты которой алгебраически независимы). Опять же, используя принцип Дирихле, можно доказать, что точка $\overline{\xi} \in \mathbb{R}^m$ не может иметь *тип трансцендентности* $\leqslant m+1-\varepsilon$ ни для какого положительного ε.

В 1981 г. Ю.В. Нестеренко доказал[14], что почти все (в смысле меры Хаара[15]) точки $\overline{\xi}$ двумерного пространства над полем p-адических чисел $\mathbb{Q}_p^2$ имеют *тип трансцендентности* $\leqslant 3$. Это была первая точная оценка в случае, когда размерность пространства больше 1. Доказательство было не только продолжением идей вещественного случая, но и использовало новую технику — переход от работы с многочленами кольца $Z[x_1, x_2]$ к работе с однородными идеалами кольца $Z[x_0, x_1, x_2]$. Для идеалов были введены понятия *степени*, *высоты* и *значения в точке* $\overline{\theta}$ проективного пространства $\mathbb{Q}_p^3$. Эти величины обладали свойствами, аналогичными соответствующим характеристикам многочленов. Подобная техника впервые появилась[16] в связи с разработкой методов доказательства алгебраической независимости чисел, и уходит своими корнями в общую теорию исключения. В работах Ю.В. Нестеренко[17] и П. Филиппона[18] эта теория получила дальнейшее развитие.

[14]Ю.В. Нестеренко, *О мере алгебраической независимости почти всех пар p-адических чисел*, Матем. заметки, **36**:3, 1984, 295-304.

[15]П. Халмош, *Теория меры*, М., 1953, гл. 9, §58

[16]Ю.В. Нестеренко, *Оценки порядков нулей функций одного класса и их приложение в теории трансцендентных чисел*, Изв. АН СССР, Сер. мат., **41**:2, 1977, 253-284.

[17]Ю.В. Нестеренко, *Оценки характеристической функции простого идеала*, Матем. сб., **123**:1, 1984, 11-34; *Об алгебраической независимости алгебраических степеней алгебраических чисел*, Матем. сб., **123**:4, 1984, 435-469; *Оценки числа нулей функций некоторых классов*, Acta Arith., **53**:1, 1989, 29-46; Ю.В. Нестеренко, *О мере алгебраической независимости значений функций Рамануджана*, Труды Математического Института имени В.А. Стеклова, **218**, 1997, 299-334.

[18]P. Philippon, *Critères pour l'indepéndance algébrique*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 64, (1982), 5-52;

Проблема определения *типа трансцендентности* может быть поставлена не только для вещественных и p-адических, но и для комплексных чисел. В начале 80-х годов прошлого века Г.В. Чудновский предположил[19], что почти все (в смысле $2m$-мерной меры Лебега) точки $\overline{\xi} \in \mathbb{C}^m$ имеют *тип трансцендентности* $\leqslant m+1$. Это предположение было доказано Ф. Аморозо[20] в 1990г. (как и в вещественном случае, используя принцип Дирихле, можно доказать, что точка $\overline{\xi} \in \mathbb{C}^m$ не может иметь *тип трансцендентности* $\leqslant m+1-\varepsilon$ ни для какого положительного ε). Отметим, что справедливость аналогичного утверждения в вещественном случае не является непосредственным следствием теоремы Аморозо, поскольку множество в $\mathbb{C}^m$, имеющее $2m$-мерную лебегову меру ноль, может пересекать подмножество $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{C}^m$ по множеству положительной m-мерной меры. Доказательство Аморозо существенно использует "комплексность" ситуации, и его не удается адаптировать ни к вещественному, ни к p-адическому случаю.

В диссертации доказывается точная оценка для *типа трансцендентности* почти всех точек как вещественного, так и p-адического и комплексного многомерных пространств.

Цель работы

Целью работы является изучение меры алгебраической независимости координат точек конечномерного пространства над полями вещественных, комплексных и p-адических чисел. Перед автором были поставлены следующие задачи:

• получить оценки меры алгебраической независимости для координат почти всех точек конечномерного вещественного пространства в терминах типа трансцендентности, точные в зависимости от показателя степени;

• изучить возможность обобщения вышеуказанного результата на случай

Lemmes de zéros dans les groupes algébriques commutatifs, Bull. Soc. Math. France 114, (1986), 355-383; *Errata et addenda*, ibidem 115, (1987), 397-398; *I'indepéndance algébrique et K-fonctions*, J. Reine Angew. Math. 329, (1981), 66-81

[19] G.V. Chudnovsky, *Contribution to the theory of transcendental numbers*, AMS, **19**, 1984, гипотеза 1.3.

[20] F. Amoroso, *Polynomials with high multiplicity*, Acta Arith., **56**, 1990, 345-364.

конечномерного пространства над полем комплексных чисел и над полем p-адических чисел.

Методы исследования

В работе используются методы теории диофантовых приближений, теории меры, коммутативной алгебры и теории p-адических чисел.

Научная новизна

Результаты диссертации являются новыми и получены автором самостоятельно. Основные результаты диссертации следующие:

- Доказано, что почти все точки конечномерного вещественного пространства имеют тип трансцендентности, на единицу больший размерности пространства;
- Доказано, что почти все точки конечномерного пространства над полем p-адических чисел имеют тип трансцендентности, на единицу больший размерности пространства;
- Получено новое доказательство того, что почти все точки конечномерного комплексного пространства имеют тип трансцендентности, на единицу больший размерности пространства.

Теоретическая и практическая ценность

Диссертация носит теоретический характер. Используемая в работе техника может быть применена в дальнейших исследованиях в метрической теории диофантовых приближений, в том числе для исследования возможности получения аналогичных результатов над полем формальных степенных рядов.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались

- на научно-исследовательском семинаре по теории чисел под руководством Н.Г. Мощевитина и Ю.В. Нестеренко в ноябре 2006 года;
- на международной конференции "Diophantine and analytic problems in number theory" в феврале 2007 года;

• на научно-исследовательском семинаре по теории чисел под руководством А.А. Карацубы, Н.Г. Мощевитина и Ю.В. Нестеренко в сентябре 2007 года.

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в 3 работах, список которых приводится в конце автореферата [1-3].

Структура и объем работы

Диссертация изложена на 70 страницах и состоит из введения, трех глав и списка литературы, включающего 35 наименований.

Содержание работы

Во **введении** описана история возникновения проблем, рассматриваемых в диссертации, упомянуты основные достижения, имеющиеся в изучаемой области, и сформулированы ключевые результаты, полученные в работе автора.

Введем обозначения, полезные в дальнейшем. Пусть P — многочлен с целыми коэффициентами, зависящий от m переменных. Обозначим $\deg P$ — степень P по совокупности переменных, $H(P)$ — максимум модулей коэффициентов P и $t(P) = \deg P + \ln H(P)$ — тип многочлена P.

Первая глава посвящена доказательству следующей теоремы:

Теорема 1. *Для почти всех (в смысле m-мерной меры Лебега) точек $\overline{\xi} \in \mathbb{R}^m$ существует положительная константа $c = c(\overline{\xi})$ такая, что для любого многочлена $P \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m]$, $P \not\equiv 0$ справедливо неравенство*

$$|P(\overline{\xi})| > e^{-ct(P)^{m+1}}.$$

Изложим план доказательства этой теоремы. Он имеет метрическую и алгебраическую части. Начнем с метрической.

Назовем точку $\overline{\xi} \in \mathbb{R}^m$ *хорошей*, если для нее выполнено условие теоремы 1, и назовем $\overline{\xi}$ *плохой*, если она не является хорошей. Обозначим Ω — множество всех *плохих* точек $\mathbb{R}^m$, и Ω_0 — множество *плохих* точек $\overline{\xi} \in \mathbb{R}^m$

с условием $|\overline{\xi}| \leqslant 1$, где $|\overline{\xi}| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} |\xi_i|$. Теорема 1 утверждает, что лебегова мера множества Ω равна нулю.

Первый шаг — переход от всего пространства к единичному кубу. Оказывается, что при доказательстве теоремы 1 можно ограничиться рассмотрением точек $\overline{\xi} \in \mathbb{R}^m$ с условием $|\overline{\xi}| \leqslant 1$, то есть точек единичного куба. В диссертации доказано, что при сдвигах на вектор с целочисленными координатами *хорошие* точки переходят в *хорошие*, а *плохие* точки — в *плохие*. Поэтому множество Ω содержится в объединении всевозможных сдвигов множества Ω_0 на вектора с целочисленными координатами, а этих сдвигов счетное число.

Второй шаг — построение вспомогательного семейства множеств меры ноль. Отметим, что если координаты некоторой точки $\overline{\xi} \in \mathbb{R}^m$ алгебраически зависимы (над $\mathbb{Q}$), то эта точка не может быть *хорошей*, так как найдется ненулевой многочлен P с целыми коэффициентами, обращающийся в ноль в точке $\overline{\xi}$. Обозначим через S_0 множество точек единичного куба в $\mathbb{R}^m$ с алгебраически зависимыми (над $\mathbb{Q}$) координатами. Имеет место строгое включение $S_0 \subset \Omega_0$.

Построим семейство множеств $S(\tau_1, \tau_2)$, характеризуемое следующим свойством — для любой точки $\overline{\xi} \in S(\tau_1, \tau_2) \setminus S_0$ существует бесконечная последовательность различных многочленов $Q \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_m]$ таких, что величина $|Q(\overline{\xi})|$ "мала", а абсолютное значение некоторой частной производной $|Q'_{x_i}(\overline{\xi})|$ "большое" по сравнению с $|Q(\overline{\xi})|$.

Дадим формальное определение. Пусть τ_1, τ_2 — положительные вещественные числа, n — натуральное число. Обозначим через $B_n(\tau_1, \tau_2)$ множество точек $\overline{\xi} \in \mathbb{R}^m$, $|\overline{\xi}| \leqslant 1$, для каждой из которых существует многочлен $Q \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_m]$ такой, что

$$t(Q) \leqslant n, \quad |Q(\overline{\xi})| \leqslant e^{-\tau_1 n^{m+1}}, \quad \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \left| \frac{\partial Q}{\partial x_i}(\overline{\xi}) \right| \geqslant e^{-\tau_2 n^{m+1}}.$$

И пусть

$$S(\tau_1, \tau_2) = \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n \geqslant N} B_n(\tau_1, \tau_2),$$

то есть $S(\tau_1, \tau_2)$ — множество точек, каждая из которых содержится в бесконечном числе множеств B_n. Можно доказать, что при $\tau_1 > \tau_2 + \frac{1}{m!}$ мера множества $S(\tau_1, \tau_2)$ равна нулю.

Третий шаг — доказательство включения $\Omega_0 \subset S \cup S_0$. Оказывается, можно так подобрать положительные параметры τ_1, τ_2 (с условием $\tau_1 > \tau_2 + \frac{1}{m!}$), что с множеством $S = S(\tau_1, \tau_2)$ будет выполнено включение

$$\Omega_0 \subset S \cup S_0. \tag{3}$$

Это включение доказывает теорему, поскольку мера каждого из множеств S, S_0 в правой части (3) равна нулю.

Приведем схему доказательства включения (3) (это и есть алгебраическая часть доказательства теоремы 1). Для этого нам потребуются некоторые алгебраические понятия. Пусть $\mathbb{Q}[x_0, \ldots, x_m]$ — кольцо многочленов от переменных $x_0, \ldots, x_m$ над $\mathbb{Q}$, I — некоторый однородный идеал в этом кольце. Напомним, что идеал I кольца многочленов $\mathbb{Q}[x_0, \ldots, x_m]$ называется *несмешанным*, если все его примарные компоненты имеют одинаковую размерность, равную размерности идеала I. *Показателем* $\mathfrak{p}$-примарного идеала I называется наименьшее натуральное число n с условием $\mathfrak{p}^n \subset I$. Под *размерностью* $\dim I$ однородного идеала I мы понимаем его проективную размерность. В частности, для простого однородного идеала $\mathfrak{p}$ его размерность равна $\operatorname{degtr}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}[x_0, \ldots, x_m]/\mathfrak{p}) - 1$.

Для однородного несмешанного идеала I можно определить понятия *степени идеала* $\deg I$, *логарифмической высоты идеала* $h(I)$, и *величины идеала в точке* $\overline{\xi}'$ проективного комплексного пространства $\mathbb{C}^{m+1}$, обозначаемой $|I(\overline{\xi}')|$. Эти величины по своим свойствам напоминают аналогичные характеристики многочлена. В том виде, в котором указанные величины используются в диссертации, они впервые были определены Ю.В. Нестеренко[21].

По аналогии с типом многочлена, можно определить понятие *типа идеала* I формулой

$$t(I) = \deg I + h(I).$$

Определим некоторые множества точек, используя характеристики идеалов. Пусть $\lambda = \lambda(m)$ — достаточно большое вещественное положительное число, зависящее от m.

Обозначим A_r — множество точек $\overline{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m$, $|\overline{\xi}| \leqslant 1$, $\overline{\xi} \notin S_0$, для которых существует бесконечная последовательность различных однородных несмешанных идеалов $I \subset \mathbb{Q}[x_0, x_1, \dots, x_m]$ таких, что

$$\dim I = r - 1, \quad \ln |I(1, \xi_1, \dots, \xi_m)| \leqslant -\lambda^{3^{2r}} (t(I))^{\frac{m+1}{m+1-r}}, \quad 1 \leqslant r \leqslant m.$$

Положим по определению $A_0 = \emptyset$. Можно доказать, что условие $\overline{\xi} \notin S_0$ обеспечивает, что величина $|I(1, \xi_1, \dots, \xi_m)|$ отлична от нуля, поэтому A_r определено корректно.

Аналогично B_r — множество точек $\overline{\xi} \in \mathbb{R}^m$, $|\overline{\xi}| \leqslant 1$, $\overline{\xi} \notin S_0$, для которых существует бесконечная последовательность различных однородных *простых* идеалов $\mathfrak{p} \subset \mathbb{Q}[x_0, x_1, \dots, x_m]$ таких, что

$$\dim \mathfrak{p} = r - 1, \quad \ln |\mathfrak{p}(1, \xi_1, \dots, \xi_m)| \leqslant -\lambda^{3^{2r-1}} (t(\mathfrak{p}))^{\frac{m+1}{m+1-r}}, \quad 1 \leqslant r \leqslant m.$$

Чтобы определить множество S, следует задать параметры τ_1, τ_2. Для этого нам понадобится

Лемма 9. *Пусть* $\mathfrak{p} \subset \mathbb{Q}[x_0, x_1, \dots, x_m]$, $m \geqslant 1$ *— простой однородный идеал,* $r = \dim \mathfrak{p} + 1 \geqslant 1$. *Пусть* $L = \min\limits_{E \in \mathfrak{p}} t(E)$, *где минимум берется по всем однородным многочленам идеала* $\mathfrak{p}$. *Тогда существует однородный многочлен* $F \in \mathfrak{p} \cap \mathbb{Z}[x_0, \dots, x_m]$ *такой, что некоторая его частная производная не лежит в идеале* $\mathfrak{p}$ *и при этом*

$$t(F) \leqslant c_2 L, \quad c_2 = c_2(m).$$

[21]Ю.В. Нестеренко, *О мере алгебраической независимости значений функций Рамануджана* // Труды Математического Института имени В.А. Стеклова, **218**, 1997, 299-334.

Теперь мы можем определить

$$S = S(\tau_1, \tau_2), \quad \tau_1 = \frac{1}{4}\lambda(4c_2)^{-m-1}, \ \tau_2 = \tau_1 - \frac{2}{m!}.$$

Относительно определенных выше множеств можно доказать следующие включения (леммы $10, 11, 12$):

$$A_r \subset B_r, \quad r = 1, \dots m,$$
$$B_r \subset A_{r-1} \cup S, \quad r = 1, \dots m,$$
$$\Omega_0 \subset A_m \cup S_0.$$

Из этого сразу следует справедливость цепочки включений

$$\Omega_0 \setminus S_0 \subset A_m \subset B_m \subset A_{m-1} \cup S \subset \ldots \subset A_1 \cup S \subset B_1 \cup S \subset S,$$

что равносильно (3) и доказывает теорему 1.

Во **второй главе** диссертации доказывается аналог теоремы 1 над полем комплексных чисел:

Теорема 2. *Для почти всех (в смысле $2m$-мерной меры Лебега) точек $\overline{\xi} \in \mathbb{C}^m$ существует положительная константа $c = c(\overline{\xi})$ такая, что для любого многочлена $P \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m]$, $P \not\equiv 0$, справедливо неравенство*

$$|P(\overline{\xi})| > e^{-ct(P)^{m+1}}.$$

Доказательство теоремы 2 проводится в соответствии со схемой, изложенной выше. Есть лишь небольшие изменения в метрических леммах.

Третья глава посвящена p-адическому аналогу теоремы 1:

Теорема 3. *Для почти всех (в смысле меры Хаара) точек $\overline{\xi} \in \mathbb{Q}_p^m$ существует положительная константа $c = c(\overline{\xi})$ такая, что для любого многочлена $P \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m]$, $P \not\equiv 0$ справедливо неравенство*

$$|P(\overline{\xi})|_p > e^{-ct(P)^{m+1}}.$$

Тот факт, что p-адическая норма *неархимедова*, позволяет упростить некоторые доказательства с технической точки зрения. На самом деле, именно теорема 3 была получена автором первой. И уже потом были внесены изменения в некоторые доказательства, позволившие получить теоремы 1 и 2 и изложить все три теоремы единообразно.

Благодарности

Автор благодарит своего научного руководителя — члена-корреспондента РАН, профессора Ю. В. Нестеренко — за постановку задач, многочисленные плодотворные консультации и огромную моральную поддержку. Автор также благодарен всем сотрудникам кафедры теории чисел за поддержку.

Работы по теме диссертации

[1] Михайлов С.В., *Тип трансцендентности для почти всех точек m-мерного вещественного пространства*, Математический сборник, 2007, № 10, Том 198, стр. 67–88.

[2] Михайлов С.В., *Тип трансцендентности для почти всех точек m-мерного комплексного пространства.* // Успехи математических наук, 2008, № 2, Том 63, стр. 175-176.

[3] Михайлов С.В., *О некоторых метрических проблемах теории диофантовых приближений* // Рукопись депонирована в ВИНИТИ 02.11.07 № 1017-В2007, 57 с.