МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи

Промыслова Анна Сергеевна

Численно-аналитическое исследование проблемы Штурма-Лиувилля в задачах МДТТ

Специальность: 01.02.06 — Динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2008

Работа выполнена на кафедре механики композитов механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова

Научный руководитель:	Доктор физико-математических наук, профессор Д.В.Георгиевский
Официальные оппоненты:	Доктор технических наук, профессор С.Н.Сухинин Доктор технических наук, профессор С.А.Лурье
Ведущая организация:	Институт проблем механики Российской Академии Наук

Защита состоится 12 сентября 2008 года в 16 часов на заседании специализированного совета Д 501.001.91 по механике при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова по адресу: 119992, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 1610.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 16 июля 2008 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 501.001.91
профессор С.В. Шешенин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

В механике деформируемого твердого тела и волновой динамике чрезвычайно важны методы и алгоритмы, представляющие решение задачи в виде разложения по некоторой системе функций. К таким методам относятся метод Фурье, метод интегральных преобразований и другие. Данные разложения хорошо изучены, когда каждая из функций, участвующая в них, зависит только от одной из переменных (пространственных либо временной), входящих в задачу. Для нахождения естественной системы функций, по которой можно осуществить разложение, обычно решается определенная граничная задача для обыкновенного дифференциального уравнения, в широком смысле называемая задачей Штурма-Лиувилля.

Математический аппарат аналитического нахождения собственных значений, собственных функций и разложения по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля хорошо развит и излагается, например, в классических учебниках по математической физике И.Г.Петровского, С.Г.Михлина, Н.С.Кошлякова, В.С.Владимирова. Для анализа обобщенных задач Штурма-Лиувилля, задач с особыми точками и сингулярными возмущениями в механике используются приближенные аналитические и численные методы.

С появлением современных мощных компьютеров и суперкомпьютеров возникает необходимость создания и апробации новых методов исследования, в том числе и проблемы Штурма-Лиувилля, приспособленных именно для такого рода вычислительных средств. Поиск алгоритмов, оптимизирующих вычисления в той или иной задаче на компьютерах с наперед заданными свойствами (быстродействием, памятью, архитектурой), является важной составляющей частью вычислительной механики - науки, сформировавшейся на стыке классической механики сплошной среды и методов вычислений и развиваемой в настоящее время в работах Б.Е.Победри, А.С.Кравчука, Г.М.Кобелькова, С.В.Шешенина и других механиков и математиков.

Одним из новых методов, о которых шла речь выше, служит метод ускоренной сходимости, предложенный в 90-е годы Л.Д.Акуленко и С.В.Нестеровым для анализа задач на собственные значения. С помощью этого метода с достаточно точной оценкой собственного числа за несколько итераций получается искомое решение. Одним из достоинств этого метода является поиск каждого собственного значения по отдельности. Кроме того, одновременно численно определяются собственные функции, соответствующие каждому собственному числу.

В настоящей диссертации данный метод развивается на класс задач Штурма-Лиувилля с комплексными коэффициентами, моделирующих многие явления и процессы в механике сплошной среды, динамике и прочности машин, приборов и аппаратуры, что является актуальным как с позиций теоретического так и практического интереса.

Цель работы.

1. Разработка численно-аналитического метода решения обобщенной проблемы Штурма-Лиувилля с комплексными коэффициентами.

2. Численно-аналитическое решение задачи о продольных и крутильных колебаниях упругих стержней переменного поперечного сечения (концентраторов) для различных форм концентраторов, типов граничных условий и областей частот колебаний.

3. Ассимптотический анализ при малых безразмерных пределах текучести любого дискретного собственного значения вблизи границы области устойчивости в обобщенной задаче Рэлея, представляющей собой задачу Штурма-Лиувилля с комплексными коэффициентами.

Научная новизна.

1. Разработан метод численно-аналитического решения обобщенной проблемы Штурма-Лиувилля с комплексными коэффициента-

ми, являющийся развитием метода ускоренной сходимости.

2. В задаче о продольных и крутильных колебаниях упругих стержней переменного поперечного сечения (концентраторов) для рассмотренных профилей построенные графики коэффициентов усиления показывают, что с увеличением номера собственного значения кривые стремятся к некоторой кривой, которая является их предельной. Данное утверждение справедливо как для условий первого, так и второго рода.

3. Разработан аналитический метод получения первого члена асимптотического разложения по малому безразмерному пределу текучести любого дискретного собственного значения обобщенной задачи Рэлея. По знаку этого члена можно судить об устойчивости того или иного профиля скорости относительно возмущения материальной функции среды - предела текучести при сдвиге.

Достоверность предложенного метода и результатов обеспечивается строгостью постановок задач и математических методов их решения, анализом различных модельных и тестовых задач, сопоставлением полученных результатов с теоретическими и экспериментальными данными других авторов.

Используемые методы. В работе используются методы вычислительной механики, методы функционального анализа, вариационного исчисления, методы теории дифференциальных уравнений в частных производных.

Практическая ценность работы определяется тем, что рассмотренные в диссертации расчетно-теоретические схемы позволяют анализировать динамическое поведение материалов при продольных и крутильных колебаниях стержней переменного поперечного сечения. Подход к описанию процессов деформирования материалов и конструкций, предложенный в диссертации, позволяет существенно сократить материальные затраты на дорогостоящие лабораторные экспериментальные исследования.

Полученные результаты могут служить научно-методическим основанием для обоснования рациональных конструктивно-технологических решений при проектировании и изготовлении акустических концентраторов различного назначения.

Диссертационная работа выполнена при поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований проект № 08-01-00231.

Апробация работы. Результаты, представленные в диссертации, докладывались автором и обсуждались на следующих научных семинарах и конференциях:

– Аспирантский семинар и научно - исследовательский семинар кафедры механики композитов механико - математического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова под руководством проф. Б.Е.Победри.

– Научно - исследовательский семинар "Актуальные проблемы геометрии и механики"на механико - математическом факультете МГУ им. М.В.Ломоносова под руководством проф. Д.В.Георгиевского и д.ф.-м.н. М.В.Шамолина.

– Научно - исследовательский семинар "Задачи механики сплошной среды"в ИПМех РАН под руководством проф. С.В.Нестерова и проф. Д.В.Георгиевского.

– Научно - исследовательский семинар кафедры теории упругости механико - математического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова под руководством проф. И.А.Кийко.

– Научно - исследовательский семинар кафедры волновой и газовой динамики механико - математического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова под руководством академика РАН Е.И.Шемякина.

– Научная конференция Ломоносовские чтения, МГУ им. М.В.Ломоносова, 2007, 2008 г.г.

– Научная конференция Ломоносов-2008, МГУ им. М.В.Ломоносова, 2008г.

Структура работы. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы из 110 наименований. Работа содержит 59 рисунков. Общий объем диссертации - 108 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** приводится общая характеристика работы, включающая в себя обоснование актуальности и научной новизны. Излагается содержание диссертации и проведен обзор литературы, связанной с темой диссертации.

В **первой главе** дается краткий обзор численно-аналитических методов решения проблемы Штурма-Лиувилля. Приводится метод Рэлея-Ритца, с помощью которого можно получить верхнюю оценку первого собственного значения на основе пробной функции, удовлетворяющей граничным условиям задачи. Обсуждается метод ускоренной сходимости в случае граничных условий первого рода и третьего рода. Этот метод основан на сочетании вариационного подхода, теории краевых задач и методов возмущений и приводит к рекуррентному алгоритму последовательного уточнения собственных чисел и функций. Как и "метод касательных"Ньютона, он обладает ускоренной (квадратичной) сходимостью.

Ряд проблем классической механики, теории упругости, теории колебаний приводит к обобщенной задаче Штурма-Лиувилля, в которой коэффициенты уравнения - произвольные нелинейные функции искомого параметра. Поэтому исследуется задача конструктивного определения собственных частот и форм колебаний распределенных систем с существенно изменяющимися параметрами. В отличие от классического случая самосопряженной краевой задачи допускается произвольная нелинейная зависимость коэффициентов уравнения от числового параметра, собственные значения которого требуется найти.

В рассмотренных методах не учитывается то обстоятельство, что коэффициенты уравнения могут быть комплекснозначными. В виду того, что в механике деформируемого твердого тела довольно часто встречаются задачи с комплексными коэффициентами, был разработан численно-аналитический метод, развивающий метод ускоренной сходимости, дающий решение обобщенной задачи Штурма-

Лиувилля с комплекснозначными коэффициентами и допускающий нелинейную зависимость коэффициентов уравнения от собственного значения.

Рассматривается следующая задача с граничными условиями первого рода :

$$\begin{cases} (p(x)u')' + [r(x,\lambda) - q(x)]u = 0 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} . \tag{1}$$

где $u = u(x)$ - координатная функция, $x \in [0,1] \in \mathbb{R}$ - аргумент, $\lambda = \lambda^1 + i\lambda^2 \in \mathbb{C}$ - постоянная разделения пространственной и временной переменных. Функции $p(x), q(x), r(x,\lambda)$ считаются достаточно гладкими и отделенными от нуля; $p(x), q(x) \in \mathbb{R}$, $u(x,\lambda), r(x,\lambda) \in \mathbb{C}$.

Ставится задача найти такие вещественные или комплексные значения λ, при которых существуют нетривиальные решения уравнения с краевыми условиями (1).

Выбирается некоторое λ^0 и рассматривается задача Коши

$$\begin{cases} (p(x)v')' + (r(x,\lambda^0) - q(x))v = 0 \\ v(0) = 0, \quad v'(0) = 1 \end{cases} \tag{2}$$

Аналитически или численно строится решение $v(x,\lambda^0)$ задачи (2) и рассматривается нахождение первого собственного числа λ_1 и функции $u(x)$. Введем числовой параметр $\varepsilon = 1 - \xi$, где ξ - первый корень уравнения $v(x,\lambda^0) = 0$. Малость величины ε характеризует относительную близость λ к λ^0; $\{\lambda^0, v(x,\lambda^0)\}$ - точное решение обобщенной задачи (1) на известном промежутке $0 \le x \le \xi,\ \ \xi = \xi(\lambda)$. Будем считать его приближенным решением для исходного интервала. Процедура уточнения порождающего решения $\{\lambda^0, v(x,\lambda^0)\}$ основана на введении возмущенного аргумента $y = \xi\, x$ и представлении задачи (1) в виде возмущенной. В результате преобразований получим для искомого λ_1:

$$\lambda_1 = \lambda^0 - \varepsilon\,\frac{p(\xi)\,\xi\,|v'(\xi)|^2}{\int_0^\xi r'_\Lambda\,|v(\xi)|^2\,dy} + o(\varepsilon^2), \qquad |v(\xi)|^2 = v(\xi)\,\overline{v(\xi)} \tag{3}$$

Процедура взятия интеграла в знаменателе может быть заменена процедурой совместного интегрирования задачи Коши для функции v и функции $\omega = \partial\, v/\partial\lambda$. В результате получим

$$\int_0^\xi r'_\Lambda\,|v(\xi)|^2\,dy = p(\xi)\,\overline{v(\xi)}\,\omega(\xi). \tag{4}$$

Используем вновь соотношения (2) - (4) для построения уточненного значения λ на основе найденного λ_1 и рассматриваемого как начальное приближение (аналогично λ^0). В итоге, получим рекуррентную процедуру уточнения приближенного решения исходной задачи (1), обладающую свойством ускоренной сходимости, то есть приводящую к погрешности $\varepsilon^{(k)} = O((c_\lambda\varepsilon)^{\Theta(k)})$, $|\varepsilon| \ll 1$, $c_\lambda \sim 1, \quad \Theta(k) = 2^k$.

Проводится тестирование данного метода с помощью различных примеров.

Во **второй главе** диссертации рассматривается задача МДТТ о продольных колебаниях упругих стержней переменного поперечного сечения (концентраторов). Показано, что постановки задач о продольных и крутильных колебаниях упругих стержней сводятся к задаче Штурма-Лиувилля

$$v'' + \frac{S'}{S}\,v' + k^2 v = 0, \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c_1^2} \tag{5}$$

где ω — частота колебаний, c_1 — соответствующая скорость волн в стержне. Принимаются два типа граничных условий (первого и второго рода):

$$v(0) = 0, \quad v(1) = 0 \tag{6}$$

$$v'(0) = 0, \quad v'(1) = 0 \tag{7}$$

для трех классических профилей продольного сечения и получаются аналитические выражения для коэффициента усиления ($N_1 =$

$|v(1)/v(0)|$ при граничных условиях второго рода и $N_2 = |v'(1)/v'(0)|$ при граничных условиях первого рода), распределения колебательной скорости и деформаций в случае граничных условий первого (на границе заданы скорости) и второго рода (на границе заданы напряжения). Приводятся результаты численных исследований поставленной задачи при различных формах концентратора. Проводится сравнение полученных коэффициентов усиления в зависимости от профиля поперечного сечения, выбора граничных условий и номера собственного значения.

Для граничных условий второго рода поставленная задача аналитически исследовалась в классических работах Л.Г.Меркулова. Показано, что для конического, экспоненциального и катеноидального профилей в случае граничных условий второго рода наибольший коэффициент усиления достигается при катеноидальном профиле. В случае граничных условий первого рода, коэффициенты усиления совпадают, то есть выбирая профиль из предложенных, необходимо брать тот, который проще в изготовлении.

Кроме того, замечается, что с увеличением номера собственного числа кривые для коэффициента усиления как для первого, так и для второго рода стремятся к предельным кривым.

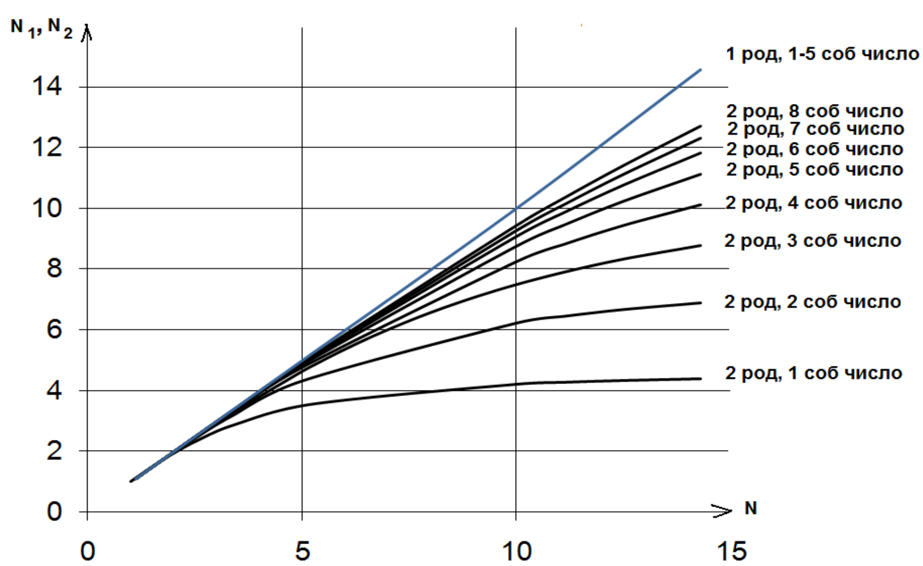

Рис. 1: Коэффициент усиления для конического концентратора $S = S_1(1 - ax)^2$

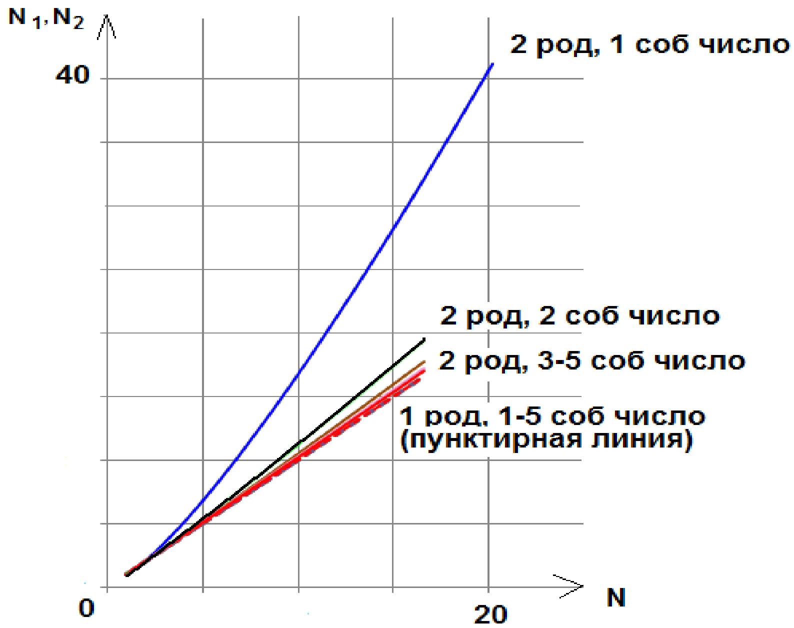

Рис. 2: Коэффициент усиления для катеноидального концентратора $S = S_2 \operatorname{ch}^2(a(1-x))$

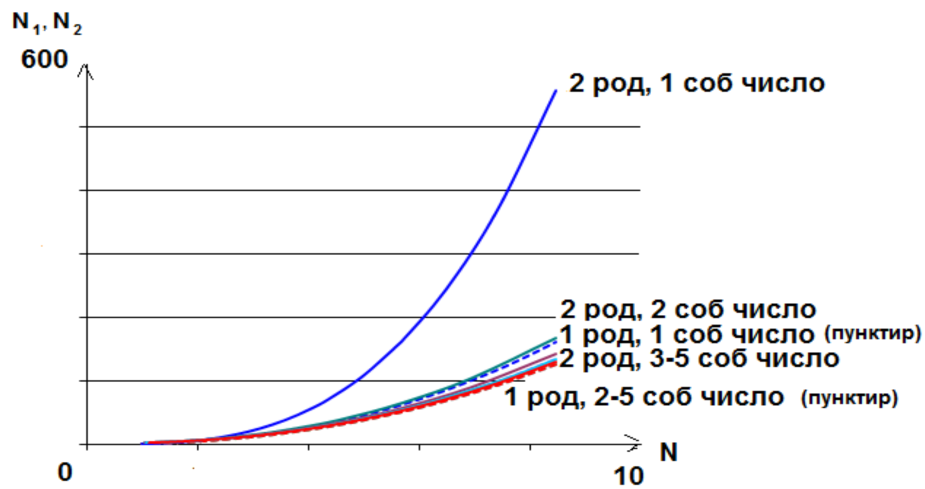

Рис. 3: Коэффициент усиления для концентратора с профилем продольного сечения $S = S_2 \operatorname{ch}^3(a(1-x))$

Одновременно с вычислением коэффициентов усиления были получены распределения амплитуд колебательной скорости и деформаций по длине концентратора для всех рассмотренных профилей, двух типов граничных условий, каждого собственного значения и различных N - отношениях радиусов поперечных сечений широкого и узкого концов концентратора. На рис.4 показаны характерные графики амплитуд колебательной скорости и деформаций.

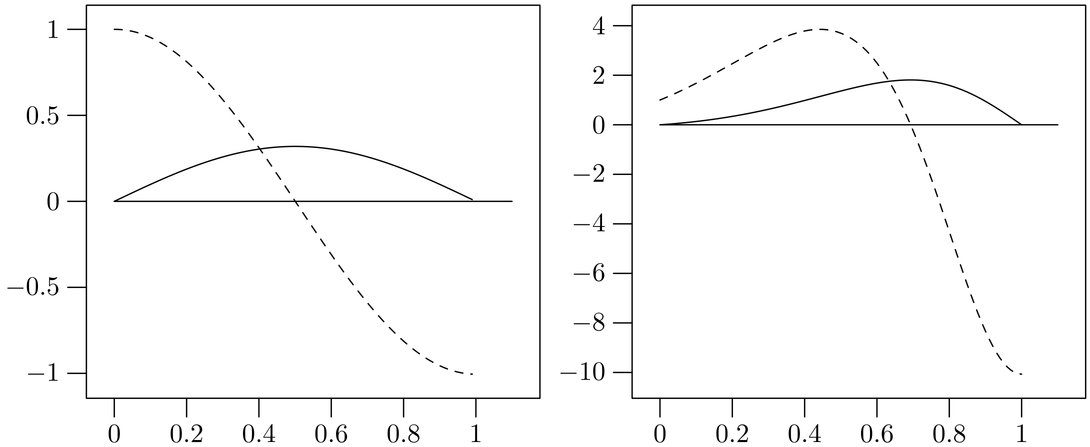

Рис. 4: Распределение колебательной скорости (сплошная линия) и скорости деформаций (пунктирная) по катеноидальному концентратору (1 род, 1 соб число, N=1, N=10)

В **третьей главе** рассматривается задача Штурма-Лиувилля с комплексными коэффициентами - обобщенная задача Рэлея об устойчивости сдвигового течения плоского идеальножесткопластического слоя:

$$(\alpha + isv^\circ)(\varphi'' - s^2\varphi) + 4\tau s \left(\frac{\varphi'}{|v^{\circ\prime}|}\right)' - isv^{\circ\prime\prime}\varphi = 0, \quad 0 < x < 1 \quad (8)$$

$$\varphi(0) = \varphi(1) = 0 \quad (9)$$

Невозмущенное течение характеризуется профилем продольной скорости $v^\circ \in C^2[0;1]$; $\sup|v^{\circ\prime}(x)| \le q < \infty$. Область изменения x в sup, inf, а также интегралах по x по умолчанию принимается от 0 до 1. В (8) $\alpha = \alpha_* + i\alpha_{**}$ - частота колебаний, $s > 0$ - волновое число, $|\varphi|e^{(\alpha_* t)}$ - амплитуда возмущения функции тока. Часто вместо параметра устойчивости $\alpha(s)$ вводится комплексная фазовая скорость $c(s) = i\alpha/s$, $\tau = \tau_s/(\rho V^2)$ - безразмерный предел текучести; τ_s - размерный предел текучести; ρV^2 - динамический напор.

При $\tau = 0$ эта задача совпадает с классической задачей Рэлея об устойчивости сдвигового течения идеальной несжимаемой жидкости в плоском слое.

Дискретный спектр задачи Рэлея для того или иного профиля сдвиговой скорости может либо лежать на границе области устойчивости, либо состоять из пар собственных значений, одно из которых принадлежит полуплоскости неустойчивости. При изучении вопросов возмущения физической модели идеальной жидкости малым пределом текучести τ и связанных с этим стабилизационных и дестабилизационных эффектов представляет интерес исследование первого, в определенном смысле пограничного, случая.

Дана интегральная оценка и выведено явное выражение для первого члена асимптотического разложения по τ любого дискретного собственного значения задачи Рэлея, принадлежащего границе области устойчивости:

$$\alpha_{1*} = -4s^2 \int \left(\frac{\varphi_0'}{|v^{\circ\prime}|} \right)' \frac{\varphi_0 \, dx}{v^\circ - c_{0*}} \Bigg/ \int \frac{v^{\circ\prime\prime} \varphi_0^2 \, dx}{(v^\circ - c_{0*})^2} \tag{10}$$

По знаку этого члена можно судить об устойчивости того или иного профиля скорости при возмущении материальной функции среды - предела текучести при сдвиге.

Основные результаты и выводы

1. Разработан численно-аналитический метод решения обобщенной проблемы Штурма-Лиувилля с комплексными коэффициентами, являющийся развитием метода ускоренной сходимости. С помощью этого метода с выведенной оценкой собственного числа за несколько итераций получается искомое решение. Одним из достоинств этого метода является поиск каждого собственного значения по отдельности. Одновременно численно определяются собственные функции, соответствующие каждому собственному числу.

2. Аналитические исследования показывают, что наибольшим усиливающим действием из рассмотренных концентраторов для граничных условий второго рода (на границе заданы напряжения) обладает катеноидальный концентратор, а наименьшим конический. Для граничных условий первого рода (на границы заданы скорости) кривые во всех случаях совпадают с кривой для экспоненциального

концентратора.

3. Для рассмотренных профилей показано, что с увеличением номера собственного значения кривые коэффициентов усиления стремятся к некоторой кривой, которая является их предельной. Это стремление может быть как снизу, так и сверху. Это означает, что с точки зрения получения наибольших усилий имеет смысл рассматривать или первое собственное значение (в случае, когда стремление к предельной кривой происходит сверху) или максимально возможное (если стремление к предельной кривой происходит снизу). Данное утверждение справедливо как для условий первого, так и второго рода.

4. Разработан аналитический метод получения первого члена асимптотического разложения по малому безразмерному пределу текучести любого собственного значения обобщенной задачи Рэлея, принадлежащего границе области устойчивости. По знаку этого члена можно судить об устойчивости того или иного профиля скорости относительно возмущений материальной функции среды - предела текучести при сдвиге.

По теме диссертации опубликованы следующие работы:

1. *Акуленко Л.Д., Георгиевский Д.В., Нестеров С.В., Промыслова А.С.* Возмущение собственных значений в обобщенной задаче Рэлея//Докл. РАН. 2008. Т.422. №5.

2. *Георгиевский Д.В., Промыслова А.С.* Анализ спектральных кривых в обобщенной задаче Рэлея методом ускоренной сходимости// Тезисы докладов. Научная конференция "Ломоносовские чтения". Секция механика. М.: Издательство Московского Университета, 2007. С.56.

3. *Георгиевский Д.В., Промыслова А.С.* Задачи на собственные значения, моделирующие продольные колебания упругих стержней переменного сечения// Тезисы докладов. Научная конференция "Ломоносовские чтения". Секция механика. М.: Издательство Московского Университета, 2008.

4. *Промыслова А.С.* Продольные колебания упругих стержней переменного сечения (концентраторов)//Известия РАН. МТТ. 2008. № 6. В печати.

5. *Промыслова А.С.* Решение обобщенной задачи Штурма-Лиувилля с комплексными коэффициентами методом ускоренной сходимости//Вестник МГУ. 2008. № 2. С. 59-61.

6. *Промыслова А.С.* Метод ускоренной сходимости в задаче о продольных колебаниях упругих стержней переменного сечения (концентраторов)// Тезисы докладов. Научная конференция "Ломоносов-2008". Секция механика. 2008.