

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи  
УДК 515

МАНТУРОВ Василий Олегович

**ГЕОМЕТРИЯ И КОМБИНАТОРИКА  
ВИРТУАЛЬНЫХ УЗЛОВ**

01.01.04 — геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени  
доктора физико–математических наук

Москва — 2008

Работа выполнена на кафедре геометрии Московского государственного областного университета.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор  
ВИРО Олег Янович  
доктор физико-математических наук, профессор  
НЕЦВЕТАЕВ Никита Юрьевич  
доктор физико-математических наук, профессор  
ЧЕРНАВСКИЙ Алексей Викторович

Ведущая организация: Институт математики имени  
С.Л.Соболева Сибирского отделения  
Российской Академии Наук

Защита диссертации состоится “\_\_” \_\_\_\_\_ 2008 г. в 16 ч. 40 мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете им. М.В.Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские Горы, Московский государственный университет, механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж)

Автореферат разослан “\_\_” \_\_\_\_\_ 2008 года.

Ученый секретарь диссертационного  
совета Д.501.001.84, доктор физико- \_\_\_\_\_ А.О.Иванов.  
математических наук, профессор

# 1 Общая характеристика работы

## 1.1 Актуальность темы диссертации

В последние десятилетия первостепенную роль в геометрии и топологии стали играть проблемы, связанные с топологией малых размерностей (инварианты узлов, трехмерных и четырехмерных многообразий, гладкие структуры на четырехмерных многообразиях, лежандровы узлы<sup>1</sup>, инварианты Зайберга-Виттена<sup>2</sup>, гомологии Хегора-Флоера<sup>3</sup>). При этом особое значение приобрели новые методы в теории узлов, а также широкое обобщение теории узлов — то, что теперь называется “теорией виртуальных узлов”. Важные инварианты и результаты получаются часто с использованием комбинаторных методов, а также методов, разработанных в теории виртуальных узлов и теории гомологий Хованова. Исследованию последних двух теорий и посвящена настоящая диссертация.

Со времен Рейдемейстера<sup>4</sup> классический узел понимается комбинаторно — как класс эквивалентности вложенных в плоскость четырехвалентных графов со структурой проход–переход по локальным перестройкам (и сохраняющим ориентацию автоморфизмам плоскости); эти перестройки, называются движениями Рейдемейстера и обозначаются  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ .

Классические инварианты узлов, определяемые в топологических терминах (полином Александера, сигнатура) не смогли дать ответа на многие вопросы в теории узлов. Прорыв в современной теории узлов, начавшийся с работы Конвея<sup>5</sup>, основан на комбинаторном определении инвариантов.

Все эти комбинаторные инварианты определяются, исходя из диаграмм узлов. Таковы, например, скейн-инварианты — это инварианты, определяемые на всех ориентированных зацеплениях, которые для каждой тройки “похожих” диаграмм (тройки Конвея), отличающихся только в малой окрестности удовлетворяют определенному линейному соотношению.

Важным развитием теории инвариантов узлов является теория инвариантов Васильева<sup>6</sup>. Инварианты Васильева (инвариантами конечного порядка) изначально были определены топологически (посредством спектральной последовательности, вычисляющей гомологии пространства сингулярных отображений окружности в трехмерное

---

<sup>1</sup>Fuchs, D. and Tabachnikov, S. (1997), Invariants of Legendrian and transverse knots in the standard contact space, *Topology*, **36**, pp. 1025–1053.

<sup>2</sup>см., напр., Дж.Д. Мур, Лекции об инвариантах Зайберга-Виттена, МЦНМО, М., 2003

<sup>3</sup>Oszváth, P, Szabó, Z. (2006), Heegaard Diagrams and Floer Homology, Proc. ICM-2006, Madrid, *EMS*, vol. 2., pp. 1083–1099

<sup>4</sup>Reidemeister, K. (1932) *Knotentheorie*, (Berlin: Springer).

<sup>5</sup>Conway, J.H, (1970), An enumeration of knots and links and some of their algebraic properties, In: *Computational Problems in Abstract Algebra* (New York, Pergamon Press), pp. 329–358.

<sup>6</sup>Vassiliev, V. A. (1990), Cohomology of knot spaces, in Theory of Singularities and its applications, *Adv. in Sov. Math.*, **1**, pp. 23–70.

пространство), но затем появилось их комбинаторное определение, которое состоит в следующем.

Пусть  $f$  — инвариант узлов. Тогда можно задать его значение на *сингулярных узлах* — иммерсиях окружности общего положения, все особенности которых исчерпываются конечным числом двойных трансверсальных точек. Определим индуктивно производные инварианта  $f$  по правилу

$$f^{(n+1)}(\text{сигнатура с точкой}) = f^{(n)}(\text{сигнатура}) - f^{(n)}(\text{сигнатура}). \quad (1)$$

Здесь  $f^0 \equiv f$  — исходная функция на обычных узлах, а значение функции  $f^{(n+1)}$  на сингулярных узлах с  $(n+1)$  перекрестком определяется, исходя из значений функции  $f^{(n)}$  на диаграммах с  $n$  перекрестками, получаемых разрешением этого перекрестка согласно (1). Инвариант  $f$  называется *инвариантом (Васильева) конечного порядка* (порядка  $\leq n$ ), если  $f^{(n+1)} \equiv 0$ .

Важным примером скейн-полиномов является полином Джонса<sup>7</sup>.

Оказывается, что этот полином (после простой замены переменной) может быть выражен посредством более простого соотношения. А именно, *скобка Кауфмана*<sup>8</sup> от одной переменной  $a$ , задаваемая с помощью соотношения

$$\langle \text{сигнатура} \rangle = a \langle \text{сигнатура} \rangle + a^{-1} \langle \text{сигнатура} \rangle, \quad (2)$$

после нормировки (умножения на некоторую степень от  $(-a)$ ) дает инвариантный полином  $X$ , который получается из полинома Джонса заменой переменной.

Соотношение (2) выражает значение скобки Кауфмана для диаграммы с  $n$  перекрестками через значение скобки на диаграммах со строго меньшим количеством перекрестков. Для всякой неориентированной диаграммы  $L$  с  $n$  (классическими) перекрестками скобку Кауфмана можно записать в виде суммы  $2^n$  слагаемых

$$\langle L \rangle = \sum_s a^{\alpha(s)-\beta(s)} (-a^2 - a^{-2})^{\gamma(s)-1}, \quad (3)$$

где сумма берется по всевозможным состояниям  $s$  (разведениям всех перекрестков),  $\alpha(s)$  — это количество перекрестков, разведенных положительно:  $\text{сигнатура} \rightarrow \text{сигнатура}$ ,  $\beta(s) = n - \alpha(s)$ , а  $\gamma(s)$  — число окружностей в разведенном состоянии  $s$ . Состояния можно рассматривать как вершины дискретного куба  $\{0, 1\}^n$ , где 0 соответствует положительному разведению, а 1 — отрицательному. Здесь величина  $(-a^2 - a^{-2})^{k-1}$  — это значение скобки Кауфмана на тривиальном зацеплении с  $k$  компонентами.

Инвариант  $X(L)$  равен  $(-a)^{-3w(L)} \langle |L| \rangle$ , где  $|L|$  — диаграмма, полученная из  $L$  “забыванием ориентации”, а  $w(L)$  — сумма знаков классических перекрестков диаграммы

<sup>7</sup>Jones, V. F. R. (1985), A polynomial invariant for links via Neumann algebras, *Bull. AMS*, **129**, pp. 103–112.

<sup>8</sup>Kauffman, L.H. (1987), State Models and the Jones Polynomial, *Topology*, **26** (1987), pp. 395–407.

$L$  (перекресток  $\times$  считается положительным, а перекресток  $\times$  — отрицательным).

Революционная идея Хованова<sup>9</sup> состоит в переходе от полиномов к линейным градуированным пространствам, от линейных комбинаций — к комплексам, а от инвариантного полинома (нормированной скобки Кауфмана) к *гомологиям* биградуированного комплекса (которые оказываются инвариантными относительно движений Рейдемейстера); здесь в структуре куба используется не только *количество* окружностей в каждом состоянии, но и их взаимное расположение и перестройка.

**Замечание.** Здесь правильнее было бы говорить о *когомологиях*, но в литературе устоялось название *гомологии Хованова*, которого мы и будем придерживаться.

Обозначения в теориях Хованова и Кауфмана несколько отличаются друг от друга нормировкой на тривиальном узле и заменой переменной. А именно, у Хованова  $q = -a^2$ , где  $a$  — обычная переменная, используемая в скобке Кауфмана. Соответствующий полином Джонса, принимающий на тривиальном узле значение  $(q + q^{-1})$ , обозначается через  $\hat{J}$ .

Опишем конструкцию гомологий Хованова для классических узлов, следуя<sup>9</sup>.

Рассмотрим биградуированные комплексы, у которых первая градуировка будет называться высотой, а вторая — просто градуировкой. Дифференциал в комплексе сохраняет градуировку и повышает высоту на единицу.

Пусть дана диаграмма  $L$  с  $n$  классическими перекрестками. Ей соответствует дискретный куб  $\{0, 1\}^n$ , с каждой вершиной  $s$  которого связано некоторое количество окружностей  $\gamma(s)$ . Сопоставим каждой вершине куба биградуированный модуль  $V^{\otimes \gamma(s)}[\beta(s)]\{\beta(s)\}[-n_-]\{n_+ - 2n_-\}$ . Здесь  $V$  — биградуированный модуль, порожденный элементами  $1$  и  $X$  градуировок  $(0, 1)$  и  $(0, -1)$  соответственно. Далее,  $\beta(s)$  — *высота вершины*,  $n_+$  и  $n_-$  — количества положительных и отрицательных перекрестков, а  $[\cdot]$  и  $\{\cdot\}$ , означают сдвиг первой и второй градуировки соответственно. Пространство цепей комплекса есть прямая сумма пространств цепей, соответствующих всем вершинам куба.

Оказывается, можно так определить дифференциал на этом биградуированном модуле, что градуированная эйлерова характеристика полученного комплекса будет равна полиному Джонса  $\hat{J}$  (который отличается от обычного полинома Джонса нормировкой и заменой переменной).

Дифференциал  $\partial$  представляет собой сумму *частичных дифференциалов*, каждый из которых действует вдоль ребер куба в направлении, увеличивающем координату. В случае классических зацеплений частичный дифференциал определяется отображениями умножения  $m : V \otimes V \rightarrow V$  и коумножения  $\Delta : V \rightarrow V \otimes V$  (на некоторых ребрах ставится также знак минус, чтобы квадрат результирующего дифференциала был равен нулю). Мы полагаем

<sup>9</sup>Khovanov, M. (1997), A categorification of the Jones polynomial, *Duke Math. J.*, **101** (3), pp.359-426.

$$m : \begin{cases} 1 \otimes X \mapsto X, 1 \otimes 1 \mapsto 1, \\ X \otimes 1 \mapsto X, X \otimes X \mapsto 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$\Delta : \begin{cases} 1 \mapsto 1 \otimes X + X \otimes 1 \\ X \mapsto X \otimes X. \end{cases} \quad (5)$$

Частичный дифференциал  $\partial$  вдоль ребра куба представляет собой тензорное произведение  $\pm\Delta$  или  $\pm m$  и набора отображений  $Id$ ; здесь  $\pm\Delta$  или  $\pm m$  относятся к тем окружностям, которые перестраиваются в данном перекрестке, а  $Id$  — к остальным. Получим биградуированное пространство цепей  $\mathcal{C}$  с дифференциалом  $\partial$  на нем.

Теория виртуальных узлов, изобретенная Кауфманом в работе<sup>10</sup> возникает как комбинаторное обобщение классической теории узлов (вводится новый вид перекрестка, называемый виртуальным и обобщаются движения Рейдемейстера). При этом она имеет также геометрический аспект: виртуальные узлы — это узлы в утолщенных поверхностях вида  $M \times [0, 1]$ , где  $M$  — ориентированная двумерная компактная поверхность, рассматриваемая с точностью до добавления/удаления ручек. Более точно, виртуальные узлы имеют три определения.

Первое (комбинаторное): классы эквивалентности диаграмм по преобразованиям. Новый тип перекрестка называется виртуальным и изображается кружочком. Набор обобщенных движений Рейдемейстера таков: это все обычные движения Рейдемейстера, относящиеся к классическим перекресткам, а также движение объезда. Последнее состоит в том, что дуга, содержащая последовательно несколько виртуальных перекрестков, но не содержащая классических перекрестков, может быть преобразована в любую другую дугу с теми же начальной и конечной точками; на месте пересечений новой дуги с оставшейся частью диаграммы узла ставятся виртуальные перекрестки.

Движение объезда можно заменить его локальными версиями — виртуальными движениями Рейдемейстера, которые состоят из: чисто виртуальных движений Рейдемейстера  $\Omega'_1, \Omega'_2, \Omega'_3$ , которые получаются из классических движений Рейдемейстера заменой всех участвующих в них классических перекрестков виртуальными перекрестками полувиртуальной версии  $\Omega''_3$  третьего движения Рейдемейстера, которая состоит в том, что дуга, содержащая два виртуальных перекрестка, может быть перенесена сквозь классический перекресток.

Наличие движения объезда подводит к следующей трактовке виртуальных узлов. Известно, что классические узлы задаются *гауссовыми диаграммами*.

*Гауссовой диаграммой*, соответствующей плоской диаграмме (виртуального) узла  $K$ , называется диаграмма, состоящая из ориентированной окружности (с фиксированной точкой), на которой прообразы прохода и перехода (для каждого классического

<sup>10</sup>Kauffman, L. H. (1999), Virtual knot theory, *Eur. J. Combinatorics* **20**(7), pp. 662–690.

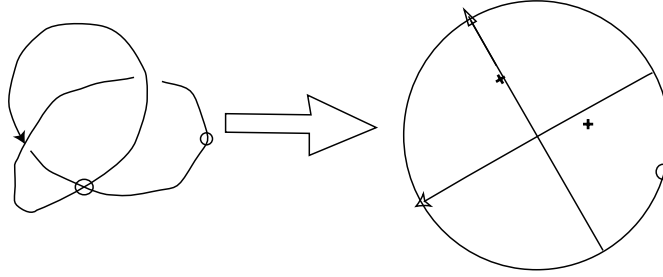


Рис. 1: Гауссова диаграмма виртуального узла

перекрестка) соединены стрелками; каждая стрелка направлена от прообраза перехода к прообразу прохода и снабжена знаком, который совпадает со знаком перекрестка.

Произвольные гауссовы диаграммы, вообще говоря, не могут быть реализованы в виде вложения графа в плоскость, но можно их реализовать посредством *погружения общего положения*, отмечая точки, имеющие больше одного прообраза (в случае общего положения — ровно два прообраза), виртуальными перекрестками, см. рис. 1. На самой гауссовой диаграмме виртуальные перекрестки не отмечаются.

Это естественным образом приводит к следующему (второму) определению виртуальных узлов (не зацеплений). Рассмотрим все формальные гауссовы диаграммы и опишем формально движения Рейдемейстера (как в случае классических диаграмм). При этом классы эквивалентности гауссовых диаграмм по формальным движениям Рейдемейстера и будут представлять виртуальные узлы. Отметим, что нам не понадобится движение объезда, так как гауссова диаграмма “не знает” ничего о расположении виртуальных перекрестков на плоскости, а “знает” лишь классические перекрестки и то, как они соединены между собой.

Тот факт, что две ветви виртуального узла, имеющие виртуальное пересечение, относятся к двум “далеко стоящим” частям узла, приводит к (третьему, топологическому) определению виртуальных узлов как узлов в утолщенных поверхностях  $S \times I$ , где  $S$  — двумерная ориентированная замкнутая поверхность, а  $I$  — отрезок; при этом утолщенные поверхности должны рассматриваться с точностью до стабилизации, т.е. с точностью до добавления (удаления) ручек к поверхности  $S$  так, чтобы добавляемые утолщенные ручки не затрагивали соответствующего узла. Здесь и далее предполагается, что на утолщенной поверхности  $S \times I$  фиксирована структура прямого произведения и указано, какой край является верхним, а какой — нижним. Никакой структуры на  $S$  не фиксируется, так что можно считать, что  $S$  рассматривается с точностью до гомеоморфизма, сохраняющего ориентацию. Аналогичная теория узлов в ориентированных утолщениях *произвольных* двумерных замкнутых поверхностях носит название *теории скрученных узлов*<sup>11</sup>.

В случае зацепления разрешим также несвязные поверхности  $S_1 \sqcup \dots \sqcup S_k$ . Зацепле-

<sup>11</sup>Bourgoin, M. O., Twisted Link Theory, arxiv: math. GT/0608233.

ния в  $S \times I$  описываются диаграммами на  $S$  с проходами и переходами. В этом смысле виртуальные диаграммы получаются с помощью регулярных проекций общего положения диаграмм с  $S$  на плоскость: перекрестки переходят в классические перекрестки, а новые пересечения (дефекты проекции) отмечаются виртуальными перекрестками. Движения Рейдемейстера для диаграмм на  $S$  (те же, что и в случае классических диаграмм узлов) соответствуют классическим движениям Рейдемейстера для диаграмм на  $\mathbf{R}^2$ ; существуют также преобразования, которые не меняют комбинаторной структуры диаграммы на  $S$ , но меняют комбинаторную структуру проекции на плоскость: им соответствует движение объезда. Таким образом, виртуальные узлы сами по себе представляют объекты маломерной топологии. Поэтому любая задача про виртуальные узлы (решенная, например, из диаграмматических соображений) представляет собой некоторый факт из маломерной топологии. Теорема об эквивалентности различных определений виртуальных узлов была анонсирована в первой работе Кауфмана о виртуальных узлах и доказана различными авторами, в том числе Кауфманом. Полное подробное доказательство можно найти, например, в [Ma1].

Отметим, что гауссовы диаграммы являются важнейшим инструментом при построении инвариантов Васильева узлов. А именно, М.Н.Гусаровым<sup>12</sup> доказана теорема о существовании комбинаторных формул типа Виро-Поляка<sup>13</sup> для вычисления произвольных инвариантов Васильева классических узлов. Каждая комбинаторная формула связана с подсчетом вхождений (с коэффициентами) в данную гауссову диаграмму фиксированных поддиаграмм из данного набора. При этом в числе фиксированных диаграмм могут встречаться и нереализуемые диаграммы — диаграммы, соответствующие виртуальным узлам. Это послужило мотивом для построения аналогичной теории инвариантов конечного порядка для виртуальных узлов, предложенной в<sup>12</sup>. Таким образом, виртуальные узлы были использованы для решения задачи об инвариантах классических узлов.

Другое (более общее) определение инвариантов конечного порядка было приведено в последней редакции работы Кауфмана<sup>10</sup>.

На виртуальные узлы естественным образом обобщаются как комбинаторные (полином Джонса), так и топологические (фундаментальная группа) инварианты классических узлов. Полином Джонса получается нормировкой скобки Кауфмана, задаваемой по формуле (3), при этом разводятся только классические перекрестки.

Изучение виртуальных узлов мотивировано следующими обстоятельствами. Понятие виртуального узла является естественным и ближайшим обобщением понятия классического узла. Действительно, диаграмма классического узла представляет со-

<sup>12</sup>Goussarov M., Polyak M., and Viro O. (2000), Finite type invariants of classical and virtual knots, *Topology* **39**, pp. 1045–1068.

<sup>13</sup>Polyak, M. and Viro, O. (1994), Gauss diagram formulae for Vassiliev invariants, *Int. Math Research Notes*, **11**, pp. 445–453.



бой набор классических перекрестков на плоскости, соединенных между собой предписанным образом. При этом линии соединения не пересекаются между собой. Если при соединении окрестностей перекрестков предписанным образом возникают пересечения соединяющих линий, то соответствующая диаграмма определяет виртуальный узел. Тем самым виртуальные узлы относятся к классическим узлам так же, как произвольные графы к планарным графам. Кроме того, естественность обобщения “классический узел — виртуальный узел” соответствует переходу от утолщенной двумерной сферы к утолщенным двумерным поверхностям. Таким образом, теория виртуальных узлов существенно богаче, чем теория классических узлов и является естественным обобщением последней. Методы теории узлов последнего времени в большой степени могут быть перенесены на случай виртуальных узлов в силу внутреннего родства обеих теорий. Речь идет о четырехвалентных графах и структуре проход/переход в перекрестках. Таким образом, из классической задачи описания отображений окружности в трехмерное многообразие выделяется большая часть (а именно, отображение окружности в утолщенные двумерные поверхности), исследованная в диссертации.

## 2 Цель работы

Построить теорию гомологий Хованова для виртуальных узлов. Изучить свойства гомологий Хованова классических и виртуальных узлов применительно к оценкам характеристик узлов (число перекрестков и др).

Выявить феномены теории виртуальных узлов, которые не имеют места для классических узлов.

Построить теорию инвариантов длинных виртуальных узлов.

Выяснить связь между инвариантами Васильева классических и виртуальных узлов.

Доказать гипотезу Васильева о планарности графов с крестовой структурой.

Доказать алгоритмическую распознаваемость виртуальных узлов.

Построить инварианты виртуальных кос и выявить их связь с классическими косами.

Разработать методы, устанавливающие неклассичность виртуальных узлов.

## 3 Методы исследования

Одним из основных методов исследования, используемых в настоящей диссертации является разработанный автором метод кодирования узлов и виртуальных узлов посредством так называемых *атомов*<sup>14</sup> (а также *d-диаграмм* для классических узлов).

<sup>14</sup>Атом был впервые определен А.Т.Фоменко в работе Fomenko A. T. (1991), The theory of multidimensional integrable hamiltonian systems (with arbitrary many degrees of freedom). Molecular table of all integrable systems with two degrees of

Понятие  $d$ -диаграммы и кодировка узлов посредством атомов и  $d$ -диаграмм изложена в<sup>15</sup>. Так, метод атомов использован автором при построении теории гомологий Хованова виртуальных узлов, а также при доказательстве гипотезы Васильева. Этот метод также широко применяется в проблемах распознавания минимальности диаграмм классических и виртуальных зацеплений и позволяет установить единую точку зрения на все виртуальные узлы, неотъемлемой частью которых являются классические узлы [Ma1, Ma5, Ma6, Ma11, Ma12, Man1, Man9]. Идея  $d$ -диаграмм состоит в том, что вместо *трансверсального* обхода диаграммы узла или четырехвалентного графа рассматривается *поворачивающий* обход. Такие обходы также приводят к хордовым диаграммам, при этом планарным графам (соотв., классическим зацеплениям) отвечают  $d$ -диаграммы (хордовые диаграммы, хорды которых состоят из двух семейств, в каждом из которых хорды попарно незацеплены), в то время как виртуальным зацеплениям и непланарным графам отвечают произвольные хордовые диаграммы.

Для построения теории гомологий Хованова с произвольными коэффициентами для произвольных виртуальных узлов в главе 6 потребовалось использовать набор новых предложенных автором идей: скрученные коэффициенты, взятие внешнего произведения вместо симметрического и замена базиса в алгебре Фробениуса.

В главах 4, 5 и 6 использовались также стандартные методы, используемые в теории гомологий Хованова: метод сокращения для комплексов, метод затягивающего дерева Тистлтуэйта (–Верли-Кофмана–Чампанеркара)

В теории длинных виртуальных узлов автором предложен метод *длинных группоидов*; с помощью этого метода решена проблема некоммутативности виртуальных узлов.

В диссертации также использовались классические методы и их обобщения. Так, для доказательства алгоритмической распознаваемости виртуальных зацеплений, а также для доказательства нетривиальности связной суммы виртуальных зацеплений были использованы методы трехмерной топологии — теория *Хакена-Хемiona-Матвеева*<sup>16</sup> в сочетании со структурной теоремой Куперберга<sup>17</sup> о единственности минимального представителя заданного класса виртуальных зацеплений.

При построении различных комбинаторных инвариантов виртуальных узлов, автором предложено рассматривать дополнительную алгебраическую структуру в виртуальных перекрестках (*виртуальные группоиды*).

В диссертации используются методы трехмерной топологии, алгебраические методы, связанные с дистрибутивным группоидом и его обобщениями, различные полиномиальные инварианты, в том числе матричные, формально комбинаторные, различ-

---

freedom, *Adv. Sov. Math*, 6, pp. 1-35.

<sup>15</sup>Мантуров, В.О. (2000), Скобочная полугруппа узлов, *Мат. Заметки*, 67, (4), сс. 449-462.

<sup>16</sup>Matveev, S.V. (2003), *Algorithmic topology and classification of 3-manifolds*, (N.-Y.: Springer Verlag).

<sup>17</sup>Kuperberg, G. (2002), What is a Virtual Link?, *Algebraic and Geometric Topology*, 2003, 3, 587-591.

ные подходы к скобке Кауфмана и теории гомологий Хованова.

## 4 Научная новизна

Настоящая диссертация является первым систематическим исследованием, целиком посвященным новой бурно развивающейся ветви маломерной топологии — теории виртуальных узлов (сотни публикаций за последние несколько лет). В ней модернизировано определение гомологий Хованова для классических узлов, и построена теория гомологий Хованова для виртуальных узлов. Кроме того, в диссертации доказана гипотеза Васильева о планарности сингулярных зацеплений, доказан ряд структурных теорем (о нетривиальности связной суммы нетривиальных узлов, о некоммутативности длинных узлов) и установлена единая точка зрения на виртуальные и классические узлы, связанная с атомами.

Все основные положения диссертации, выдвигаемые на защиту, являются новыми.

## 5 Теоретическая и практическая ценность

Виртуальные узлы представляют собой естественное обобщение классических узлов.

Теория виртуальных узлов представляет собой раздел маломерной топологии, более широкий, чем обычная теория узлов, но допускающий удобную комбинаторную интерпретацию. Тем самым каждый результат из теории виртуальных узлов представляет собой результат из трехмерной топологии. Частными случаями являются: зацепления в утолщенном торе (который можно трактовать как дополнение к зацеплению Хопфа), а также узлы в трехмерном проективном пространстве, которые представляют собой частный случай скрученных узлов — важного обобщения виртуальных узлов, для которых в настоящей диссертации построена теория гомологий Хованова. Последние две тесно связаны с классификацией скрещивающихся конфигураций прямых в трехмерном пространстве.

Важным примером применения теории виртуальных узлов к теории классических узлов послужила теорема Гусарова<sup>12</sup>. Еще одним примером является (незаконченная) работа Хованова-Розанского, в которой строится категорификация полинома Кауфмана для классических узлов посредством виртуальных узлов<sup>18</sup>.

Изучение феноменов теории виртуальных узлов, не имеющих место в классической теории узлов (некоммутативность длинных узлов, существование узлов с нетривиальным полиномом Джонса и тривиальной фундаментальной группой) показывают неприменимость методов алгебраической топологии для понимания структуры инвариантов узлов.

---

<sup>18</sup>Khovanov, M., Rozansky, L., Virtual crossings, convolutions and a categorification of the  $SO(2N)$  Kauffman polynomial, arXiv.Math:GT/0701333.

Теория гомологий Хованова дает подход к решению различных задач в теории узлов: доказательство минимальности диаграмм узлов, оценки рода Зейферта, числа заузленности, а также неэквивалентность понятий кусочно-линейной и гладкой срезанности узла.

После построения теории гомологий Хованова для виртуальных узлов многие из этих результатов и оценок прямо или с небольшими модификациями переносятся на более широкий класс объектов трехмерной топологии.

Комбинаторика виртуальных узлов стимулирует постановку новых задач и построение новых теорий (напр., теория виртуальных трехмерных графов Меллора и Флемминга<sup>19</sup>).

Работа имеет теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы специалистами в теории узлов и алгебраической, геометрической и маломерной топологии: в теории узлов, трехмерных и четырехмерных многообразий, в теории представлений групп и алгебр Ли, групп кос.

## 6 Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на:

- 1 Международном математическом конгрессе-2002, Пекин.
  - 2 Международном математическом конгрессе-2006, Мадрид.
  - 3 Международной российско-французской конференции “Autour des tresses”, Москва, 2002.
  - 4 Конференции “Knots in Poland”, Варшава-Бедлево, 2003, два доклада.
  - 5 Международной конференции, посвященной столетию со дня рождения Л.В.Келдыш, Москва, 2004 (приглашенный доклад),
  - 6 Конференции “Categorification in algebra and topology”, Uppsala, Швеция, 2006,
  7. Конференции “Algebraic Topology - old and new”, посвященной памяти М.М.Постникова, Бедлево, Польша, 2007
  8. Конференции “Geometry and Physics - in Memory of Xiao-Song Lin”, Тяньцзинь, КНР, 2007.
- а также на семинарах:
1. Семинаре кафедры дифференциальной геометрии и приложений, рук. акад. РАН А.Т.Фоменко, МГУ, 2004, 2006, 2007 — многократно.
  2. Семинаре “Современные геометрические методы” под рук. акад. РАН А.Т.Фоменко, проф. А.С.Мищенко, проф. А.В.Болсинова, МГУ (2002,2003).
  3. Семинаре “Узлы и дискриминанты” акад. РАН В.А.Васильева (Независимый московский университет, 2002, дважды в 2004).

---

<sup>19</sup>Flemming, T., Mellor, B., Virtual Spatial Graphs, arXiv.Math:GT, 0510158

4. Семинаре по алгебраической топологии проф. В.М.Бухштабера и проф. А.В.Чернавского (МГУ, трижды в 2005 и один раз в 2007).
5. Семинаре под руководством акад. РАН О.Б.Лупанова, МГУ, 2003, 2005.
6. Семинаре им. П.С.Александрова, МГУ, рук. проф. В.В.Федорчук, 2004.
7. Семинаре по теории особенностей акад. В.И.Арнольда, акад. В.А.Васильева, проф. В.М.Закалюкина, проф. С.М.Гусейн-Заде (МГУ, 2005).
8. Семинаре проф. А.С.Мищенко, проф. И.К.Бабенко, проф. Е.В.Троицкого, проф. В.М.Мануйлова (МГУ, 2007, дважды).
9. Семинаре проф. О.М.Касим-Заде (2003, МГУ).
10. Петербургском городском топологическом семинаре им. В.А. Рохлина, рук. проф. Н.Ю.Нецветаев и проф. В.М.Нежинский (2005, дважды).
11. Семинаре по маломерной математике “Москва-Петербург” (С.-Петербург, ст. науч. сотр. С.В.Дужин, СПОМИ РАН, 2005).
12. Семинаре проф. В.М.Нежинского (С.-Петербург, 2005).
13. Семинаре под руководством проф. С.С.Рышкова, проф. Н.П.Долбилина, д.ф.-м.н. Н.Г.Мощевитина, МГУ, 2004.
14. Семинарах в Ruhr-Universität Bochum (Hubert Flenner, Uwe Abresch), 2002.
15. Семинаре в Alfred Renyi Intezet, Budapest (Andras Szücs), 2005.
17. Семинаре проф. О.Я.Виро (Uppsala Universitetet), многократно в 2006.

## 7 Структура и объем диссертации. Краткое содержание диссертации

Общий объем диссертации составляет 387 страниц. Список литературы — 204 наименования.

**Первая глава диссертации** является введением. В ней приведены различные определения виртуальных узлов, а также история развития теории узлов. В первой главе описывается мотивация диссертационного исследования, перечисляются основные результаты, а также апробация работы.

**Вторая глава** посвящена взаимосвязи теории виртуальных узлов с трехмерной топологией. Здесь используется определение виртуального зацепления как зацепления в утолщенной ориентированной поверхности, рассмотренное с точностью до изотопии зацепления и стабилизации/дестабилизации поверхности (и гомеоморфизмов поверхности на себя, сохраняющих ориентацию).

Дестабилизация (удаление ручек) позволяет упрощать исходную поверхность. Это приводит к естественному вопросу о *минимальном представителе* — таком задании виртуального зацепления в утолщенной поверхности, к которому дальнейшая дестабилизация не применима. *Теорема Куперберга* утверждает, что минимальный представитель определен однозначно. Род “минимальной” поверхности  $M$  такой, что узел  $K$

представим в виде узла в  $M \times I$ , называется *подлежащим родом* виртуального узла. Из теоремы Куперберга следует, в частности, что теория классических узлов естественно “вкладывается” в теорию виртуальных узлов, иными словами, если два классических зацепления эквивалентны как виртуальные зацепления, то они изотопны.

**Теорема 1.** Пусть  $K_1, K_2$  — два виртуальных узла (не зацепления), и пусть  $K_1 \# K_2$  — некоторая их связная сумма. Если  $K_1 \# K_2$  — тривиальный узел, то каждый из узлов  $K_1$  и  $K_2$  тривиален.

В отличие от классических узлов, в виртуальном случае связная сумма не является корректно определенной. Это связано с тем, что в виртуальном случае классификация “длинных узлов”, т.е. узлов с концами, вытянутыми на бесконечность, не совпадает с соответствующей классификацией компактных узлов, получаемых как замыкания длинных узлов. Длинные виртуальные узлы подробно исследуются в третьей главе.

Теорема о нетривиальности связной суммы в классическом случае доказана Шубертом<sup>20</sup> с использованием *рода Зейферта* узла. Для ее доказательства в виртуальном случае доказываются неравенства о подлежащем роде узла.

**Теорема 2.** Существует алгоритм, распознающий, эквивалентны ли два виртуальных зацепления или нет.

Доказательство этой теоремы опирается на теорему Куперберга и основные положения теории нормальных поверхностей Хакена(-Хемиона-Матвеева).

Теорема об алгоритмическом распознавании виртуальных зацеплений опирается на алгоритмическую распознаваемость минимальности заданного представителя виртуального зацепления, а также распознаваемость некоторого класса трехмерных многообразий с краем. Эти утверждения основаны на ряде лемм о нормальных поверхностях.

**Третья глава диссертации** посвящена изучению комбинаторного аспекта теории виртуальных узлов, построению различных инвариантов виртуальных узлов и длинных виртуальных узлов, а также выявлению различных феноменов, встречающихся в теории виртуальных узлов.

К числу таких феноменов относится, например, следующий. Общеизвестно, что нетривиальный классический узел имеет нетривиальную (неизоморфную группе  $\mathbf{Z}$ ) фундаментальную группу. В случае виртуальных узлов это неверно.

В классической теории узлов фундаментальная группа, а также некоторые полиномиальные (скейн)-инварианты могут быть определены посредством так называемого *дистрибутивного группоида* или *квандла*, предложенного независимо С.В.Матвеевым и Д.Джойсом, см.<sup>21, 22</sup>.

<sup>20</sup>Шуберт, Х. (1966), Алгоритм для разложения зацеплений на простые слагаемые, *Математика*, **10** (4), сс. 57–104.

<sup>21</sup>Матвеев, С.В. (1982), Дистрибутивные группоиды в теории узлов, *Мат. Сборник*, **119** (1), pp. 78–88.

<sup>22</sup>Joyce D. (1982), A classifying invariant of knots, the knot quandle, *J. of Pure and Applied Algebra*, **23** (1), pp. 37–65.

Эта конструкция состоит в следующем. Пусть дана диаграмма классического ориентированного зацепления. *Дугами* этой диаграммы называются ее связные компоненты, т.е. части диаграммы, расположенные между двумя соседними проходами. В каждом классическом перекрестке этой диаграммы сходятся три дуги. Одна из них проходит сверху (обозначим ее через  $b$ ), а две другие — снизу. Обозначим дугу, расположенную справа от  $b$  относительно ориентации дуги  $b$ , через  $a$ , а дугу, расположенную слева, — через  $c$ .

Сопоставим дугам элементы формального алгебраического объекта, а перекресткам — соотношения вида  $a \circ b = c$  в этом объекте. Напомним, что при построении копредставления Виртингера группы узла, соотношения на соответствующие элементы группы имеют вид  $bab^{-1} = c$ .

В общем случае (для инвариантности объекта, который мы строим, относительно обобщенных движений Рейдемейстера) на операцию  $\circ$  нужно наложить следующие условия:  $\forall a : a \circ a = a$ ;  $\forall b, c, \exists ! x : x \circ b = c$ ;  $\forall a, b, c : (a \circ b) \circ c = (a \circ c) \circ (b \circ c)$ . Операцию, обратную к  $\circ$ , обозначают через  $/$ . Таким образом, мы имеем:  $a \circ b = c \iff c/b = a$ .

Множество с операциями  $\circ$  и  $/$ , удовлетворяющее перечисленным выше свойствам, называется *дистрибутивным группоидом*. Каждому классическому зацеплению  $L$  соответствует дистрибутивный группоид зацепления  $\Gamma(L)$  — формальный группоид, соотношения которого происходят из перекрестков. Теорема Матвеева и Джойса утверждает, что дистрибутивный группоид в классическом случае различает узлы с точностью до двойной инволюции: замены ориентации пространства и узла в нем. Кауфман показал, что дистрибутивный группоид прямо обобщается на виртуальные узлы и зацепления: здесь в качестве образующих нужно брать *длинные дуги* — части диаграммы узла, идущие от прохода до следующего прохода и содержащие внутри, быть может, переходы и виртуальные перекрестки. Эта (почти) полнота приводит к доказательству того, что классическая теория узлов вкладывается в теорию виртуальных узлов. Это было показано Гусаровым, Поляком и Виро (исторически раньше доказательства Куперберга).

Как оказалось, дистрибутивные группоиды в виртуальном случае не столь сильны, что побудило автора диссертации, а также других авторов (Кауфман-Рэдфорд, Саволлек и др., см. ссылки далее) искать усиления этой структуры. Один из возможных способов усиления дистрибутивного группоида — добавление алгебраической структуры в виртуальных перекрестках. Пусть дано виртуальное зацепление  $L$ , и пусть  $a_1, \dots, a_k$  — множество его дуг. Мы будем использовать операцию  $\circ$  для записи соотношений между дугами, инцидентными классическому перекрестку как и раньше; кроме того, мы введем формальную (унарную) операцию  $f$  для виртуальных перекрестков, а именно: пусть в некотором виртуальном перекрестке  $X_j$  сходятся четыре дуги, которым соответствуют образующие  $a_{j_1}, a_{j_2}, a_{j_3}, a_{j_4}$  так, как показано на рис. 2.

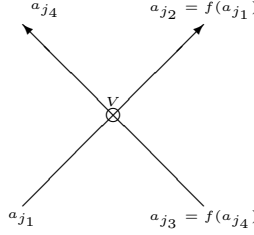


Рис. 2: Соотношение для виртуального перекрестка

Положим

$$a_{j_2} = f(a_{j_1}); a_{j_3} = f(a_{j_4}) \quad (6)$$

В результате мы получим *виртуальный группоид*, соответствующий виртуальному узлу. При этом под виртуальным группоидом мы понимаем следующее.

**Определение.** Назовем *виртуальным группоидом* дистрибутивный группоид  $(M, \circ)$ , на котором задан автоморфизм  $f : M \rightarrow M$ , т.е. взаимно однозначное отображение, такое что для любых  $a, b \in M$   $f(a \circ b) = f(a) \circ f(b)$ .

С помощью *виртуального группоида* можно построить различные инварианты виртуальных узлов согласно следующему принципу: если в некоторой категории (состоящей из групп или модулей над фиксированным кольцом) можно ввести операции  $\circ, /, f$ , удовлетворяющие аксиомам виртуального группоида, то в этой категории можно строить инварианты виртуальных узлов.

Так, например, для групп можно рассмотреть операции  $a \circ b = b^n a b^{-n}$ ,  $f(a) = q a q^{-1}$ , где  $q$  — фиксированный элемент группы,  $n$  — фиксированное натуральное число.

В случае модулей над кольцом можно рассмотреть операции  $a \circ b = ta + (1-t)b$ ,  $f(a) = sa$  (модуль над  $\mathbf{Z}[t, s]$ ) или  $a \circ b = ta + (1-t)b$ ,  $f(a) = a + \varepsilon$  (модуль над  $\mathbf{Z}[t]$  с выделенным элементом  $\varepsilon$ ). Эти модули являются обобщениями модуля Александера. Первый подход привел автора к построению полиномиальных инвариантов  $\xi$ , а второй — к построению полинома  $VA$ , [Ma2, Ma4, Ma10, Ma13, Man6, Man7]. Оба эти полинома обращаются в нуль на классических узлах, поэтому они полезны при определении неклассичности различных классов узлов.

Интересно, что к тому же полиному  $\xi$  (с точностью до замены переменной и нормализации) пришли одновременно несколько групп авторов: Кауфман-Рэдфорд<sup>23</sup>, Саволлек<sup>24</sup>, Сильвер-Уильямс<sup>25</sup>, исходя из других идей: они рассматривали дополнительные алгебраические структуры не в виртуальных, а в классических перекрестках.

<sup>23</sup>Kauffman, L.H. and Radford, D. (2002), Bi-Oriented Quantum Algebras and a Generalized Alexander Polynomial for Virtual Links, *AMS Contemp. Math*, **318**, pp. 113–140.

<sup>24</sup>J. Sawollek (2003), On Alexander-Conway polynomials for virtual knots and links, arXiv:math.GT/9912173 21 Dec 1999. *J. Knot Theory Ramifications* 12, no. 6, 767–779.

<sup>25</sup>D. S. Silver and S. G. Williams (2001), Alexander Groups and Virtual Links, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, **10** (1), pp. 151-160.



После этого Р.Фенном <sup>26</sup> было доказано, что эти полиномы совпадают.

Автором приведены также различные обобщения инвариантов типа дистрибутивного группоида на случай зацеплений из многих компонент, инварианты виртуальных зацеплений со значениями в (бесконечномерных) алгебрах Ли и др.[Ma1, Ma4, Ma9, Ma10, Ma13, Man1, Man5, Man6, Man7, Man8, KM1].

Центральное место в третьей главе диссертации занимает теория длинных виртуальных узлов.

Назовем *длинной виртуальной диаграммой* погружение общего положения ориентированной вещественной прямой  $\mathbf{R}$  на плоскость  $Oxy$ , совпадающее вне некоторого большого круга с тождественным отображением  $\mathbf{R} \rightarrow Ox$  и снабженное в каждом пересечении (в случае общего положения — двойное и трансверсальное) структурой классического или виртуального перекрестка. Длинные виртуальные диаграммы будем предполагать ориентированными согласно ориентации прямой слева направо.

У длинной виртуальной диаграммы имеются две выделенные *некомпактные* дуги (по определению дуга идет от прохода до следующего прохода). Дуга называется некомпактной, если она содержит образ точки  $x \in \mathbf{R}$ , такой что ограничение отображения  $\mathbf{R}^1 \rightarrow \mathbf{R}^2$  на полуинтервалы  $(-\infty, -|x|]$  и  $[|x|, \infty)$  является тождественным вложением  $\mathbf{R}^1 \rightarrow \mathbf{R}^1$ .

Назовем *длинным виртуальным узлом* класс эквивалентности длинных виртуальных диаграмм относительно обобщенных движений Рейдемейстера. *Классическим* называется длинный виртуальный узел, имеющий диаграмму без виртуальных перекрестков. *Тривиальным* называется длинный виртуальный узел, имеющий диаграмму без перекрестков. Этот узел является единственным, у которого есть диаграмма, две некомпактные дуги которой совпадают.

Имеются две операции, превращающие длинный узел в компактный и наоборот. Первая из них (*замыкание* длинного узла),  $K \mapsto Cl(K)$  определена корректно и сопоставляет длинному виртуальному узлу компактный виртуальный узел. Она состоит в том, что две некомпактные дуги обрываются “в окрестности бесконечности” и соединяются. При этом получившийся компактный узел наследует ориентацию длинного узла.

Вторая операция, являющаяся обратной к первой, состоит в том, что мы выбираем на диаграмме ориентированного виртуального узла  $L$  точку, отличную от перекрестка, разрываем этот узел в данной точке и вытягиваем концы на бесконечность так, чтобы получить длинный узел. В случае, если концы можно вытянуть на бесконечность, так чтобы не возникло дополнительных перекрестков, мы будем делать это именно таким образом; в противном случае все новые перекрестки нужно определить, как вирту-

---

<sup>26</sup>Bartholomew, A. and Fenn. R. (2003), Quaternionic Invariants of Virtual Knots and Links, [www.maths.sussex.ac.uk/Staff/RAF/Maths/Current/Andy/equivalent.ps](http://www.maths.sussex.ac.uk/Staff/RAF/Maths/Current/Andy/equivalent.ps)

альные перекрестки. Эта операция не является корректно определенной: существуют нетривиальные длинные узлы с тривиальным замыканием.

При построении группоида элементы, соответствующие двум некомпактным дугам, являются инвариантными. Кроме того, все классические перекрестки длинного группоида можно разбить на два класса: те, в которых прохождение верхней ветви предшествует прохождению нижней ветви (ранний переход) и те, в которых прохождение нижней ветви предшествует прохождению нижней ветви (ранний проход). В первом случае мы будем использовать формальную операцию  $\circ$  (с левой обратной  $/$ ), а во втором — операцию  $*$  (с левой обратной  $//$ ). Из анализа обобщенных движений Рейдемейстера выводится ряд аксиом, который приводит к построению *длинного группоида* длинного виртуального узла  $\text{ДГ}(K)$ , в котором выделены начальный и конечный элементы  $a(K)$  и  $b(K)$ . Зададим множество  $\text{Admi}$  допустимых слов, порождаемых операциями  $\circ, *, /, //, f$ . Тогда дистрибутивный группоид определяется как множество классов эквивалентности слов из набора  $\text{Admi}$  по отношению эквивалентности, порождаемому следующими элементарными эквивалентностями:

1.  $\forall A \in \text{Admi} : A \circ A \sim A, A/A \sim A, A * A \sim A, A//A \sim A,$
2.  $\forall A, B \in \text{Admi} : (A \circ B)/B \sim (A/B) \circ B \sim A, \forall A, B \in \text{Admi} : (A * B)//B \sim (A//B) * B \sim A,$
3.  $\forall A, B, C \in \text{Admi} : (A\alpha B)\beta C \sim (A\beta C)\alpha(B\beta C),$  где  $\alpha, \beta \in \{\circ, *, /, //\},$
4.  $\forall x, y, z \in \text{Admi} : x\alpha(y \circ z) \sim x\alpha(y * z); x\alpha(y/z) \sim x\alpha(y//z)$  для  $\alpha \in \{\circ, *, /, //\}.$
5.  $\forall A, B \in \text{Admi} \forall \alpha \in \{\circ, *, /, //\} : f(A\alpha B) = f(A)\alpha f(B).$
6.  $\forall i = 1, \dots, l : r_{i1} \sim r_{i2}.$

Здесь все соотношения, кроме последней серии, — это общие соотношения, присущие каждому длинному группоиду (по определению); последний набор соотношений вида  $r_{i1} \sim r_{i2}$  относится к конкретной диаграмме виртуального узла. А именно, в каждом классическом перекрестке мы выписываем соотношение  $a \circ b \sim c$  (так же, как в случае обычного группоида) либо  $a * b \sim c$ ; операция  $\circ$  выбирается в случае раннего перехода, а операция  $*$  — в случае раннего прохода. В виртуальных перекрестках мы выписываем соотношения видов (6), см. рис. 2.

Назовем [Ма9, Мап5] *длинным группоидом* множество  $M$  с выделенными элементами  $a$  и  $b$  и заданными бинарными операциями  $\circ, *$  и унарной операцией  $f$ , такое что:

1. Множество  $M$  является виртуальным группоидом относительно  $(f, \circ)$  (операция, обратная к  $\circ$ , обозначается через  $/$ ).

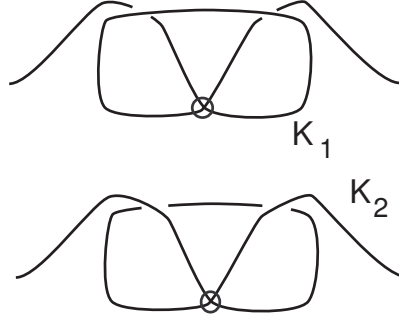


Рис. 3: Некоммутирующие узлы  $K_1$  и  $K_2$

2. Множество  $M$  является виртуальным группоидом относительно  $(f, *)$  (операция, обратная к  $*$ , обозначается через  $//$ ).
3. Операции  $\circ, *, /, //$  являются право-дистрибутивными по отношению друг к другу.
4. Имеют место следующие “странные” соотношения, состоящие в следующем. Пусть  $\alpha$  — некоторая операция из списка  $\{\circ, *, /, //\}$ . Тогда для любых  $x, y, z \in M$  имеют место тождества:

$$\begin{cases} x\alpha(y \circ z) = x\alpha(y * z) \\ x\alpha(y/z) = x\alpha(y//z) \end{cases} \quad (7)$$

Элементы  $a$  и  $b$  называются *начальным* и *конечным* элементами длинного группоида.

Используя приведенные выше соотношения, мы сопоставляем каждой виртуальной диаграмме  $K$  некоторый длинный группоид  $ДГ(K)$ .

Автором доказана

**Теорема 3.** Пусть  $K, K'$  — диаграммы эквивалентных длинных виртуальных узлов. Тогда существует гомоморфизм

$h : (ДГ(K), a_K, b_K) \rightarrow (ДГ(K'), a_{K'}, b_{K'})$ , согласованный с операциями  $\circ, *$  и  $f$  и переводящий элемент  $a_K$  в элемент  $a_{K'}$ , элемент  $b_K$  в  $b_{K'}$ .

Такие длинные группоиды имеют простую алгебраическую модель, с помощью которой доказывается следующий феномен: **длинные виртуальные узлы, вообще говоря, не коммутируют**. В частности, приведенные на рис. 3 длинные узлы не коммутируют, из чего следует их неэквивалентность и неклассичность каждого из них (отметим, что замыкание каждого из этих узлов тривиально).

**Четвертая глава** посвящена изучению свойств полинома Джонса (скобки Кауфмана) для виртуальных узлов и построению их обобщений.

Доказано несколько обобщений теоремы Мурасуги, утверждающей, что альтернированные неприводимые диаграммы узлов минимальны.

Основным результатом является построение инварианта  $\Xi$ , который использует в себе две идеи — формально-комбинаторное определение скобки Кауфмана и трехмерную топологию виртуальных узлов.

Рассмотрим множество  $S$  пар (двумерная поверхность — конечный набор замкнутых кривых на ней). Здесь двумерная поверхность подразумевается ориентированной, замкнутой и имеющей конечное число компонент связности (если поверхность несвязна, то ориентированной предполагается каждая из ее компонент связности).

Будем рассматривать элементы из  $S$  с точностью до отношения эквивалентности, порождаемого следующими элементарными эквивалентностями: 1) сохраняющими ориентацию гомеоморфизмами поверхностей, переводящих кривые в кривые и сохраняющими ориентацию и отношение порядка; 2) стабилизациями, т.е. добавлениями ручек, согласованными с ориентацией поверхности и не пересекающих кривые, а также дестабилизациями; 3) свободными гомотопиями кривых по поверхности; 4) добавлениями (удалениями) простых неориентированных кривых, ограничивающих диск на поверхности и не пересекающихся с другими кривыми.

Обозначим множество классов эквивалентности через  $\mathcal{S}$ . Вопрос о том, представляют ли два элемента из  $S$  один и тот же класс эквивалентности в  $\mathcal{S}$ , легко распознается алгоритмически очевидной модификацией метода, предложенного в работе<sup>27</sup>.

Опишем функцию  $\Xi$  [Ma7, Man3] на ориентированных виртуальных зацеплениях со значениями в модуле  $\mathbf{ZS}[a, a^{-1}]$ ; значения этой функции представляют собой линейные комбинации элементов из  $\mathcal{S}$  с коэффициентами из  $\mathbf{Z}[a, a^{-1}]$ , при этом коэффициенты строятся так же, как слагаемые в разложении скобки Кауфмана, а элементы из  $\mathcal{S}$  представляют собой “геометрию” виртуальных узлов.

Пусть дана виртуальная диаграмма  $K$ . Рассмотрим соответствующее представление виртуального узла в виде диаграммы на ориентированной двумерной поверхности  $M$ , получаемое следующим образом. Каждое виртуальное зацепление  $L$  представимо зацеплением в некоторой утолщенной поверхности  $S_g \times I$ . При проекции на  $S_g$  вдоль  $I$  оно задает набор кривых — в количестве, равном количеству компонент зацепления  $L$ .

В этом случае все разведения диаграммы можно производить непосредственно на поверхности  $M$ . Зафиксируем тень зацепления  $K$  на поверхности  $M$ . Она представляет собой некоторый набор  $\delta$  ориентированных замкнутых кривых. Далее, каждому состоянию  $s$  неориентированной диаграммы  $|K|$  (которое также можно рассматривать на поверхности  $M$ ) соответствует некоторый набор  $\delta'(s)$  неориентированных замкнутых кривых на  $M$ .

Таким образом, мы получаем набор кривых (часть из них — ориентирована, часть — не ориентирована)  $p(s) = \delta(s) \sqcup \delta'(s)$ , который можно рассматривать как элемент из

<sup>27</sup>Reinhart, B.L. (1962), Algorithms for Jordan Curves on Compact Surfaces, *Annals of Mathematics*, **75**, No. 2., pp. 209–222.

множества  $\mathcal{S}$  и, следовательно, как элемент из  $\mathcal{S}$ . Рассмотрим теперь свободный модуль  $\mathcal{M} = \mathbf{Z}\mathcal{S}[a, a^{-1}]$  над кольцом полиномов Лорана от переменной  $a$ ; образующими этого модуля будут элементы из  $\mathcal{S}$ .

Определим инварианты (Васильева) конечного порядка виртуальных узлов посредством введения сингулярных виртуальных узлов и формализма (1): инвариант имеет порядок  $\leq n$ , если его  $(n+1)$ -я производная (определенная согласно (1)) тождественно обращается в нуль.

Сопоставим теперь диаграмме  $L$  элемент  $\Xi(L) \in \mathcal{M}$  согласно следующей формуле:

$$\Xi(L) = (-a)^{-3w(s)} \sum_s p(s) a^{\alpha(s)-\beta(s)} (-a^2 - a^{-2})^{(\gamma(s)-1)}, \quad (8)$$

где  $\alpha(s), \beta(s), \gamma(s)$  имеют тот же смысл, что и в случае скобки Кауфмана.

**Теорема 4.** *Функция  $\Xi$ , определенная формулой (8), задает инвариант виртуальных зацеплений.*

Далее (в главе 8) показано, что полином  $\Xi$  приводит к трехпараметрической серии инвариантов Васильева для виртуальных узлов. Приводятся различные примеры, показывающие силу полинома  $\Xi$ .

**Пятая глава** посвящена построению теории гомологий Хованова для виртуальных узлов.

Пусть  $L$  — ориентированная диаграмма виртуального зацепления. Перенумеруем ее классические перекрестки  $a_1, \dots, a_n$ . Под *кубом перестроек* мы понимаем куб  $\{0, 1\}^n$ , в каждой вершине которого указано количество окружностей в соответствующем состоянии, а на каждом ребре следующим образом указано, какие окружности перестраиваются при переходе от одного состояния к соседнему согласно этому ребру. Сопоставим каждой окружности модуль  $V$ , порожденный двумя векторами  $1$  и  $X$ , где вектора  $1$  и  $X$  имеют градуировку  $+1$  и  $-1$  соответственно. Имеем:  $\text{qdim} V = (q + q^{-1})$ . Каждой вершине куба  $s = \{a_1, \dots, a_n\}$  соответствует некоторое количество окружностей  $\gamma(s)$ . Сопоставим каждой такой вершине векторное пространство  $V^{\otimes \gamma(s)} \{\sum_{i=0}^n a_i\}$ , получающееся из тензорной степени пространства  $V$  сдвигом градуировки. *Градуированной размерностью* градуированного пространства  $V = \oplus V_i$  назовем  $\text{qdim} V = \sum_i q^i \dim V_i$ , где  $q$  — формальная переменная. Замена  $(q + q^{-1})$  на пространство  $V$ , такое что  $\text{qdim} V = (q + q^{-1})$ , представляет собой важный шаг категорификации. Определим пространство цепей высоты  $k$  как прямую сумму пространств, относящихся ко всем вершинам куба высоты  $k$ .

Мы корректно задали цепи градуированного комплекса. Тем самым вне зависимости от дифференциала в комплексе мы получаем  $\chi(Kh(L)) = \hat{J}(L)$ , где  $Kh(L)$  означает биградуированную группу гомологий того комплекса, который мы собираемся

строить,  $\hat{J}$  — полином Джонса, а эйлерова характеристика представляет собой альтернированную сумму (по высоте) градуированных размерностей пространств цепей.

Определим *частичные дифференциалы* на цепях, действующие вдоль ребер куба по направлению стрелок, т.е. от  $A$  к  $B$ , следующим образом. Пусть ребро  $a$  соответствует переходу из состояния  $s$  в состояние  $s'$ , при этом  $l$  окружностей, которые не примыкают к рассматриваемому перекрестку, не претерпевают изменений. В перекрестке диаграммы  $|L|$ , соответствующем ребру  $a$ , происходит перестройка либо одной окружности в две, либо двух окружностей в одну, либо одной окружности в одну. В первых двух случаях мы определим дифференциал так же, как он определяется в случае классических узлов, т.е. как  $\Delta \otimes Id^l\{1\}$  или  $m \times Id^l\{1\}$ . Сдвиг  $\{1\}$  добавляется согласно общему правилу сдвига градуировки на элементах куба.

Корректное определение полного дифференциала вида  $(1 \rightarrow 1)$  представляет собой главную трудность в общем случае (в случае  $\mathbf{Z}$ ); в случае  $\mathbf{Z}_2$  эта трудность легко преодолевается. А именно, положим все дифференциалы, соответствующие перестройкам типа  $1 \rightarrow 1$ , равными нулю.

**Теорема 5.** *В случае поля  $\mathbf{Z}_2$  комплекс  $\mathcal{C}(L)$  корректно определен и является инвариантом зацепления  $L$ ; градуированная эйлерова характеристика  $\chi(Kh(L))$  равна  $\hat{J}(L)$ .*

Назовем *атомом* двумерное замкнутое многообразие  $M$ , в которое вложен четырехвалентный граф  $\Gamma \in M$ , делящий многообразие  $M$  на клетки с фиксированной шахматной раскраской двумерных клеток. Граф  $\Gamma$  называется *остовом атома*. Атом рассматривается с точностью до естественной комбинаторной эквивалентности. Каждый атом (более точно, его класс эквивалентности) может быть полностью восстановлен по следующим комбинаторным данным:

1. Остов (четырёхвалентный граф);
2.  $A$ -структура (делящая четыре полурёбра, исходящие из каждой вершины, на две пары, называемые противоположными; отношение противоположности определяется в соответствии с расположением ребер на поверхности);
3.  $B$ -структура (в каждой вершине выделены две пары соседних полурёбер (или двух углов), которые образуют границы черных клеток).

Атом  $(M, \Gamma)$  называется ориентируемым, если  $M$  ориентируемо.

Каждой виртуальной диаграмме соответствует атом, который строится следующим образом. Вершинами атома являются классические перекрестки диаграммы зацепления; ребра атома — это ветви диаграммы, проходящие от одного классического перекрестка до другого и содержащие внутри лишь виртуальные перекрестки.  $A$ -структура атома наследуется из плоской диаграммы: локально противоположные на плоскости

ребра остаются противоположными и на атоме. Далее,  $B$ -структура определяется локально из структуры проход-переход: при движении на плоскости по часовой стрелке внутри “черного” угла мы идем от ребра прохода к ребру перехода.

Ключевым свойством является *ориентируемость* атома. Оказывается, для ориентированных атомов все перестройки в кубе состояний Хованова имеют вид  $1 \rightarrow 2$  или  $2 \rightarrow 1$  (т.е. можно обойтись без дополнительных алгебраических операций) и для таких диаграмм можно корректно определить гомологии Хованова (пока не утверждается их инвариантность относительно каких-либо движений). Если  $D_2(K)$  — диаграмма, соответствующая удвоению диаграммы  $K$  (т.е. состоящая из двух параллельных копий), то атом, соответствующий диаграмме  $D_2(K)$  — ориентируемый.

**Теорема 6.** Пусть  $n$  — натуральное число. Тогда образ отображения  $L \mapsto Kh(D_{2n}(L))$  является инвариантом оснащенных виртуальных зацеплений.

Иной способ определения гомологий Хованова — рассмотрение двулистных накрытий над атомами. А именно, пусть  $L$  — диаграмма зацепления,  $V^2(L)$  — двулистное накрытие над соответствующим атомом; соответствующий узел обозначим через  $K(V^2(L))$ .

**Теорема 7.** Отображение  $L \rightarrow Kh(K(V^2(L)))$  задает корректно определенный инвариант виртуальных зацеплений.

Далее в пятой главе строятся обобщения этих конструкций для получения более богатой теории гомологий, которая в классическом случае совпадает с обобщениями, предложенными Ховановым <sup>28</sup>.

**Шестая глава** посвящена построению теории гомологий Хованова для виртуальных зацеплений с произвольными коэффициентами.

Основной трудностью, которая преодолена в шестой главе, является определение дифференциала для комплексов, соответствующих произвольным виртуальным узлам, когда возникают перестройки типа  $1 \rightarrow 1$  и приходится иметь дело с более сложной алгебраической структурой и проверять значительно больше случаев, чем для классических узлов.

Эта трудность преодолевается посредством построения нового комплекса, имеющего те же гомологии, что и исходный комплекс Хованова. Первой ключевой идеей является следующая: при переходе от одного перекрестка узла к другому вдоль окружности состояния нужно менять базис алгебры Фробениуса, задающей гомологии Хованова тривиального узла (что связано с выбором локальной ориентации соответствующей окружности, происходящим из перекрестка). Вторая ключевая идея состоит в том, что вместо обычного тензорного произведения, соответствующего нескольким окружностям в некотором состоянии, мы берем внешнее произведение соответствующих гра-

<sup>28</sup>Khovanov, M. (2004), Link homology and Frobenius extensions, Arxiv.Math:GT/0411447.

дуированных пространств. Это избавляет нас от “искусственной” операции переделывания коммутативного куба в косокоммутативный, как это проделано в главе 5. Дифференциалы определяются в “локальных координатах”, соответствующих перекрестку и состоянию.

Каждой диаграмме виртуального зацепления мы сопоставляем биградуированный комплекс, группы гомологий которого инвариантны при обобщенных движениях Рейдемейстера. Отметим некоторые важные свойства нашей конструкции.

1. Комплекс строится с использованием *атомов*; он является инвариантным при *виртуализации* — преобразования диаграммы, не меняющего атома и значения полинома Джонса (каждой грани перестроек соответствует атом с двумя вершинами).
2. Существует естественное отображение из множества “скрученных виртуальных узлов” во множество виртуальных узлов по модулю виртуализации. Тем самым построена теория гомологий Хованова скрученных узлов.

Частным случаем скрученных виртуальных узлов (узлов в ориентированных утолщениях неориентируемых двумерных поверхностей с точностью до стабилизации) являются узлы в проколоте трехмерном проективном пространстве. Поэтому приводимая в настоящей главе теория приводит к построению гомологий Хованова и для узлов в  $\mathbf{R}P^3$ .

3. В случае коэффициентов над полем  $\mathbf{Z}_2$  комплекс в точности совпадает с комплексом из теоремы 5 (без введения скрученных коэффициентов, внешнего произведения и др).
4. Для ориентируемых атомов (в частности, для классических узлов) этот комплекс имеет те же гомологии, что и комплекс Хованова, построенный в главе 5.
5. Доказательство инвариантности является локальным; оно аналогично доказательству инвариантности в классическом случае; главная трудность состоит в корректном определении дифференциала — таком подборе знаков, при котором куб становится антикоммутативным.

Пусть дан неупорядоченный набор векторных пространств. Упорядочим их произвольным образом:  $V_1, \dots, V_n$ .

Определим новое пространство, не зависящее от порядка, которое будем обозначать через  $V_1 \wedge V_2 \wedge \dots \wedge V_n$ , следующим образом. Рассмотрим всевозможные тензорные произведения этих пространств и отождествим их элементы согласно следующему правилу. Пусть  $x_i \in V_i, i = 1, \dots, n$ . Положим  $x_{\sigma_1} \otimes \dots \otimes x_{\sigma_n} = \text{sign}(\sigma)x_1 \otimes \dots \otimes x_n$ .

Мы будем обозначать такое тензорное произведение  $x_1 \otimes \dots \otimes x_n$  элементов  $x_i \in X_i$  через  $x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n$ . Назовем такое тензорное произведение *упорядоченным*.



**Замечание.** Чтобы избежать путаницы, заметим, что когда мы пишем  $X \wedge X$ , мы всегда имеем в виду, что первый элемент  $X$  и второй элемент  $X$  принадлежат **разным** (пусть даже изоморфным) пространствам. Таким образом  $X \wedge X$  не равно нулю (в отличие от внешних произведений 1-форм на себя).

Для того, чтобы куб перестроек был антикоммутативным, нам нужно добавить две новые составляющие:

1. Каждой окружности  $C$  в каждом состоянии мы сопоставляем векторное пространство градуированной размерности  $q + q^{-1}$ . А именно, пусть дана ориентация  $o$  некоторой окружности  $C$  в некотором состоянии; сопоставим этой окружности градуированное векторное пространство, порожденное элементами  $1$  и  $X_{C,o}$ . При замене ориентации  $o$  окружности на противоположную,  $-o$ , мы имеем  $X_{C,-o} = -X_{C,o}$ ,  $1_{C,-o} = 1_{C,o}$ .
2. Пусть дано состояние  $s$  диаграммы виртуального зацепления с  $k$  окружностями  $C_1, \dots, C_k$  в нем. Этому состоянию мы сопоставим упорядоченное тензорное произведение  $V^{\wedge k}$ ; в качестве базиса этого произведения выберем упорядоченные тензорные произведения  $(p^1)_{C_{a_1}} \wedge (p^2)_{C_{a_2}} \wedge \dots \wedge (p^k)_{C_{a_k}}$ , где  $(p^i)_{C_{a_i}}$  означает элемент базиса пространства  $V_{C_{a_i}}$ .

Таким образом, мы определили пространство цепей комплекса, соответствующего виртуальной диаграмме  $K$ , которое мы обозначим через  $[[K]]$ . Все базисные элементы этого пространства соответствуют состояниям диаграммы  $K$  с дополнительным выбором элементов вида  $\pm 1$  или  $\pm X$  на каждой из окружностей состояния. Пусть  $s$  — состояние диаграммы  $K$  с набором окружностей  $C_1, \dots, C_l$ , при этом на данных окружностях выбраны элементы  $\gamma_1, \dots, \gamma_l$ . Эти элементы образуют цепь комплекса  $[[K]]$ , которой мы сопоставляем высоту  $h$ , где  $h$  — количество разведений типа  $B$  в состоянии  $s$ , и градуировку, равную  $h + \#1 - \#X$ , где  $\#1$  — это количество элементов вида  $\pm 1$  среди  $\gamma_1, \dots, \gamma_l$ , а  $\#X$  — это количество элементов  $\pm X$  среди  $\gamma_1, \dots, \gamma_l$ .

Пусть  $n_+$  и  $n_-$  обозначают число положительных и отрицательных перекрестков соответственно.

Обозначим через  $\mathcal{C}(K)$  комплекс, полученный из  $[[K]]$  сдвигом высоты и градуировки:  $\mathcal{C}(K) = [[K]]\{n_+ - 2n_-\}[-n_-]$ , т.е. высота каждой цепи уменьшается на  $n_-$ , а градуировка увеличивается на  $(n_+ - 2n_-)$ ; все дифференциалы сдвигаются согласованно.

Примем, что ветви классических перекрестков ориентированы снизу вверх.

Рассмотрим некоторое состояние  $s$  диаграммы ориентированного виртуального зацепления. Выберем классический перекресток и рассмотрим все окружности состояния  $s$ , инцидентные этому перекрестку. Этим окружностей может быть либо одна, либо две. Фиксируем ориентации этих окружностей согласно ориентации ребра, исходящего

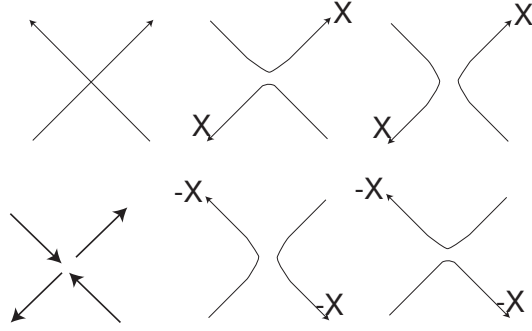


Рис. 4: Задание базиса в перекрестке

в направлении направо вверх и против ориентации ребра, входящего в перекресток слева снизу, см. верхнюю часть рис. 4. Как мы увидим далее, эти две заданные локально ориентации могут не быть согласованными; в этом случае частичный дифференциал будет полагаться равным нулю.

Таким образом, заданная ориентация окружностей состояния  $s$  согласуется локально с ориентацией ребра, исходящего локально в направлении направо вверх (а также ребра, входящего справа снизу) и противоположно направлению ребер с левой стороны перекрестка: мы ориентируем полуребра, инцидентные перекрестку, так, как указано в левой нижней части рис. 4. Тем самым мы фиксировали выбор образующей  $X$  на каждой окружности, инцидентной выбранному перекрестку. Отметим, что в другом перекрестке для той же окружности выбор образующей  $X$  может отличаться от исходного знаком.

Частичные дифференциалы определяются согласно ориентациям окружностей в перекрестках и локальному упорядочению компонент по следующему правилу. Описанная выше ориентация окружностей состояний является корректно определенной за исключением случая, когда ребро куба, соответствующее перекрестку, переводит одну окружность в одну окружность. В таких ситуациях мы полагаем частичный дифференциал, соответствующий ребру, равным нулю.

Пусть теперь мы имеем перестройку типа  $1 \rightarrow 2$  или  $2 \rightarrow 1$  в некотором перекрестке.

Если мы имеем дело с двумя окружностями, инцидентными перекрестку с противоположных сторон, мы упорядочиваем их таким образом, чтобы верхняя (соотв., левая) окружность считалась первой; нижняя (соотв., правая) окружность будет считаться второй. В дальнейшем при определении частичных дифференциалов мы предполагаем, что все окружности упорядочены таким образом, что те окружности, которые участвуют в перестройке, находятся на самых начальных местах в нашем упорядоченном тензорном произведении; этого всегда можно добиться посредством предварительной перестановки, которая приведет, быть может, к замене знака. На остальных окружностях отображение действует тождественно.

Пусть дано ребро куба перестройки, которому соответствует изменение количества

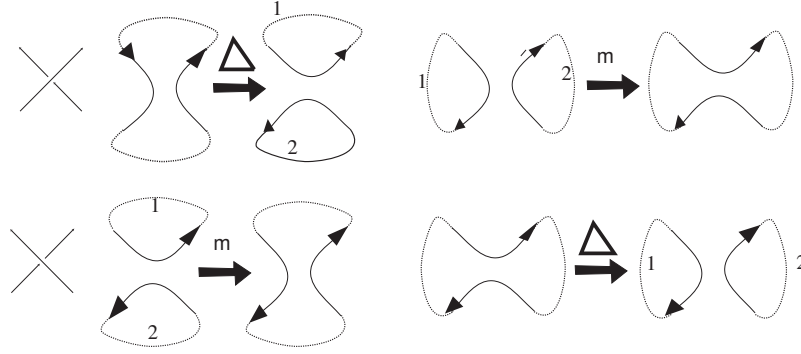


Рис. 5: Определение операций  $m$  и  $\Delta$

окружностей в состояниях на единицу. Эта перестройка происходит в некотором перекрестке, таким образом, возможны два случая — либо две окружности перестраиваются в одну, либо одна в две. В том из двух состояний, где имеются две окружности, инцидентные данному перекрестку, они упорядочены. Кроме того, все три окружности ориентированы, тем самым выбран базис для пространства, соответствующего каждой из этих окружностей.

Зададим теперь отображения  $\Delta : V \rightarrow V \wedge V$  и  $m : V \wedge V \rightarrow V$  локально согласно предписанному выше выбору образующих в перекрестке и предписанному упорядочению:  $\Delta(1) = 1_1 \wedge X_2 + X_1 \wedge 1_2$ ;  $\Delta(X) = X_1 \wedge X_2$  и  $m(1_1 \wedge 1_2) = 1$ ;  $m(X_1 \wedge 1_2) = m(1_1 \wedge X_2) = X$ ;  $m(X_1 \wedge X_2) = 0$ , см. рис. 5.

Отметим, что отображение  $m$  является сюръективным, а отображение  $\Delta$  — инъективным.

При наличии окружностей  $C_1, \dots, C_l$ , не инцидентных перекрестку, в котором происходит перестройка, и элементов  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$  на них, мы определяем частичные дифференциалы  $\partial'$  по правилу:

$$\begin{aligned} \partial'(1 \wedge \gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_k) &= \\ \Delta(1) \wedge \gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_k &= 1_1 \wedge X_2 \wedge \gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_k + X_1 \wedge 1_2 \wedge \gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_k; \partial'(X \wedge \gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_k) = \\ \Delta(X) \wedge \gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_k &= X_1 \wedge X_2 \wedge \gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_k \text{ (в случае перестройки типа } 1 \rightarrow 2) \text{ и} \\ \partial'(1_1 \wedge 1_2 \wedge \gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_k) &= \\ m(1_1 \wedge 1_2) \wedge \gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_k &= 1 \wedge \gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_k; \partial'(X_1 \wedge 1_2 \wedge \gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_k) = \partial'(1_1 \wedge X_2 \wedge \gamma_1 \wedge \\ \dots \wedge \gamma_k) &= m(X_1 \wedge 1_2) \wedge \gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_k = m(1_1 \wedge X_2) \wedge \gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_k = X \wedge \gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_k; \\ \partial'(X_1 \wedge X_2 \wedge \gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_k) &= m(X_1 \wedge X_2) \wedge \gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_k = 0 \text{ (в случае отображения типа} \\ 2 \rightarrow 1). \end{aligned}$$

Определим действие дифференциала  $\partial$  на пространстве цепей, соответствующем вершине куба, как сумму частичных дифференциалов по всем ребрам, исходящим из данной вершины.

Основным результатом главы 6 является

**Теорема 8.** 1. Набор групп  $\mathcal{C}(K)$  с дифференциалом  $\partial$  задает корректно определен-

ный биградуированный комплекс.

2. Гомологии  $Kh(K)$  этого комплекса представляют собой инварианты виртуальных зацеплений
3. В случае классических узлов гомологии  $Kh(K)$  совпадают с обычными гомологиями Хованова.
4. Градуированная эйлерова характеристика комплекса  $\mathcal{C}(K)$  равна  $\hat{J}(K)$ .

Отметим, что в случае классических узлов конструкция шестой главы дает комплекс, имеющий те же гомологии, что и изначальный комплекс Хованова, но комплекс, доставляемый 6 главой, изначально является антикоммутиративным, т.е. не требует дополнительного введения знаков в куб перестроек.

**Седьмая глава** посвящена изучению виртуальных кос. Э.Артин <sup>29</sup> построил действие группы кос на свободной группе и доказал, что это действие точно. В диссертации это действие обобщается до действия виртуальных кос на свободной группе с одной дополнительной образующей. Обсуждаются свойства этого действия. Из точности действия Артина следует, что естественное отображение классических кос в виртуальные косы является вложением (эта теорема впервые доказана Р.Фенном, Р.Риманьи, К.Рурком <sup>30</sup>). Точность этого действия выдвигается в качестве гипотезы.

Сначала строится инвариант  $\mathcal{F}$ , сопоставляющий виртуальной косе из  $n$  нитей  $n$  классов смежности свободной группы, порожденной элементами  $a_1, \dots, a_n, t$  по подгруппам, порожденным элементами  $a_1, \dots, a_n$  соответственно. Этот инвариант  $\mathcal{F}$  задает представление  $\psi$  группы  $VB_n$  в группу автоморфизмов свободной группы  $FB_{n+1}$  с образующими  $a_1, \dots, a_n, t$  по правилу ( $i = 1, \dots, n$ ):

$$\psi(\sigma_i) = \begin{cases} a_i \mapsto a_i a_{i+1} a_i^{-1} \\ a_{i+1} \mapsto a_i \\ a_l \mapsto a_l, l \neq i, i+1 \\ t \mapsto t \end{cases} ; \psi(\zeta_i) = \begin{cases} a_i \mapsto t a_{i+1} t^{-1} \\ a_{i+1} \mapsto t^{-1} a_i t \\ a_l \mapsto a_l, l \neq i, i+1 \\ t \mapsto t. \end{cases} \quad (9)$$

Отметим, что проблема распознавания виртуальных кос решена В.Г.Бардаковым в <sup>31</sup>.

**Восьмая глава** посвящена разным аспектам теории инвариантов Васильева классических и виртуальных узлов.

Инвариант  $\Xi$ , коэффициенты которого при элементах из  $\mathcal{S}$  являются полиномами Лорана от переменной  $a$ , можно преобразовать в формальный ряд заменой переменной  $a = e^x$  и разложением экспоненты по формуле Тейлора. Для удобства мы будем использовать ту же букву  $\Xi$  для обозначения полученного ряда от переменной  $x$ .

<sup>29</sup>Artin, E. (1925), Theorie der Zöpfe. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 4, pp. 27–72.

<sup>30</sup>Fenn, R.A., Rimanyi, P. and Rourke, C.P. (1997), The braid–permutation Group, *Topology*, 36(1), pp. 123–135.

<sup>31</sup>Bardakov, V.G., The virtual and universal bradis, *Fund. Math.*, 184, 1–18.

Пусть  $L$  — виртуальное зацепление. Пусть  $\Xi_m(L)$  — коэффициент в ряде  $\Xi(L)$  при  $x^m$ . Он представляет собой линейную комбинацию элементов из  $\mathcal{S}$  с рациональными коэффициентами.

В главе 7 доказана следующая теорема.

**Теорема 9.** *Для каждого  $m \in \mathbf{N}_+$  инвариант  $\Xi_m$  является инвариантом Васильева виртуальных узлов порядка не более  $m$ .*

Каждый инвариант Васильева порядка  $n$  классических узлов является инвариантом первого порядка сингулярных узлов с  $(n - 1)$  точкой самопересечения (обратное, вообще говоря, неверно). Исследование инвариантов первого порядка  $(n - 1)$ -сингулярных узлов дает важную информацию о комбинаторных формулах для инвариантов конечного порядка классических узлов.

Для определения структуры когомологий пространства сингулярных узлов и решения задачи о том, имеются ли для данного инварианта Васильева комбинаторные формулы Виро-Поляка с целочисленными коэффициентами, В.А.Васильев<sup>32</sup> сформулировал следующую гипотезу, которая доказана в диссертации:

**Теорема 10.** *Оснащенный 4-граф не реализуем на плоскости тогда и только тогда, когда у него найдутся два цикла, без общих ребер, имеющие ровно одну точку перекрестья.*

Здесь под оснащением понимается задание в каждой вершине графа структуры креста ( $A$ -структуры атома) — разбиение исходящих полурёбер на две пары (противоположных); реализуемость означает вложение, в котором индуцируемое соотношение противоположности полурёбер совпадает с предписанным; под точкой перекрестья понимается общая вершина двух циклов, в которой каждый из этих циклов переходит с ребра на формально противоположное. При доказательстве этой теоремы использованы атомы и  $d$ -диаграммы, см. выше.

## 8 Основные положения диссертации, выносимые на защиту

- Теорема о том, что связная сумма двух виртуальных узлов нетривиальна, если хотя бы один из узлов нетривиален (глава 2).
- Построение теории виртуальных длинных узлов с использованием новой техники длинных группоидов (теорема 3, в частности, доказательство того, что длинные виртуальные узлы в общем случае не коммутируют, стр. 3), глава 3.

<sup>32</sup>Васильев, В.А., Инварианты первого порядка и когомологии пространств вложений самопересекающихся кривых в  $\mathbf{R}^n$ , *Известия РАН*, т. 69 **5**, сс. 3–52.

- Построение инвариантного полинома  $\Xi$  (теорема 4), исследование свойств этого полинома для оценки минимальности некоторых диаграмм виртуальных зацеплений (глава 4).

- Построение теории гомологий Хованова для виртуальных узлов с произвольными коэффициентами. Обобщение конструкции Хованова фробениусовых расширений для получения теории гомологий виртуальных зацеплений. Построение затягивающего дерева для комплекса Хованова. Применение гомологий Хованова к оценкам на минимальный род атома и минимальное количество перекрестков диаграммы (виртуального) зацепления. Доказательство минимальности нескольких бесконечных серий виртуальных диаграмм (глава 5).

- Основным результатом главы 6 является построение для произвольного поля коэффициентов по диаграмме произвольного виртуального зацепления комплекса, который в классическом случае гомотопически эквивалентен оригинальному комплексу Хованова.

- Решение гипотезы Васильева о реализуемости сингулярных зацеплений на плоскости (глава 8).

## 8.1 Другие важные результаты

Отметим также ряд новых результатов, полученных в диссертации.

- Теорема о том, что виртуальные узлы алгоритмически распознаваемы (глава 2).
- Построение теории виртуальных группоидов, определение ряда инвариантов, с ними связанных, и установление некоторых свойств этих инвариантов (глава 3).
- Построение инвариантов виртуальных и классических узлов со значениями в (бесконечномерных) алгебрах Ли (глава 3).
- Построение инвариантов иерархических виртуальных узлов (гл.3).
- Построение инварианта виртуальных кос, обобщающего один полный инвариант классических кос (глава 7).
- Построение нескольких серий инвариантов Васильева классических и виртуальных узлов (глава 8).

Я глубоко признателен проф. Л.Х.Кауфману, акад. РАН А.Т.Фоменко, акад. РАН В.А.Васильеву и проф. М.Г.Хованову за постоянное внимание к работе и многочисленные плодотворные консультации.

Все основные результаты диссертации опубликованы в приведенных ниже книгах и статьях автора, а также двух совместных статьях [KM1, KM2] В работе [KM1] автору принадлежит построение виртуальных группоидов и бигруппоидов, бигруппоидов, связанных с длинными виртуальными узлами, инвариантов узлов со значениями в бесконечномерных алгебрах Ли. В работе [KM2] автору принадлежат доказательства

теоремы об алгоритмической распознаваемости виртуальных зацеплений и о нетривиальности связной суммы нетривиальных виртуальных узлов.

### Публикации автора по теме диссертации:

- [Ma1] Мантуров, В.О. (2005), Теория узлов, *Регулярная и хаотическая динамика*, М.-Ижевск, 512 сс.
- [Ma2] Мантуров В.О. (2004), О полиномиальных инвариантах виртуальных зацеплений, *Труды ММО*, **65** (1), сс. 175-200.
- [Ma3] Мантуров В.О. (2003), О распознавании виртуальных кос, *Записки научных семинаров ПОМИ*, **299**. Геометрия и топология. **8**, сс. 267-286.
- [Ma4] Мантуров В.О. (2002), Инварианты виртуальных зацеплений, *Доклады РАН*, **384** (1), сс. 11-13.
- [Ma5] Мантуров В.О. (2003), Атомы и минимальные диаграммы виртуальных зацеплений, *Доклады РАН*, **391** (2), сс. 166-168.
- [Ma6] Мантуров В.О. (2004), Полином Хованова для виртуальных узлов, *Доклады РАН*, **398** (1), сс. 15-18.
- [Ma7] Мантуров В.О. (2003), Кривые на поверхностях, виртуальные узлы и полином Джонса-Кауфмана, *Доклады РАН*, **390** (2), сс. 155-157.
- [Ma8] Мантуров В.О. (2004) Инварианты конечного порядка виртуальных зацеплений и полином Джонса-Кауфмана, *Доклады РАН*, **395** (1) сс. 18-21.
- [Ma9] Мантуров В.О. (2005) О длинных виртуальных узлах, *Доклады РАН*, **401** (5), сс. 595-598.
- [Ma10] Мантуров В.О. (2002) Инвариантный полином двух переменных для виртуальных зацеплений, *Успехи мат. наук*, **57**, No. 5, сс. 141-142.
- [Ma11] Мантуров В.О. (2005) Комплекс Хованова для виртуальных узлов, *Фундаментальная и прикладная математика*, т. 11., **4**, сс. 127-152.
- [Ma12] Мантуров В.О. (2005) Доказательство гипотезы Васильева о планарности сингулярных зацеплений, *Известия РАН*, т. 69, **5**, сс. 169-178.
- [Ma13] Мантуров В.О. (2003) Комбинаторные вопросы теории виртуальных узлов, *Математические вопросы кибернетики*, т. 12, сс. 147-178.
- [Ma14] Мантуров В.О. (2006) Комплекс Хованова и минимальные диаграммы узлов, *Доклады РАН*, **406** (3) сс. 308-311.

- [Ma15] Мантуров В.О. (2007) Гомологии Хованова виртуальных узлов с произвольными коэффициентами, *Известия РАН*, **71** (5), сс. 111-148.
- [Man1] Manturov V.O (2004), *Knot Theory*, CRC-Press, Boca Raton, 416 pp.
- [Man2] Manturov V.O. (2003), Multivariable polynomial invariants for virtual knots and links, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, **12** (8), pp. 1131-1144.
- [Man3] Manturov V.O. (2004) Kauffman-like polynomial and curves in 2-surfaces, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, **12** (8), pp. 1145-1153.
- [Man4] Manturov V.O. (2005) Vassiliev invariants for virtual links, curves on surfaces and the Jones-Kauffman polynomial, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, **14** (2), pp. 231-242.
- [Man5] Manturov, V.O. (2004), Long virtual knots and their invariants, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, **13** (8), pp. 1029-1039.
- [Man6] Manturov V.O. (2002) On Invariants of Virtual Links, *Acta Applicandae Mathematicae*, **72** (3), pp. 295-309.
- [Man7] Manturov V.O. (2004) Virtual Knots and Infinite-dimensional Lie algebras, *Acta Applicandae Mathematicae*, **83** (3), pp. 221-233.
- [Man8] Manturov V.O. (2005), Flat Hierarchy, *Fundamenta Mathematicae*, vol. 188, pp. 147-154.
- [Man9] Manturov V.O (2007), Khovanov Homology for Virtual Links with Arbitrary Coefficients, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, **16** (3), pp. 345-377.
- [KM1] Kauffman L.H, Manturov V.O (2005), Virtual Biquandles, *Fundamenta Mathematicae*, **188**, pp. 103-146
- [KM2] Кауфман, Л.Х., Мантуров В.О. (2006), Виртуальные узлы и зацепления, *Труды МИРАН им. В.А.Стеклова*, т. 252, N.1., сс. 114-133.