МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 517.927.7

Вьюгин Илья Владимирович

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ МОНОДРОМИИ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ОСОБЕННОСТЕЙ

Специальность 01.01.02 – дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва
2008

Работа выполнена на кафедре теории динамических систем механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, академик РАН, профессор Д. В. Аносов.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, доцент В. П. Лексин; кандидат физико-математических наук В. А. Побережный.
Ведущая организация:	Санкт-Петербургское отделение математического института имени В. А. Стеклова

Защита диссертации состоится 3 октября 2008 года в 16 часов 40 минут на заседании диссертационного совета Д.501.001.85 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 2 сентября 2008 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д.501.001.85 при МГУ,
доктор физико-математических
наук, профессор И. Н. Сергеев

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В работе изучается цикл задач аналитической теории линейных дифференциальных уравнений, тесно связанных с классической проблемой Римана–Гильберта и ее модификациями.

Основы аналитической теории линейных дифференциальных уравнений с мероморфными коэффициентами были заложены в середине XIX столетия в работах Б. Римана и Л. Фукса. Б. Риман исследовал скалярные уравнения, уделив особое внимание классу скалярных уравнений второго порядка с тремя особыми точками (полюсами коэффициентов), обладающих следующим свойством: решения в этих точках имеют не более, чем степенной рост (поскольку решения, вообще говоря, многозначные функции, то мы говорим о росте решений при стремлении аргумента к особой точке внутри некоторого сектора).[1] Такие точки называются регулярными особыми точками. Л. Фукс исследовал скалярные уравнения произвольного порядка.[2] Одно из наиболее известных его достижений состоит в том, что он полностью описал класс регулярных уравнений, то есть уравнений, все особые точки которых регулярны.

Систематическое исследование линейных систем вида

$$\frac{dy}{dz} = B(z)y \tag{1}$$

с мероморфной матрицей коэффициентов $B(z)$ (заданной на всей сфере Римана или в некоторой области комплексной плоскости) началось несколько позже. Л. Соваж, А. Пуанкаре, Д. Гильберт, И. Племель, Л. Шлезингер, Дж. Биркгоф и другие математики рубежа XIX-XX веков начали исследования этих систем с различных точек зрения. И.А. Лаппо-Данилевский в конце 20-х и начале 30-х годов XX века построил теорию таких систем на основе предложенного им метода матричных рядов.[3] Их исследования получили свое дальнейшее развитие во второй половине прошедшего столетия в связи с применениями метода изомонодромных деформаций к задачам математической физики. Здесь можно выделить таких математиков современности, как Х. Рерль, А.Х.М. Левель, Б. Мальгранж, Й. Сибуйя, Ж-П. Рамис, М. Зингер. Особо отметим имя А.А. Болибруха, внесшего наибольший вклад в исследование обратных задач аналитической теории линейных дифференциальных уравнений. Среди полученных им результатов основным является отрицательный

[1]См. *Риман Б.* Сочинения. Гостехтеоретиздат, 1948.

[2]См. *Fuchs L.* Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veranderlichen Coefficienten // Journal fur Math. 1866. V. 66. P. 121-160., 1868. V. 68. P. 354-385.

[3]См. *Лаппо-Данилевский И.А.* Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Гостехтеоретиздат, 1957. 456 с.

ответ на вопрос 21-ой проблемы Гильберта (проблемы Римана–Гильберта) о возможности построения фуксовой системы линейных дифференциальных уравнений с заданной монодромией.[4] Фуксовой называется система, особые точки матрицы $B(z)$ коэффициентов которой суть полюса первого порядка. Монодромия системы описывает характер ветвления решений в особых точках. Кроме собственно ответа на 21-ю проблему Гильберта, уже после первых работ А.А. Болибруха обнаружилось разнообразие ситуаций, связанных с этой проблемой или естественно примыкающих к ней.

Для решения 21-ой проблемы Гильберта А.А. Болибрух использовал сочетание результатов о локальном устройстве фундаментальной матрицы решений системы линейных дифференциальных уравнений, полученных А.Х.М. Левелем,[5] и геометрических методов, позволяющих связать локальные системы в глобальную. Для этого он использовал голоморфные векторные расслоения с мероморфными связностями. Впервые в данном круге вопросов расслоения со связностью были применены Х. Рерлем, но их широкое и разнообразное по своему характеру использование началось с работ А.А. Болибруха. Так, логарифмическая (т.е. та, формы которой имеют только простые полюса) связность в тривиальном расслоении эквивалентна фуксовой системе; верно и обратное — фуксова система определяет логарифмическую связность в тривиальном расслоении. А.А. Болибрух построил семейство $\mathcal{F}$ всех возможных пар: голоморфное расслоение с логарифмической связностью, каждый элемент семейства $\mathcal{F}$ имеет заданную монодромию и набор особых точек. После этого решение проблемы Римана–Гильберта сводится к задаче отыскания тривиального расслоения в семействе $\mathcal{F}$.

В последнее время теория обратных задач монодромии стала активно применяться к исследованию нелинейных уравнений и различных моделей математической физики. Многие известные уравнения математической физики, такие как: уравнения Пенлеве, уравнение Кортевега-де-Вриза, системы Гарнье и др., могут быть представлены как условия совместности семейств линейных систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную монодромию.

Цель работы. Целью работы является получение положительных решений некоторых вариантов проблемы Римана–Гильберта, а также получение необходимых и достаточных условий положительной разрешимости классической проблемы Римана–Гильберта (21-ой проблемы Гильберта для линейных фуксовых систем).

[4] См. *Болибрух А. А.* Проблема Римана–Гильберта // УМН. 1990. Т. 45. В. 2(272). С. 3-47.

[5] См. *Levelt A. H. M.* Hypergeometric functions. II // Proc. Konikl. Nederl. Acad. Wetensch. Ser. A. 1961. V. 64. P. 373-385.

Методы исследования. В работе применяются методы аналитической теории дифференциальных уравнений, комплексного анализа и геометрические методы теории расслоений и связностей.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми. В диссертации получены следующие основные результаты:

• Доказано, что любое представление может быть реализовано как прямое слагаемое в представлении монодромии фуксовой системы. Получено условие при котором фуксова система с вполне приводимым представлением монодромии вида $\chi = \chi_1 \oplus \chi_2$ всегда имеет такой же вполне приводимый вид. На основе этого результата предложен новый метод построения контрпримеров к проблеме Римана–Гильберта в любой размерности. Приведена серия таких контрпримеров.

• Указан эффективный критерий проверки положительной разрешимости проблемы Римана–Гильберта для фуксовых систем с неприводимым набором коэффициентов. На основе этого получены наиболее сильные достаточные условия положительной разрешимости проблемы Римана–Гильберта.

• Доказано, что любое представление можно реализовать как представление монодромии регулярной системы, фуксовой везде, кроме одной точки, матрица коэффициетов которой имеет в этой точке полюс порядка не выше, чем $(p-1)(n-1)+1$, где p — размерность, а n — число особых точек. Доказано, что мероморфную линейную систему в окрестности иррегулярной особой точки $z = \infty$ можно привести мероморфным преобразованием к полиномиальному виду степени не выше rp, где p — размерность, а r — ранг Пуанкаре исходной системы в точке $z = \infty$.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты относятся к аналитической теории дифференциальных уравнений и могут применяться к исследованию дифференциальных уравнений современной математической физики. При их помощи могут быть получены оценки порядков полюсов подвижных особенностей уравнения Шлезингера, в том числе, и для случая, когда монодромия деформируемой системы приводима.[6]

[6]См. *Гонцов Р.Р.* О решениях уравнения Шлезингера в окрестности Θ-дивизора Мальгранжа // Матем. заметки. 2008. Т. 83. В. 5. С. 779-782.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на следующих семинарах и конференциях:

– На семинаре Отдела дифференциальных уравнений МИАН под руководством академика РАН Д.В. Аносова, д.ф.м.н., профессора Ю.С. Ильяшенко в 2006 году.

– В Отделе дифференциальных уравнений МИАН на семинаре по аналитической теории дифференциальных уравнений под руководством академика РАН Д.В. Аносова, д.ф.м.н. В.П. Лексина неоднократно в 2003-2008 годах.

– На семинаре кафедры динамических систем механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством академика РАН А.А. Болибруха, академика РАН Д.В. Аносова, д.ф.м.н., профессора В.М. Закалюкина в 2003 году.

– На семинаре математического факультета университета RICE (г. Хьюстон, США) в 2007 году.

– На семинаре "Динамические системы" под руководством д.ф.м.н., профессора Ю.С. Ильяшенко в 2008 году.

– На XXVI конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова (Москва, 12-16 апреля 2004 года).

– На международной конференции "Особенности дифференциальных уравнений, интегрируемые системы и квантовые группы" (Страсбург, Франция, 24-27 ноября 2004 года).

– На международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 10-15 июля 2006 года).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в шести работах [1–6], из них три работы в журналах из перечня ВАК.

Структура работы. Работа состоит из введения, 4 глав и списка литературы, содержащего 31 наименование. Общий объем диссертации — 106 страниц.

Краткое содержание диссертации

Работа в основном посвящена получению положительных решений различных модификаций проблемы Римана–Гильберта, а также получению необходимых и достаточных условий положительной разрешимости классической проблемы Римана–Гильберта.

Рассмотрим систему вида (1), состоящую из p линейных дифференциальных уравнений, с матрицей коэффициентов $B(z)$, мероморфной на расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ (сфере Римана) и голоморфной вне множества особых точек $a_1, \ldots, a_n$. Систему (1) называют фуксовой в точке a_i, если матрица коэффициентов $B(z)$ имеет в точке a_i полюс первого порядка (простой полюс). Система называется фуксовой, когда все ее особые точки фуксовы. Фуксова система может быть представлена в виде:

$$\frac{dy}{dz} = B(z)y, \quad B(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{B_i}{z - a_i}, \quad \sum_{i=1}^{n} B_i = 0, \tag{2}$$

причем последнее условие означает, что точка $z = \infty$ — неособая. Фундаментальная матрица $Y(z)$ системы (1) или (2) является голоморфной невырожденной матричной функцией на универсальном накрытии $\widetilde{\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}}$ проколотой сферы Римана. Столбцы фундаментальной матрицы определяют базис в пространстве решений системы, поэтому значения фундаментальной матрицы решений на разных листах универсального накрытия различаются умножением на постоянную невырожденную матрицу. Соответственно, каждому гомотопическому классу петель $[\gamma]$, концы которых закреплены в некоторой неособой точке z_0, соответствует матрица G_γ. Сопоставление $\gamma \to G_\gamma$ определяет представление

$$\chi : \pi_1(\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}, z_0) \longrightarrow GL(p, \mathbb{C}), \tag{3}$$

которое называется *представлением монодромии* системы линейных дифференциальных уравнений. Рассмотрим набор фиксированных петель $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ с фиксированной начальной точкой z_0, каждая из которых обходит ровно одну из особых точек $a_1, \ldots, a_n$ в положительном направлении. Соответствующие им матрицы монодромии назовем $G_1, \ldots, G_n$. Эти матрицы являются образующими группы монодромии. Для матриц G_i, при естественном упорядочении аргументов $a_i - z_0$, должно выполняться соотношение

$$G_1 \cdot \ldots \cdot G_n = I,$$

означающее тривиальность обхода вокруг всех особых точек.

Классическая проблема Римана–Гильберта заключается в следующем вопросе:

По любому ли представлению χ из (3) и набору особых точек $a_1, \ldots, a_n$ можно построить фуксову систему (2), имеющую представление монодромии χ?

Как известно, классическая проблема Римана–Гильберта в общем случае имеет отрицательное решение. Существуют такие представления (3), которые невозможно реализовать как представления монодромии фуксовых систем (2) с особыми точками $a_1, \ldots, a_n$ без введения дополнительных особенностей.

Первый такой пример был построен А.А. Болибрухом в 1989 году.[7] Возникает вопрос, в качестве монодромии какой системы может быть реализовано данное представление? В диссертации дано два ответа на этот вопрос (см. [1]). Этому, в основном, посвящены вторая и четвертая главы диссертации. Другой важной темой, рассматриваемом в третьей главе, является исследование достаточных и необходимых условий разрешимости классической проблемы Римана–Гильберта. Третья глава, по сути, является продолжением и, в некоторой степени, завершает цикл работ Е. Эно и Е. Фивега,[8] С. Малека,[9] А.А. Болибруха[10] в части построения эффективного алгоритма проверки возможности построения стабильных и полустабильных расслоений с логарифмической связностью по представлению монодромии. Этот алгоритм дает возможность проверять самые широкие (из существующих) достаточные условия положительной разрешимости проблемы Римана–Гильберта. Эти условия также являются критерием положительной разрешимости проблемы Римана–Гильберта в классе фуксовых систем (2) с неприводимым набором матриц вычетов $B_1, \ldots, B_n$ в особых точках $a_1, \ldots, a_n$ матрицы коэффициентов (далее будем называть их просто матрицами коэффициентов).

Глава 1, вводная, содержит основные понятия и определения, а также некоторые технические леммы.

В главе 2 дан ответ на следующий вопрос, поставленный А.А. Болибрухом[11]:

Если матрицы G_i монодромии фуксовой системы имеют блочно-диагональный вид,

$$\chi = \chi_1 \oplus \chi_2, \qquad G_i = \begin{pmatrix} G_i^1 & 0 \\ 0 & G_i^2 \end{pmatrix},$$

то верно ли, что эта фуксова система мероморфно эквивалентна прямой сумме фуксовых систем (т.е. такой системе, матрица коэффициентов которой имеет такой же блочно-диагональный вид)

$$\frac{dy}{dz} = \begin{pmatrix} B^1(z) & 0 \\ 0 & B^2(z) \end{pmatrix} y \quad ? \tag{4}$$

[7] См. *Болибрух А.А.* Проблема Римана–Гильберта на комплексной проективной прямой // Матем. заметки. 1989. Т. 46. В. 3. С. 118-120.

[8] См. *Esnault H., Viehweg E.* Semistable bundles on curves and irreducible representations on the fundamental group // Contemp. Math. V. 241. 1999. P. 129-138.

[9] См. *Malek S.* Fuchsian systems with reducible monodromy are meromorphically equivalent to reducible Fuchsian systems. // Proceedings of the Steklov Institut of Mathematics. 2002. Vol 236.

[10] См. *Болибрух А.А.* Проблема Римана–Гильберта на компактной римановой поверхности // Тр. МИРАН. 2002. Т. 238. С. 55-69.

[11] См. *Болибрух А.А.* Обратные задачи монодромии аналитической теории дифференциальных уравнений // Математические события XX века. М.: Фазис, 2004. С. 53-79.

В разделе 2.2 диссертации приведен пример, дающий отрицательный ответ на этот вопрос.

Основной результат главы 2 приведен в разделе 2.1. Этот результат является обобщением примера и состоит в более общем утверждении следующей теоремы.

Теорема 2.1. *Любое представление χ может быть реализовано как прямое слагаемое в представлении монодромии $\chi_f = \chi \oplus \tilde{\chi}$ фуксовой системы (2).*

У полученной системы не появляется дополнительных особых точек. Представление $\tilde{\chi}$ при этом может быть выбрано неприводимым и имеет ту же размерность, что χ. Таким образом, получено положительное решение соответствующей обратной задачи. Эта задача может рассматриваться как аналог понятия стабильной тривиальности расслоений. В данном случае мы можем назвать ее стабильной реализуемостью представления монодромии фуксовой системой. Также доказанная теорема является усиленным вариантом соответствующего результата А.А. Болибруха, гласящего, что любое представление может быть реализовано как подпредставление или фактор-представление представления монодромии фуксовой системы.

Описанный выше пример работы [3] состоит из таких представлений χ и $\tilde{\chi}$, что их прямая сумма χ_f реализуется как монодромия фуксовой системы, но, при этом, представление χ не может быть реализовано как монодромия фуксовой системы. Размерности представлений χ и $\tilde{\chi}$ равны, соответственно, 4 и 2. Этот пример также показывает, что размерность представления $\tilde{\chi}$ не обязана быть равной размерности χ, а может быть и меньшей.

В последнем разделе второй главы доказано, что на приведенный выше вопрос А.А. Болибруха имеется положительный ответ при некотором дополнительном условии на спектры операторов монодромии. Оно сформулировано в следующей теореме.

Теорема 2.3. *Если спектры образующих представлений χ_1 и χ_2 не пересекаются ни для одной точки, то из того, что прямая сумма*

$$\chi = \chi_1 \oplus \chi_2$$

является представлением монодромии фуксовой системы, следует, что представления χ_1 и χ_2 могут быть реализованы как монодромии фуксовых систем или, что то же самое, эта фуксова система мероморфно эквивалентна фуксовой системе вида (4).

Это утверждение позволяет строить многочисленные контрпримеры к классической проблеме Римана–Гильберта. Построена серия контрпримеров к проблеме Римана–Гильберта в размерностях $p \geqslant 4$, с $n \geqslant 3$ особыми точками. Эти примеры получены как модификации известного контрпримера, построенного А.А. Болибрухом, при помощи достаточного условия положительной разрешимости вопроса А.А. Болибруха. Таким образом, приведено более простое доказательство следующего известного утверждения.

Теорема 2.4. *(А.А. Болибрух, Е. Эно) Существуют контрпримеры к проблеме Римана–Гильберта в размерности p с n особыми точками для всех пар (p, n) при $p \geqslant 4$, $n \geqslant 3$.*

В случаях $p = 3$, $n \geqslant 4$ также существуют контрпримеры к проблеме Римана–Гильберта, построенные А.А. Болибрухом.[12]

Глава 3 содержит результаты, касающиеся так называемых стабильных и полустабильных пар (расслоений со связностью), точнее, возможности построения такой пары по заданному представлению монодромии. Стабильной (полустабильной) парой называется расслоение со связностью, такое, что любое его подрасслоение, инвариантное относительно связности, имеет наклон (степень, деленную на ранг) меньше (не больше) наклона всего расслоения. Согласно результату А.А. Болибруха, основной особенностью таких расслоений является то, что из существования стабильной пары следует положительная разрешимость классической проблемы Римана–Гильберта.[13]

В третьей главе показано, что условие существования стабильной пары с заданной монодромией может быть эффективно проверено. Исключения составляют лишь те представления, у которых невозможно эффективным образом описать подпредставления, а для остальных приводится алгоритм проверки. Это дает эффективные достаточные условия положительной разрешимости классической проблемы Римана–Гильберта, наиболее широкие из существующих. Кроме того, существование стабильной пары в точности эквивалентно существованию фуксовой системы (2) с неприводимым набором матриц коэффициентов $B_1, \ldots, B_n$, т.е. такой системы, у которой невозможно выделить подсистемы постоянной заменой неизвестных функций. Это дает возможность эффективной проверки критерия положительной разрешимости проблемы Римана–Гильберта в классе фуксовых систем вида (2) с неприводимым набором матриц вычетов $B_1, \ldots, B_n$ матрицы коэффициентов.

[12]См. *Болибрух А.А.* 21-я проблема Гильберта для линейных фуксовых систем М.: Наука, 1994. (Тр. МИАН; Т. 206).

[13]См. *Болибрух А.А.* Проблема Римана–Гильберта на компактной римановой поверхности // Тр. МИРАН. 2002. Т. 238. С. 55-69.

Кроме того показано, что условие существования полустабильной пары с заданной монодромией также является эффективно проверяемым. Это дает эффективное необходимое условие положительной разрешимости проблемы Римана–Гильберта.

В главе 4 исследована проблема Римана–Гильберта для регулярных систем. Особая точка a_i называется *регулярной*, если решения при приближении к особой точке растут не быстрее некоторой степени $\frac{1}{z-a_i}$. По определению *система регулярна* тогда, когда все ее особые точки регулярные. И. Племелем в 1908 году был получен следующий результат:

Любое представление (3) может быть реализовано как представление монодромии регулярной системы (1).

При этом, ничего не было известно про структуру матрицы коэффициентов этой системы. Система линейных дифференциальных уравнений с рациональной матрицей коэффициентов может быть записана в виде:

$$\frac{dy}{dz} = B(z)y, \quad B(z) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=1}^{r_i+1} \frac{B_i^j}{(z-a_i)^j}, \tag{5}$$

где r_i — называется *рангом Пуанкаре* системы в особой точке a_i, это — величина, на единицу меньшая порядка полюса. Основной является следующая теорема.

Теорема 4.1. *Всякое представление (3) может быть реализовано как представление монодромии системы (5), фуксовой во всех точках, кроме одной, в которой она регулярна, причем ранг Пуанкаре в этой точке не превосходит величины* $(n-1)(p-1)$.

Эта теорема улучшает аналогичную оценку $\frac{(n-2)p(p-2)}{2} + pn$, полученную в книге Д.В. Аносова и А.А. Болибруха.[14]

Во втором разделе четвертой главы исследуется так называемая задача о биркгофовой стандартной форме. Рассмотрим систему

$$z\frac{dy}{dz} = C(z)\,y, \qquad C(z) = \sum_{n=-\infty}^{r} C_n z^n \tag{6}$$

[14]См. *Anosov D.V., Bolibruch A.A.* The Riemann-Hilbert problem. Aspects of Mathematics. Braunschweig: Vieweg, 1994.

из p линейных дифференциальных уравнений в некоторой окрестности $O_\infty = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| > R\}$ иррегулярной особой точки $z = \infty$ ранга Пуанкаре r ($C_r \neq 0$). Пусть линейное калибровочное преобразование

$$\tilde{y} = \Gamma(z) y \tag{7}$$

переводит систему (6) в систему вида

$$z\frac{d\tilde{y}}{dz} = \widetilde{C}(z)\,\tilde{y}, \qquad \widetilde{C}(z) = \widetilde{C}_{r'} z^{r'} + \dots + \widetilde{C}_0, \qquad \widetilde{C}_{r'} \neq 0. \tag{8}$$

Преобразование (7) выбирается либо *аналитическим* (матрица $\Gamma(z)$ голоморфно обратима в O_∞), и тогда говорят об *аналитической эквивалентности* систем, либо *мероморфным* (матрица $\Gamma(z)$ мероморфно обратима в O_∞), и тогда говорят о *мероморфной эквивалентности* этих систем. Аналитическое преобразование не изменяет ранг Пуанкаре исходной системы, в то время как мероморфное преобразование может и повысить, и понизить ранг Пуанкаре. Следующую задачу называют *задачей о биркгофовой страндартной форме.*

Преобразовать с помощью калибровочного преобразования вида (7) систему (6) в систему вида (8) с рангом Пуанкаре $r' \leq r$.

Для случая аналитического преобразования (7) эта задача была в 1950-х годах решена Ф.Р. Гантмахером: им был построен контрпример.[15] Два наиболее широких достаточных условия были получены Дж. Д. Биркгофом и А.А. Болибрухом. Для случая мероморфного преобразования эта задача до сих пор не решена. У нас исследуется другая задача: привести систему (6) к полиномиальному виду (8) с ограниченным ростом ранга Пуанкаре.

Теорема 4.2. *Система (6) с помощью мероморфного преобразования (7) может быть переведена в систему (8) с матрицей коэффициентов* $\widetilde{C}(z)$ *полиномиального вида, где*

$$r' \leq 1 + r \max_{1\leq j\leq m} p_j.$$

Через p_i обозначены размерности диагональных блоков-подсистем исходной системы, т.е. $p_i \leq p$.

[15] См. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Физматлит, 2004.

В заключение я хочу отметить определяющую роль академика Андрея Андреевича Болибруха, который был моим первым научным руководителем. Он же поставил большую часть задач, решенных в диссертации.

Хочу выразить благодарность моему научному руководителю академику Дмитрию Викторовичу Аносову за помощь и поддержку в моей работе, а также руководителям и участникам семинара по аналитической теории дифференциальных уравнений, проходящего в МИРАН, вокруг которого после смерти А.А. Болибруха концентрировалась наша работа.

Список литературы

[1] *Вьюгин И.В., Гонцов Р.Р.* О дополнительных параметрах в обратных задачах монодромии // Матем. сб. 2006. Т. 197. В. 12. С. 43-64.

Вьюгину И.В. принадлежат теоремы 1, 2, 3 и следствие 1, Гонцову Р.Р. принадлежат лемма 2 и доказательство леммы 1.

[2] *Вьюгин И.В.* О конструктивных условиях разрешимости проблемы Римана–Гильберта // Матем. заметки. 2005. Т. 77. В. 5. С. 643-655.

[3] *Вьюгин И.В.* Неразложимая фуксова система с разложимым представлением монодромии // Матем. заметки. 2006. Т. 80. В. 4. С. 501-508.

[4] *Вьюгин И.В.* О конструктивных условиях разрешимости проблемы Римана–Гильберта // Тезисы докладов Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Суздаль. 2004. С. 50-52.

[5] *Вьюгин И.В.* О фуксовых системах с разложимой монодромией // Тезисы докладов XXVI Кофнеренции молодых ученых МГУ. 2004. С. 32-33.

[6] *Вьюгин И.В.* О приведении мероморфной линейной системы к полиномиальному виду // Тезисы докладов Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Суздаль. 2006. С. 62-63.