МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 517.9

Аносова Ольга Дмитриевна

ИНВАРИАНТНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ В СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМАХ

01.01.02 — дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Аносова

Москва, 2008

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Ю. С. Ильяшенко.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор В. Ф. Бутузов; доктор физико-математических наук, профессор А. А. Давыдов.
Ведущая организация:	Санкт-Петербургский государственный университет.

Защита состоится 3 октября 2008 года в 16 часов 40 минут на заседании диссертационного совета Д.501.001.85 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские Горы, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 2 сентября 2008 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
Д.501.001.85 при МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор И. Н. Сергеев

Общая характеристика работы

Актуальность темы. *Возмущение* — это общее название для такой ситуации, когда речь идет о каком-то изменении 'невозмущенной' системы дифференциальных уравнений, свойства решений которой подразумеваются известными, причем изменения все-таки не нарушают некоторой связи между решениями невозмущенной системы и решениями 'возмущенной' (т.е. измененной) системы. Такая неопределенная общая формулировка по-разному конкретизируется в различных задачах. Когда система изменяется незначительно (в классе гладкости C^r с подходящим r), говорят о *регулярных* возмущениях. Для *сингулярных* возмущений характерны значительные изменения системы в том или ином смысле, при которых все же остается какая-то связь между возмущенной и невозмущенной системами.

Настоящая диссертация относится к той части теории сингулярных возмущений, в которой рассматриваются быстро-медленные системы. *Быстро-медленная* система — это система дифференциальных уравнений вида

$$(1) \qquad \begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y, \varepsilon), & x \in \mathbb{R}^k,\ y \in \mathbb{R}^l, \\ \dot{y} = \varepsilon f_2(x, y, \varepsilon), & \varepsilon \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

где f_1 и f_2 — C^r-гладкие функции ($r \geq 1$). Соответствующая невозмущенная, или *быстрая*, система отвечает значению $\varepsilon = 0$

$$(2) \qquad \begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y, 0), & x \in \mathbb{R}^k,\ y \in \mathbb{R}^l, \\ \dot{y} = 0. \end{cases}$$

Формально переход от быстрой системы (2) к быстро-медленной (1) выглядит как регулярное возмущение. Но если рассмотреть быстрое время $T = \varepsilon t$, то система (1) превращается в систему $(1')$, где малый параметр ε стоит при одной из производных:

$$(1') \qquad \begin{cases} \varepsilon \dfrac{dx}{dT} = f_1(x, y, \varepsilon), & x \in \mathbb{R}^k,\ y \in \mathbb{R}^l, \\ \\ \dfrac{dy}{dT} = f_2(x, y, \varepsilon), & \varepsilon \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Решению новой системы $(1')$ на отрезке $[0, \tau]$ отвечает решение старой системы (1) на большем отрезке $[0, \tau/\varepsilon]$. При $\varepsilon = 0$ система

(1′) принимает вид

$$(2')\qquad \begin{cases} f_1(x,y,0)=0, & x\in\mathbb{R}^k,\ y\in\mathbb{R}^l,\\[2ex] \dfrac{dy}{dT}=f_2(x,y,0), & \varepsilon\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

Понятно, что системы (1′) и (2′) имеют фазовые пространства разных размерностей. Поэтому это как раз пример сингулярного возмущения. На фиксированном отрезке времени решения быстро-медленной системы (1) близки к решениям быстрой системы (2), однако мы будем рассматривать большие отрезки времени (порядка $1/\varepsilon$), где близость решений утрачивается. ‘Сингулярность’ тогда проявляется не во внешнем виде системы, а в выходе за пределы обычных результатов о регулярных возмущениях, что обусловлено слишком большим отрезком времени. В данном случае задача о сингулярном возмущении равносильна задаче о регулярном возмущении, но на большом отрезке времени.

В 1940-60-е годы было обычным заниматься сингулярными возмущениями в более явном виде, рассматривая систему (1′). Но мы будем отталкиваться от системы (1). В диссертации исследуются быстро-медленные системы, у которых система быстрых движений при некоторых значениях медленной переменной y имеет экспоненциально устойчивое или нормально гиперболическое инвариантное многообразие $M(y)$, которое может быть сложнее особой точки. Доказываются теоремы о существовании связанного с ним слабо инвариантного многообразия исходной системы — глобальные (когда $M(y)$ существует для y из некоторого компактного множества) и локальные (когда $M(y)$ существует только для одного y) в устойчивом и гиперболическом случаях. Многообразие с границей называется *слабо инвариантным*, если векторное поле касается этого многообразия во всех его точках.

В глобальном случае мы применяем гиперболическую теорию Н. Феничеля сохранения инвариантных многообразий[1] к регулярной части объединения $\mathfrak{M}_0 := \cup_y (M(y)\times\{y\})$. Получается, что

---

[1] Fenichel N. Persistence and smoothness of invariant manifolds for flows. Indiana Univ. Math. J. 1971. Vol. 21. N 3. P. 193–226.

быстро-медленная система (1) при достаточно малых $\varepsilon > 0$ имеет слабо инвариантное многообразие $\mathfrak{M}_\varepsilon$, близкое к объединению $\mathfrak{M}_0 = \cup_y(M(y) \times \{y\})$. Это позволяет в ряде случаев исключить медленные и часть быстрых переменных, оставляя лишь те быстрые переменные, которые отвечают инвариантному многообразию. В ранних работах еще не было выводов о $\mathfrak{M}_\varepsilon$, а доказывалось, что рассматриваемые траектории расположены вблизи $\mathfrak{M}_0$.

После работ Н. Феничеля[2] и К. Алымкулова[3] стало ясно, что эти траектории лежат на многообразии $\mathfrak{M}_\varepsilon$ или стремятся к нему. В этих случаях, когда $M_0(y)$ является особой точкой или замкнутой орбитой, выводится еще следующий важный результат: можно получить приближенные дифференциальные уравнения более низкого порядка, описывающие эволюцию медленной переменной y. Тогда, используя инвариантные многообразия, можно свести задачу на сингулярные возмущения к задаче на регулярные возмущения или на усреднение, см., например, книгу В. А. Соболева, В. В. Стрыгина[4]. Таким путем заново были получены две следующие теоремы.

1) Теорема о периодических решениях быстро-медленной системы (1) с положением равновесия $M_0(y)$, y-компонента которого близка к гиперболическому периодическому решению быстрой системы (2). Эта теорема была впервые доказана в работе Л. Флэтто и Н. Левинсона[5], а затем еще другим методом в работе Д. В. Аносова[6], позднее более простое доказательство, использующее многообразие $\mathfrak{M}_\varepsilon$, было указано Н. Феничелем.

2) Теорема об инвариантном торе в быстро-медленной системе (1) с гиперболическим периодическим решением $M_0(y)$, медленные координаты которого близки к гиперболическому периодическому решению системы медленных движений, усредненных вдоль

---

[2] Fenichel N. Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations. J. Differential Equat. 1979. Vol. 31. N 1. P. 53–98.

[3] Алымкулов К. О задаче сингулярного возмущения с предельным циклом в подсистеме с быстрым временем. Математические заметки. 1989. Т. 46, N 5. С. 89–91.

[4] Соболев В. А., Стрыгин В. В. Разделение движений методом интегральных многообразий. М.: Наука, 1988.

[5] Flatto L., Levinson N. Periodic Solutions of Singularly Perturbed Systems. J. Rational. Mech. Anal. 1955. Vol. 4. P. 943–950.

[6] Аносов Д.В. О предельных циклах ситем дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных. Мат. сборник. 1960. Т. 50(92). N 3. С. 299–334.

$M_0(y)$. Теорема была впервые доказана Л. С. Понтрягиным, Л. В. Родыгиным[7], а простое доказательство, использующее многообразие $\mathfrak{M}_\varepsilon$, указано К. Алымкуловым. Подобные результаты получены Ю. Ильяшенко, М. Сапрыкиной[8] и Е. Ф. Мищенко, Ю. С. Колесовым, А. Ю. Колесовым, Н. Х. Розовым[9]

Другой подход — идти от быстрой системы (2) к более сложной быстро-медленной системе (1), что можно описать в терминах динамических бифуркаций. *Динамическая* бифуркация — это бифуркация в зависимости от параметра, где параметр в свою очередь изменяется со временем, т.е. ‘находится в динамике’. Каждая *обыкновенная* бифуркация, задаваемая системой вида

$$\dot{x} = v(x, y), \quad x \in \mathbb{R}^k, \quad y \in \mathbb{R}^l, \tag{3}$$

с малым многомерным параметром y, порождает динамическую бифуркацию вида

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y, \varepsilon), & x \in \mathbb{R}^k, y \in \mathbb{R}^l, \\ \dot{y} = \varepsilon f_2(x, y, \varepsilon), & \varepsilon \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр и при $\varepsilon = 0$ выполнено равенство $f_1(x, y, 0) = v(x, y)$. Задачи по систематической разработке теории динамических бифуркаций как развития теории обыкновенных бифуркаций были предложены Дж. Гукенхеймером[10].

Локальные теоремы диссертации позволяют из существования экспоненциально устойчивого или гиперболического инвариантного многообразия при некотором значении медленной переменной y в обыкновенной бифуркации (3) получить существование

---

[7] Понтрягин Л.С., Родыгин Л.В. Периодическое решение одной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром. Доклады Академии Наук СССР. 1960. Т. 132, N 3. С. 537-540.

[8] Ilyashenko Yu., Saprykina M. Embedding theorems for local families and oscilatory slow-fast systems. Progress in nonlinear science, Vol. 1 (Nizhny Novgorod, 2001). RAS, Inst. Appl. Phys., Nizhny Novgorod, 2002. P. 389–410.

[9] Мищенко Е. Ф., Колесов Ю. С., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах. М.: Физматлит, 1995.

[10] Guckenheimer J. Towards a global theory of singularly perturbed systems. Nonlinear Differential Equat. and Chaos (Groningen 1995) (H. W. Broer et al.,eds.), Birkhäuser, Basel, 1996. P. 213–225.

слабо инвариантного многообразия при близких значениях y в динамической бифуркации (1). Благодаря ослабленным предположениям локальные теоремы могут быть более применимыми в практических задачах. Например, локальная гиперболическая теорема дает подход к исследованию динамических бифуркаций гомоклинических траекторий седлоузла и гомоклинических поверхностей седлоузового цикла.

Обыкновенные бифуркации гомоклинических траекторий седлоузла и некритического гомоклинического тора, т.е. бифуркации при $\varepsilon = 0$, исследованы Ю. С. Ильяшенко, Л. Вейгу[11], гомоклинической бутылки Клейна — А. Борисюком[12]. Локальная теорема дает подход к исследованию этих бифуркаций при $\varepsilon \neq 0$.

Цель работы. Цель настоящей диссертации — развить теорию быстро-медленных систем в случае, когда система быстрых движений имеет экспоненциально устойчивое или гиперболическое инвариантное многообразие.

Центральными результатами диссертации являются доказательства следующих глобальных и локальных теорем.

- Глобальная теорема 1.1 требует наличия инвариантных многообразий в быстрой системе (2) при всех значениях медленных переменных из некоторого компакта и устанавливает существование слабо инвариантного многообразия в быстро-медленной системе (1) при достаточно малом параметре, а также гладкость этого многообразия и его гладкую зависимость от параметра.

- Локальная теорема 1.2 требует наличия инвариантного многообразия в быстрой системе (2) при одном значении y_0 медленной переменной y и устанавливает существование слабо инвариантного многообразия в быстро-медленной системе (1), расположенного в области, отвечающей значениям медленной переменной y, близким к значению y_0.

---

[11] Ильяшенко Ю.С., Вейгу Л. Нелокальные бифуркации. М.: МЦНМО: ЧеРо, 1999. (Новые мат. дисциплины.)

[12] Борисюк А. Глобальные бифуркации на бутылке Клейна. Унимодальный случай. Математические заметки. 2002. Т. 71, Вып. 3, С. 348-363.

Методы исследования. В диссертации применяются методы теории экспоненциально устойчивых и гиперболических инвариантных многообразий, а также методы теории характеристических показателей.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем.

- Доказаны глобальная и локальная теоремы о сохранении экспоненциально устойчивого инвариантного многообразия.
- Доказаны глобальная и локальная теоремы о сохранении гиперболического инвариантного многообразия.

Результаты диссертации обобщают теоремы Н. Феничеля и К. Алымкулова, в которых инвариантные многообразия быстрой системы являются положениями равновесия или предельными циклами.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут быть использованы в исследованиях по сингулярно возмущенным системам и динамическим бифуркациям. Такие исследования проводятся в том числе в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова, Математическом институте РАН имени В. А. Стеклова, Санкт-Петербургском государственном университете и Владимирском государственном университете.

Апробация. Результаты диссертации докладывались на следующих семинарах и конференциях:

1) Семинар по динамическим системам на механико-математическом факультете МГУ под руководством профессора Ю. С. Ильяшенко, 2000-2005 (неоднократно).

2) Международная конференция ‘Дифференциальные уравнения и динамические системы’, г. Суздаль, 2000.

3) Международная конференция ‘Combinatorics, Dynamics and Probability’, г. Стокгольм (Швеция), 2000.

4) Семинар по дифференциальным уравнениям университета г. Страсбург (Франция), 2001.

5) Семинар по дифференциальным уравнениям университета г. Ульм (Германия), 2001.

6) Международная конференция ‘Прогресс в нелинейной динамике’, г. Нижний Новгород, 2001.

7) Семинар по дифференциальным уравнениям университета г. Дижон (Франция), 2004.

8) Семинар отдела дифференциальных уравнений математического института РАН имени В. А. Стеклова, 2005.

9) Международная конференция ‘Lyapunov exponents and related topics in dynamics and geometry’, г. Москва, 2005.

Публикации. Содержание диссертации опубликовано в трех статьях, список которых приведен в конце автореферата. Все три статьи опубликованы в изданиях, входящих в перечень ВАК.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из трех глав, включая введение. Все утверждения в диссертации имеют двойную нумерацию. Первое число (1, 2 или 3) обозначает номер главы, а второе — номер соответствующего утверждения внутри главы. Главные результаты диссертации — это теоремы 1.1 и 1.2. К основным выводам также относятся теоремы 2.13, 2.31, 2.37 и 3.6. Список литературы содержит 22 наименования, общий объем текста 70 страниц.

Поддержка. Работа была осуществлена при частичной финансовой поддержке грантов РФФИ и CRDF RMI.

Содержание диссертации

Первая глава (введение) состоит из четырех параграфов, и в нем подробно обосновывается актуальность темы, вводятся основные понятия, формулируются известные результаты по данной теме и теоремы автора.

Вторая глава содержит пять параграфов и посвящена доказательству глобальных теорем о сохранении инвариантного многообразия в устойчивом и гиперболическом случаях.

Третья глава, состоящая из двух параграфов, содержит доказательство локальных теорем о сохранении инвариантного многообразия в устойчивом и гиперболическом случаях.

Первым основным результатом диссертации является глобальная теорема 1.1. Она применяется в случае, когда существуют инвариантные многообразия для всех y из некоторого компактного множества. Из этого глобального результата, в частности, непосредственно следуют результаты об особых точках и устойчивых циклах, описанные выше. Результаты диссертации применимы также к инвариантным многообразиям размерности больше 1, которые, насколько известно, ранее были мало изучены.

Рассмотрим C^r-гладкое векторное поле v, определенное в некоторой области $V \subset \mathbb{R}^N$. Многообразие $M \subset \mathbb{R}^N$ называется n-мерным C^r-гладким *многообразием с углами*, если каждая точка $x \in M$ обладает окрестностью одного из трех типов 1a)–1c) и выполняется условие 2) на пересечение таких окрестностей:

1a) для окрестности $U_x \subset M$ точки x существует гомеоморфизм $\varphi_x : U_x \to \mathbb{R}^n$ (тогда точка x называется *внутренней точкой* многообразия M);

1b) для окрестности $U_x \subset M$ точки x существует гомеоморфизм $\varphi_x : U_x \to \mathbb{R}^n_+ := \{x_1 \geq 0, x_2, \ldots, x_n\}$, причем при этом гомеоморфизме x переходит в начало координат 0 (тогда x называется *регулярной граничной точкой* многообразия M);

1c) для окрестности $U_x \subset M$ точки x существует гомеоморфизм $\varphi_x : U_x \to \mathbb{R}^k_+ \times \mathbb{R}^l_+$, $k + l = n$, причем при этом гомеоморфизме точка x переходит в начало координат 0×0 (тогда x называется *угловой точкой* многообразия M);

2) для любых пересекающихся окрестностей $U_x, U_y \subset M$ сквозное отображение $\varphi_x \circ \varphi_y^{-1} : \varphi_y(U_x \cap U_y) \to U_x \cap U_y \to \varphi_x^{-1}(U_x \cap U_y)$ является C^r-гладким диффеоморфизмом.

Все рассматриваемые многообразия считаются C^r-гладкими, $r \geq 1$. Компактное многообразие $M \subset \mathbb{R}^n$ с границей ∂M (и, возможно, с углами) называется

- *растекающимся* (или *отрицательно инвариантным*), если поле v касается M во всех точках многообразия M и во всех регулярных граничных точках направлено строго наружу;
- *слабо инвариантным*, если поле v касается M во всех точках многообразия M (а в регулярных граничных точках поле v может

быть направлено как внутрь, так и наружу, или быть равным нулю).

Рассмотрим два m-мерных C^r-гладких многообразия M и M_0, лежащих в одном пространстве $\mathbb{R}^n$. Многообразие M называется C^r_ε*-близким* к M_0, если любая внутренняя точка $a \in M_0$ имеет окрестность $U_a \subset \mathbb{R}^n$ с локальными координатами $x = (x_1, \ldots, x_m, y_1 \ldots, y_{n-m})$, в которой многообразия имеют вид

$$M_0 \cap U_a = \{(x, 0) \,:\, x \in \mathbb{R}^m,\, 0 \in \mathbb{R}^{n-m}\}, \quad M \cap U_a = \{(x, y(x))\},$$

где $y(x) \,:\, \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n-m}$ — C^r-гладкая функция со свойствами $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}^m} \|y^{(k)}(x)\| < \varepsilon$, $k = 0, \ldots, r$.

Обозначим через g^t_v (или, для краткости, через g^t) поток, задаваемый векторным полем v. Введем следующие обозначения:

$T_a M$ — *касательное* пространство касательных векторов к многообразию M в точке $a \in M$;

$N_a M$ — *нормальное* пространство векторов в точке $a \in M$, нормальных к вложенному многообразию $M \subset \mathbb{R}^n$;

$\pi_a : T_a\mathbb{R}^n \to N_a M$ — оператор ортогонального проектирования на нормальное пространство в точке $a \in M$;

$dg^t(a) : T_a\mathbb{R}^n \to T_{g^t a}\mathbb{R}^n$ — дифференциал отображения g^t в $a \in V$.

Показателем притяжения (ляпуновского типа) для векторного поля v в точке a многообразия M называется число

$$\lambda_N(M, a) = \varliminf_{t \to +\infty} \frac{-\ln \|\pi_a \circ dg^t(g^{-t}a)\|}{t}.$$

Показателем сближения траекторий (ляпуновского типа) для векторного поля v в точке a многообразия M называется число

$$\lambda_T(M, a) = \varlimsup_{t \to +\infty} \frac{\ln \|dg^{-t}(a)|_{T_a M}\|}{t}.$$

Обозначения подчеркивают, что показатель притяжения λ_N характеризует сжатие в направлении, нормальном к M, а показатель сближения траекторий λ_T — сжатие в касательном направлении. Рассмотрим быстро-медленную систему

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{rcll} \dot{x} & = & f_1(x, y, \varepsilon), & x \in \mathbb{R}^k,\ y \in \mathbb{R}^l, \\ \dot{y} & = & \varepsilon f_2(x, y, \varepsilon), & \varepsilon \geq 0, \end{array} \right.$$

соответствующую ей быструю систему

$$(2)\qquad \begin{cases} \dot{x} &= f_1(x,y,0),\ x\in\mathbb{R}^k,\ y\in\mathbb{R}^l, \\ \dot{y} &= 0 \end{cases}$$

и расширенную быстро-медленную систему

$$(4)\qquad \begin{cases} \dot{x} &= f_1(x,y,\varepsilon), \\ \dot{y} &= \varepsilon f_2(x,y,\varepsilon), \\ \dot{\varepsilon} &= 0. \end{cases}$$

Грубо говоря, глобальная теорема 1.1 — это утверждение о сохранении устойчивого инвариантного многообразия при добавлении динамики по медленной переменной. То есть из существования устойчивого инвариантного многообразия в быстрой системе (2) выводится существование слабо инвариантных многообразий, близких к исходному, в системах (1) и (4). И предположения, и вывод имеют глобальный характер, т.е. речь идет об инвариантности многообразий, когда медленная переменная принимает значения из некоторого компакта в $\mathbb{R}^l$.

Теорема 1.1. *Пусть быстрая система* (2) *при любом* y *из некоторого произведения* $B := \prod_{i=1}^{l}[p_i,q_i] \subset \mathbb{R}^l$ *имеет компактное* C^r*-гладкое* $(r \geq 1)$ *либо замкнутое инвариантное, либо растекающееся многообразие* $M_0(y) \subset \mathbb{R}^k$*, такое что множество*

$$\mathfrak{M}_0 := \bigcup_{y\in B} M_0(y) \times \{y\} \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$$

является C^r*-гладким связным мнообразием с границей и, возможно, с углами, а в каждой точке* $a \in \mathfrak{M}_0$ *ляпуновские показатели* $\lambda_N(\mathfrak{M}_0,a)$ *и* $\lambda_T(\mathfrak{M}_0,a)$ *удовлетворяют неравенству*

$$(5)\qquad \lambda_N(\mathfrak{M}_0,a) > r\lambda_T(\mathfrak{M}_0,a).$$

Тогда для любой C^r*-гладкой функции* f_2 *и непустой открытой окрестности* $U(\partial B) \subset \mathbb{R}^l$ *существует такое число* $\alpha > 0$, *что*

1) при каждом $\varepsilon \in [0,\alpha]$ *быстро-медленная система* (1) *имеет* C^r*-гладкое слабо инвариантное многообразие* $\mathfrak{M}_\varepsilon$*, причем многообразие* $(\mathfrak{M}_\varepsilon - (\mathbb{R}^k \times U(\partial B)))$ *является* C^r_ε*-близким к* $\mathfrak{M}_0$*;*

2) расширенная система (4) *имеет* C^r*-гладкое слабо инвариантное многообразие вида*

$$\mathbb{M} := \bigcup_{0\le\varepsilon\le\alpha} \mathfrak{M}_\varepsilon \times \{\varepsilon\} \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}, \text{ причем}$$

$$(\mathbb{M} \cap \{\varepsilon = 0\}) - \mathbb{U} = (\mathfrak{M}_0 \times \{0\}) - \mathbb{U}, \text{ где } \mathbb{U} := \mathbb{R}^k \times U(\partial B) \times [0, \varepsilon_0].$$

Близкие варианты глобальной теоремы опубликованы в [3, 1]. Аналогичный результат верен и в случае гиперболического инвариантного многообразия, см. теорему 2.37.

Второй основной результат диссертации — более удобная для применений локальная теорема 1.2. Она требует существования устойчивого инвариантного многообразия лишь при одном значении y (без ограничения общности можно считать $y = 0$). Локальная теорема позволяет решать ряд задач динамических бифуркаций. Методы диссертации применимы, в частности, к исследованию динамических бифуркаций гомоклинических траекторий седлоузла и гомоклинических поверхностей седлоузлового цикла.

Во всех этих случаях для динамической бифуркации в диссертации выделено некоторое инвариантное многообразие относительно небольшой размерности. В простейших случаях один этот факт позволяет легко получить описание качественной картины. Однако в общих случаях динамических бифуркаций более полная качественная картина еще ждет своего исследователя.

Теорема 1.2. *Предположим, что система*

$$\dot{x} = f_1(x, 0, 0), \ x \in \mathbb{R}^k, \tag{6}$$

где $f_1 : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k$ *—* C^r*-гладкая* ($r \ge 1$) *функция, имеет компактное* C^r*-гладкое либо замкнутое инвариантное, либо растекающееся многообразие* $M_0 \subset \mathbb{R}^k$*, такое что в каждой точке* $a \in M_0$ *ляпуновские показатели удовлетворяют неравенству*

$$\lambda_N(M_0, a) > \max(0, r\lambda_T(M_0, a)). \tag{7}$$

Тогда для любой C^r*-гладкой функции* $f_2 : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^l$ *найдутся такие числа* $\alpha > 0$ *и* $\beta > 0$*, что*

1) при каждом $\varepsilon \in [0, \alpha]$ *система* (1) *имеет* C^r*-гладкое слабо инвариантное многообразие* $\mathfrak{M}_\varepsilon \subset \mathbb{R}^k \times B_\beta$*, где* $B_\beta := [-\beta, \beta]^l \subset \mathbb{R}^l$*, которое является* C^r_ε*-близким к* $M_0 \times B_\beta$*.*

2) расширенная система (4) *имеет* C^r*-гладкое слабо инвариантное многообразие вида*

$$\mathbb{M} := \bigcup_{0 \leq \varepsilon \leq \alpha} \mathfrak{M}_\varepsilon \times \{\varepsilon\} \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R},$$

причем исходное многообразие $M_0 = \mathbb{M} \cap \{\varepsilon = 0\} \cap \{y = 0\}$.

Локальная теорема была опубликована в [2]. Аналогичный результат верен и в случае гиперболического инвариантного многообразия, см. теорему 3.6.

Благодарности. Автор диссертации благодарит своего научного руководителя профессора Юлия Сергеевича Ильяшенко за постановку задач и постоянную поддержку. Также автор благодарна коллективам кафедр ‘Дифференциальные уравнения’ и ‘Динамические системы’ механико-математического факультета МГУ за внимание к исследованиям. У автора была возможность следовать советам Д. В. Аносова, начинавшего много лет назад свою карьеру с сингулярных возмущений. Автор диссертации признательна участникам семинара ‘Equations différentielles’ (Дижон, Франция) и особенно его руководителю R. Roussarie за гостеприимство во время научной стажировки в 2004 году.

Публикации автора по теме диссертации

[1] Аносова О. Д. Инвариантные многообразия в сингулярно возмущенных системах, Труды математического института им. В. А. Стеклова, т. 236 (2002), с. 27-32.

[2] Аносова О. Д. Инвариантные многообразия и динамические бифуркации, Успехи математических наук, т. 60 (2005), вып. 1, с. 157–158.

[3] Anosova O. On invariant manifolds in singularly perturbed systems, J. Dynamical and Control Systems, v. 5 (1999), no. 4, p. 501-507.