МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 517.956.35

Рудаков Игорь Алексеевич

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Специальность 01.01.02 – дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва 2008

Работа выполнена на кафедре математики и моделирования экономических систем Брянского государственного университета имени И.Г. Петровского

Научный консультант: доктор физико-математических наук, профессор В.А. Кондратьев.

Официальные оппоненты: член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор С.И. Похожаев, доктор физико-математических наук, профессор В.А. Треногин; доктор физико-математических наук, профессор Ю.А. Алхутов.

Ведущая организация: Московский энергетический институт.

Защита диссертации состоится 28 ноября 2008 г. в 16 ч. 40 мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.85 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 24 октября 2008 г.

Ученый секретарь диссертационного совета Д.501.001.85 при МГУ, доктор физико-математических наук, профессор И.Н. Сергеев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Во многих физических задачах, связанных с процессами колебаний, возникают квазилинейные уравнения гиперболического типа. В диссертации рассматриваются уравнения, описывающие процессы колебаний струны, продольные или поперечные колебания стержня, распространение волн в неизотропной среде (сейсмические волны), распространение электромагнитных волн, процессы колебаний мембраны, плоской пластины, идеального газа в некотором объеме. Если внешняя сила, нелинейное слагаемое и коэффициенты периодичны по времени, то естественным образом возникает задача о доказательстве существования периодических по времени решений.

Проблема существования периодических по времени решений нелинейных уравнений, начиная с классических трудов Пуанкаре, является одной из весьма значимых и актуальных. В последние годы интерес к этой проблеме значительно возрос в связи с разработкой новых методов, которые позволили получить приложения, в частности к тем классам уравнений, которые рассматриваются в диссертации. К ним относятся такие, например, методы, как различные варианты “леммы горного перевала” А.Амбросетти, П. Рабиновича[1], метод расслоения С.И. Похожаева[2], методы Н.Брезиса и Л.Ниренберга, основанные на теории степени отображения[3].

Работы 60-х годов прошлого века авторов O. Veivoda[4], H. Lovicarova[5], P. Rabinowitz[6] являются одними из первых, в которых исследуется задача о существовании периодического по времени решения достаточно малой амплитуды слабо нелинейного волнового уравнения

---

[1] L.Nirenberg. Variational and topological methods in nonlinear problems. Bull. Amer. Math. Soc.(N.S.). 1981, V 4, № 3, P. 267-302.

[2] С.И.Похожаев. О методе расслоения решения нелинейных краевых задач. Тр. Матем. Ин-та АН СССР. 1990, Т. 192, С. 146-163.

[3] H.Brezis, L.Nirenberg. Characteriations of the ranges of some nonlinear operators and applications to boundary value problems. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 1978, V. 5, No 2, P. 225-325.

[4] O.Vejvoda. Periodic solutions of a linear and weakly nonlinear wave equations in one dimension. Czech. Math. J, 1964, V. 4, P. 341-382.

[5] H.Lovicarova. Periodic solutions of a weakly nonlinear wave equations in one dimension. Czechoslovak Math. J., 1969, V. 19(94), P. 324-342.

[6] P.Rabinowitz. Periodic Solutions of Nonlinear Hyperbolic Partial Differential Equations. Comm. Pure Aple. Math. 1967, V. 20, P. 145-205.

$$u_{tt} - u_{xx} = \varepsilon g(x, t, u_x, u_t)$$

с нулевыми граничными условиями Дирихле. В 70-80-х годах в работах Х. Брезиса, Л. Ниренберга [3,7], П. Рабиновича[8], П.И. Плотникова[9], К. Танаки[10], Е. Файрайсла[11] получены не локальные теоремы существования периодических решений квазилинейного волнового уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} + g(u) = f(x, t) \qquad (1)$$

с нулевыми граничными условиями Дирихле $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$. В работе [7] доказано существование периодического решения при любой правой части f, если нелинейное слагаемое g непрерывно и

$$|\lambda_0| + \varepsilon \le \frac{g(u)}{u} \le |\lambda_{-1}| - \varepsilon \quad \text{при} \quad |u| \ge C, \qquad (2)$$

где $\varepsilon > 0, C > 0, \lambda_{-1} = -3$ есть наибольшее отрицательное собственное значение оператора Даламбера $\Box$, действующего на гладких 2π-периодических по t функциях, удовлетворяющих нулевым граничным условиям по x, $\lambda_0 = 0$ есть собственное значение $\Box$ бесконечной кратности. Неравенства (2) являются условием отделимости графика функции $y = g(u)$ при больших значениях $|u|$ от прямых $y = |\lambda_0| u$ и $y = |\lambda_{-1}| u$. Если оно не выполнено, то есть примеры, когда уравнение (1) не имеет решения. Для произвольных отрицательных соседних собственных значений оператора Даламбера аналогичный результат получен в [3] лишь для частного случая асимптотически линейных функций $g(u)$ в том смысле, что существует $\lim\limits_{u \to \infty} \frac{-g(u)}{u} = \lambda$ и λ не является собственным значением оператора Даламбера. В диссертации существование

---

7 H.Brezis, L.Nirenberg. Forced vibration for a nonlinear wave equations. Comm. Pure Aple. Math., 1978, V. 31, № 1, P. 1-30.

8 P.Rabinowitz. Large amplitude time periodic solutions of a semilinear wave equations. Comm. Pure Aple. Math., 1984, V. 37, P. 189-206.

9 П.И.Плотников. Существование счетного множества периодических решений задачи о вынужденных колебаниях для слабо нелинейного волнового уравнения. Мат. Сб., 1988, Т. 136(178), № 4(8), С. 546-560.

10 K. Tanaka. Infinitely many periodic solutions for the equations: $u_{tt} - u_{xx} \pm |u|^{s-1} u = f(x,t)$. Comm. in part. diff. equations, 1985, V 10, № 11.

11 E.Feireisl. On the existence of periodic solutions of a semilinear wave equation with a superlinear forcing term. Chechosl. Math. J., 1988, V 38, № 1, P. 78-87.

периодических решений доказано, если выполнено условие вида (2) с произвольными отрицательными соседними собственными значениями волнового оператора.

В работах[7,3] исследован также резонансный случай, когда $\lim\limits_{u\to\infty}\dfrac{-g(u)}{u}$ (либо верхний или нижний предел) равен собственному значению □. В работах[8,11] доказано существование счетного числа периодических решений уравнения (1) в автономном случае, когда нелинейное слагаемое имеет степенной рост. В [9,10] получено счетное число решений уравнения (1) в неавтономном случае, если нелинейное слагаемое имеет степенной рост и однородное. При этом в работе П.И. Плотникова [9] нет ограничений на показатель степени. В работе Х. Брезиса[12] рассматривается задача о свободных колебаниях струны

$$u_{tt}-u_{xx}+g(u)=0,$$

закрепленной в точках $0,\pi$. Функция $g(u)$ непрерывна, не убывает и $g(0)=0$. При предположении выполнения условия (2) и $g'(0)>|\lambda_{-1}|$ доказано существование нетривиального решения. Из приведенных выше условий вытекает, что график функции $y=-g(u)$ пересекает линию $y=\lambda_{-1}u$. Не трудно доказать, что если при $u\neq 0$ график функции $y=-g(u)$ отделен от линий $y=\lambda_n u$, то имеется только тривиальное решение $y\equiv 0$. Здесь λ_n $(n\in Z)$ есть пронумерованные собственные значения оператора Даламбера. В работе J.M. Coron[13] с помощью специальных инвариантных подпространств удалось избавиться от условия монотонности. В диссертации существование свободных колебаний доказано без предположения монотонности $g(u)$ при произвольных соседних собственных значениях □, что позволило доказать существование нетривиальных, периодических решений уравнения sin-Гордон на отрезке с граничными условиями 3-го рода и Дирихле.

---

[12] H.Brezis. Periodic solutions of nonlinear vibrating string and duality principles. Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.), 1983, V. 8, № 3, P. 409-426.

[13] J.M. Coron. Periodic solutions of a nonlinear wave equations without assumption of monotonicity. Math. Ann, 1983, V. 262, № 2, P. 273-285.

Статья V. Barby, N.H. Pavel[14], опубликованная в 1997 г., является одной из первых, в которой рассмотрена задача о периодических решениях волнового уравнения с переменными коэффициентами и однородными граничными условиями Дирихле. Нелинейное слагаемое $g(u)$ непрерывно, не убывает, удовлетворяет условию (2) и глобальному условию Липшица с константой $\alpha < |\lambda_{-1}|$. При выполнении данных условий доказано существование периодического по времени решения. В диссертации аналогичный результат получен без условия Липшица, для произвольных соседних собственных значений волнового оператора с однородными условиями Дирихле и третьего рода.

Начиная с 1991 года в работах И.А. Кузина[15], J. Mawhin, J. Berkovits и A.K. Ben-Naoum[16,17,18] исследуется задача о периодических решениях многомерного квазилинейного волнового уравнения в шаре. В работе И.А. Кузина[15] доказано существование счетного числа радиально симметричных решений, когда нелинейное слагаемое имеет степенной рост. В работах[16,17,18] для случая четных размерностей доказано существование радиально симметричных $2\pi-$периодических по времени решений, если нелинейное слагаемое удовлетворяет условию “нерезонансности”. В случае нечетных размерностей периодическое решение получено, если правая часть лежит в подпространстве бесконечной коразмерности. В диссертации доказано существование периодических решений при любой периодической правой части для нечетных размерностей и произвольном периоде времени, соизмеримым с радиусом шара, когда нелинейное слагаемое удовлетворяет условию “нерезонансности”.

Цель работы. Целью работы является систематическое изучение вопросов разрешимости задачи о периодических по времени решениях гиперболических уравнений с различными типами нелинейных слагаемых (имеющих степенной рост, либо удовлетворяющих условию нерезонансности), с различными граничными условиями, с переменными и постоянными коэффициентами, в частности доказательство существования периодических решений волнового уравнения при любой правой части, когда нелинейное слагаемое удовлетворяет

---

[14] V.Barby, N.H.Pavel. Periodic solutions to nonlinear one dimensional wave equation with x - dependent coefficients. Trans. Amer. Math. Soc., 1997, V. 349, № 5, P. 2035-2048.

[15] И.А.Кузин. Существование счетного множества периодических сферически симметричных решений нелинейного волнового уравнения. Известия РАН. Серия математическая. 1991, Т. 5. N1. С.110-133.

[16] A.K.Ben-Naoum, J.Mawhin . Periodic solutions of some semilinear wave equatons on balls and on spheres. Top. Meth. Nonl.Analysis, 1993, V 1, № 1, P. 113-137.

[17] A.K. Ben-Naoum,J. Berkovits. On the existence of periodic solutions for semilinear wave equation on a ball in R^n with the space dimension n odd. Nonlinear Anal. TMA, 1995, V 24, № 2, P. 241-250.

[18] J. Berkovits, J. Mawhin. Diophantine approximation. Bessel functions and radially symmetric periodic solutions of semilinear wave equatons in a ball. Trans. Amer. Math. Soc., 2001, V. 353, № 12, P. 5041-5055.

условию “нерезонансности” с произвольными соседними собственными значениями оператора Даламбера; доказательство счетной разрешимости задачи о периодических решениях волнового уравнения с переменными коэффициентами и различными граничными условиями, когда нелинейное слагаемое имеет степенной рост; получение условий существования свободных периодических колебаний в нерезонансном случае; доказательство существования периодических решений уравнения sin-Гордон на отрезке с граничными условиями 3-го рода и Дирихле.

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Доказано существование периодических решений волнового уравнения с однородными граничными условиями Дирихле в нерезонансном случае для произвольных соседних собственных значений.

2. Доказана разрешимость задачи о периодических решениях волнового уравнения с граничными условиями Неймана и 3-го рода. Исследован вопрос о единственности решения.

3. Доказаны теоремы о существовании периодических решений квазилинейного волнового уравнения с переменными коэффициентами.

4. Доказано существование периодических решений многомерного волнового уравнения в шаре с нулевыми граничными условиями Дирихле в нерезонансном случае для нечетных размерностей и для четных размерностей с произвольным периодом, соизмеримым с радиусом шара.

5. Доказано существование счетного числа периодических решений автономного волнового уравнения с граничными условиями 3-го рода и с переменными коэффициентами с нелинейным слагаемым, имеющим степенной рост. Доказано существование периодического решения неавтономного волнового уравнения с переменными коэффициентами в резонансном случае.

6. Доказано существование нетривиального периодического решения для волнового уравнения с немонотонной нелинейностью, а также для уравнения колебаний плоской пластины и балки. Доказано существование нетривиального

периодического по времени решения уравнения sin-Гордон на отрезке с однородными граничными условиями Дирихле и 3-го рода.

Методы исследования. В диссертации используются методы компактности, малого параметра, конструкция Ляпунова-Шмидта, теория монотонных операторов, топологические методы (теория степени отображения), вариационный метод.

Для исследования случая произвольных соседних собственных значений разработаны методы доказательства существования решений нелинейных уравнений в гильбертовом пространстве (теоремы 1.2, 1.3 главы 1), когда линейная часть уравнения имеет бесконечное ядро и когда обратный к линейной части оператор на дополнении к ядру не является вполне непрерывным. Эти методы применяются в главе 1 при исследовании волнового уравнения с постоянными и переменными коэффициентами, с различными граничными условиями, а также при исследовании радиально симметричных решений многомерного волнового уравнения.

Для доказательства основных результатов главы 2 выведены асимптотические оценки собственных значений оператора Даламбера, с помощью которых удалось получить специальное разложение пространства L_2 в сумму трех ортогональных подпространств. Это позволило, опираясь на леммы Файрайсла[11], доказать счетную разрешимость волнового уравнения с переменными коэффициентами и граничными условиями 3-го рода со степенной нелинейностью.

Результаты главы 3 опираются на лемму “горного перевала” А.Амбросетти, П.Рабиновича[1]. Для ее применения разработан метод построения “зацепляющихся” поверхностей, с помощью которых находятся критические точки соответствующего функционала.

Теоретическая и практическая ценность. Предлагаемая работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут найти применение в теории нелинейных уравнений в частных производных. Разработанные методы могут быть использованы при доказательстве разрешимости квазилинейных уравнений математической физики[19]. Разделы диссертации могут составить содержание специальных курсов для студентов и аспирантов, обучающихся по специальности математика.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались автором на следующих научных конференциях:

- International Petrovskii Conference “Differential Equations and Related Topics”. Moscow M.V. Lomonosov State University, 1985, 1986, 1991, 2001, 2004, 2007.
- Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, Суздаль, июнь 2008.
- Международная конференция “Тихонов и современная математика”, посвященная 100-летию академика А.Н.Тихонова, Москва, МГУ им. М.В.Ломоносова, факультет ВМиК, 2006.
- Международная конференция, посвященная 85-летию члена-корреспондента РАН Л.Д.Кудрявцева, Москва, РУДН, март 2008.
- Всероссийская конференция “Дифференциальные уравнения и их приложения”, посвященная 70-летию проф. В.А.Кондратьева, Самара, 2005.
- Воронежская весенняя математическая школа “Понтрягинские чтения”. Воронеж. 2000, 2003.
- Воронежская зимняя математическая школа “Современные методы теории краевых задач”. Воронеж. 2000, 2003.
- Международный симпозиум “Математическое моделирование в естественных и гуманитарных науках”, посвященный 80-летию М.А. Красносельского. Воронеж. 2000.

Тезисы докладов опубликованы в сборниках тезисов соответствующих конференций.

Результаты диссертации докладывались и обсуждались на заседаниях следующих научных семинаров:

---

[19] J. Shuguan. Time periodic solutions to a nonlinear wave equation with x-dependent coefficients. Calc. Var., 2008, N 32, P. 137-153

●МГУ им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет: семинар под руководством проф. В.М. Миллионщикова, проф. В.А Кондратьева, проф. Н.Х. Розова (март 2007 г.).

● МГУ им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет: семинар под руководством проф. А.А. Шкаликова, проф. А.Г. Костюченко (февраль 2008 г.).

● МГУ им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет: семинар под руководством проф. А.С. Шамаева, проф. В.В. Жикова, проф. Т.А.Шапошниковой (ноябрь 2007 г.).

● МГУ им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет: семинар под руководством проф. В.А Кондратьева и проф. Е.В.Радкевича (март 2004 г., февраль 2007 г.).

● МГУ им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет: семинар под рук. проф. М.И. Вишика (1981 г, 1982 г. 1983 г., 1984 г., 1991 г.).

● МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМиК: семинар под руководством член-корр. РАН И.А. Шишмарева (март 2007 г.);

●МИ РАН им. В.А.Стеклова: семинар под руководством проф. А.К. Гущина, проф. В.П. Михайлова (март 2007 г.).

●Санкт-Петербургское отделение МИ РАН им. В.А.Стеклова: семинар под руководством проф. Н.Н. Уральцевой, проф. В.М. Бабича, проф. А.И. Назарова (апрель 2007 г.);

●МЭИ: семинар под руководством член-корр. РАН С.И. Похожаева и проф. Ю.А. Дубинского (1984 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 20 работах автора (16 из них опубликованы в изданиях, рекомендованных ВАК), список которых приводится в конце автореферата. Работ, выполненных в соавторстве, нет.

Структура диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, разбитых в общей сложности на 15 параграфов, списка литературы. Общий объем диссертации составляет 223 страницы, библиография содержит 135 наименований. Нумерация теорем, лемм, формул – двойная: номер параграфа и собственный номер, в каждой главе независимая. Во введении – независимая нумерация формул, а номера теорем совпадают с их номерами в основном тексте.

ОБЗОР СОДЕРЖАНИЯ ДИССЕРТАЦИИ

Глава 1. Квазилинейные уравнения с нелинейным слагаемым, удовлетворяющим условию нерезонансности.

В §1 доказаны теоремы о существовании решений нелинейных уравнений в сепарабельном действительном гильбертовом пространстве H, составляющие основной аппарат при доказательстве результатов главы 1. Рассматривается уравнение

$$Au + B(u) = f, \quad u \in H. \tag{1}$$

Здесь $A : H \to H$ есть линейный, самосопряжённый оператор с всюду плотной в H областью определения. Оператор $B : H \to H$ является нелинейным.

В приложениях A является дифференциальным оператором. При различных граничных условиях и коэффициентах могут представиться следующие случаи:

1) $\dim\ker A < \infty$; оператор $A^{-1} : R(A) \to R(A)$ является вполне непрерывным;

2) $\dim\ker A = \infty$; $A^{-1} : R(A) \to R(A)$ вполне непрерывен;

3) $\dim\ker A < \infty$; $A^{-1} : R(A) \to R(A)$ не является вполне непрерывным.

В автореферате приведем некоторые теоремы, относящиеся к более сложным случаям 2), 3). Обозначим $(,)$ и $\|\cdot\|$ соответственно скалярное произведение и норму в H и для любого подмножества $M \subset H$ обозначим $\overline{M}$ и $L(M)$ соответственно замыкание M по норме H и множество конечных линейных комбинаций элементов M.

Пусть существует полная ортонормированная в H система $\Lambda = \{e_1, e_2, ..., e_n, ...\}$ собственных векторов оператора A и пусть $\{\lambda_n\}$ последовательность соответствующих собственных значений такая, что $Ae_n = \lambda_n e_n, \quad n \in \mathbf{N}$. Будем говорить, что оператор A, удовлетворяющий этим условиям, обладает свойством I.

Свойство II. Пусть $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \Lambda_3$, подмножества $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ попарно не пересекаются и

1) $\overline{L(\Lambda_1)} = \ker A$ при $\Lambda_1 \neq \emptyset$;

2) существуют положительные константы a, b такие, что

$$a||u||^2 \leq (Au, u) \leq b||u||^2 \quad \forall u \in N_2 \equiv \overline{L(\Lambda_2)};$$

3) на подпространстве $N_3 = \overline{L(\Lambda_3)}$ оператор $A^{-1} : N_3 \to N_3$ является вполне непрерывным.

Будем говорить, что для оператора A выполнено *свойство III*, если A удовлетворяет свойству I, $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_3, \quad \Lambda_1 \cap \Lambda_3 = \emptyset$ и выполнены условия 1),3) свойства II. Обозначим $\sigma(A) = \{\lambda_n | n \in \mathbf{N}\}$. Во всех приложениях, за исключением эллиптического случая, $\sigma(A)$ является не ограниченным ни снизу ни сверху множеством.

Теорема 1.2. *Предположим, оператор $A : H \to H$ обладает свойствами I, III . Пусть $B : H \to H$ является деминепрерывным монотонным оператором, для которого существуют константы $C, \gamma \in (0, +\infty)$ и $\lambda \in \mathbf{R}$ такие, что*

$$(B(u) - \lambda u, u) \geq \frac{1}{\gamma}||B(u) - \lambda u||^2 - C \qquad \forall u \in H, \tag{2}$$

где

$$\lambda \in (\underline{\lambda}, \overline{\lambda}); \quad \gamma \in (0, \overline{\lambda} - \lambda); \quad \underline{\lambda} \geq 0;$$

$$-\overline{\lambda}, -\underline{\lambda} \in \sigma(A); \quad (-\overline{\lambda}, -\underline{\lambda}) \cap \sigma(A) = \emptyset. \tag{3}$$

Тогда для любого $f \in H$ уравнение (1) имеет решение в H.

Теорема 1.3. *Пусть для оператора $A : H \to H$ выполнены свойства I, II. Предположим $B : H \to H$ есть деминепрерывный оператор, для которого выполнены условия (2), (3). Если $B(u) + au$ является монотонным оператором, то для любого $f \in H$ уравнение (1) имеет решение в H.*

При доказательстве теорем 1.2, 1.3 использованы конструкция Ляпунова-Шмидта, метод монотонных операторов, теория степени отображения, метод малого параметра, метод компактных операторов.

В §2 рассматривается задача о вынужденных периодических колебаниях закреплённой на концах струны:

$$u_{tt} - u_{xx} + g(u) = f(x,t), \quad 0 < x < \pi, t \in \mathbf{R}; \tag{4}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \qquad t \in \mathbf{R}; \tag{5}$$

$$u(x,t+2\pi) = u(x,t), \quad 0 < x < \pi, t \in \mathbf{R}. \tag{6}$$

Здесь f есть заданная 2π-периодическая по t функция. Для данной задачи оператор A представляет собой самосопряжённое расширение оператора Даламбера $\Box$, действующего на гладких 2π-периодических по t функциях, удовлетворяющих (5) ($A = \Box^*$). Ниже буквой A будем обозначать самосопряжённое расширение соответствующего дифференциального оператора и $\sigma(A)$-множество собственных значений A.

Заметим, что оператор A в задаче (4)-(6) соответствует случаю 2) и его спектр $\sigma(A)$ состоит из всех нечетных целых чисел, кроме -1, и целых чисел, делящихся на 4, кроме -4. Занумеруем $\sigma(A)$ в порядке возрастания: $\sigma(A) = \{\lambda_n |\ n \in \mathbf{Z}\}$ так, что $\lambda_0 = 0$. Обозначим $\Omega = [0,\pi]\times[0,2\pi]$. Основным результатом §2 является следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть функция $g(u)$ непрерывна, не убывает и существуют действительные числа $C, \varepsilon \in (0,+\infty)$ и $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ такие, что*

$$|\lambda_{-n}| + \varepsilon \leq \frac{g(u)}{u} \leq |\lambda_{-n-1}| - \varepsilon \quad \forall u \in (-\infty,-C] \cup [C,+\infty). \tag{7}$$

Тогда для любой $2\pi-$ периодической по времени функции $f \in L_2(\Omega)$, задача $(4)-(6)$ имеет обобщенное решение $u \in L_2(\Omega)$. Если дополнительно вышеприведенным условиям $g(u)$ строго возрастает, $g \in C^\infty(\mathbf{R})$ и $f \in C^\infty(\Omega)$, то решение $u \in C^\infty(\Omega)$.

Обобщенное решение определяется стандартно с помощью интегрального тождества. Условие (7) называется условием нерезонансности. Из него следует, что при $|u| \geq C$ график функции $y = g(u)$ не пересекает прямых вида $y = |\lambda_{-k}|u, k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. В ранних работах[1,3] данный результат был получен для случая $n = 0$, то есть при выполнении условия (2).

Если условие нерезонансности не выполнено, например, когда $g(u) = |\lambda_{-k}|u$, или когда график функции $y = g(u)$ при сколь угодно больших $|u|$ пересекает прямую $y = |\lambda_{-k}|u$, то задача (4)-(6) может не иметь решения. В §2 приведены соответствующие примеры. Полученное в теореме 2.1 решение, вообще говоря, не единственно. Это доказано в §2 главы 3, где помимо нулевого решения при $g(0) = 0$ доказано существование нетривиального решения. В §2 главы 1 приведены достаточные условия, при которых решение задачи (4)-(6) единственное. Кроме этого в §2 приведены обобщения теоремы 2.1 на случай произвольного периода T, соизмеримиого с длиной струны.

В §3 исследуется квазилинейное волновое уравнение с граничными условиями Неймана и Дирихле:

$$u_{tt} - u_{xx} = g(u) + f(x,t), \quad 0 < x < \pi, t \in \mathbf{R}; \tag{8}$$

$$u'(0,t) = u(\pi,t) = 0, \qquad t \in \mathbf{R}. \tag{9}$$

Сначала изучается случай, когда правая часть $f(x,t)$ имеет период $T = 2\pi$ по времени. Соответствующий этой задаче линейный оператор A относится к случаю 1). Важные свойства оператора A доказаны в теореме 3.1.

Теорема 3.1. *Для любого $k \in \mathbf{N} \cup \{\mathbf{0}\}$ и любой функции $f \in H_k$ такой, что $\bar{f} \in \overline{H}_k$, имеют место включения*

$$A^{-1}f \in H_{k+1} \cap C(\Omega), \ \overline{A^{-1}f} \in \overline{H}_{k+1} \cap C(\Omega_1)$$

и существует константа C_k такая, что

$$||A^{-1}f||_{k+1} \leq C_k ||f||_k, \quad ||\overline{A^{-1}f}||_{\overline{H}_{k+1}} \leq C_k ||f||_k, \quad \forall\ f \in H_k.$$

Здесь $\Omega_1 = [-\pi,\pi] \times [0,2\pi]$, $H_k = W_2^k(\Omega)$, $\overline{H}_k = W_2^k(\Omega_1)$ - пространства Соболева, $\overline{f}$ -есть чётным образом продолженная по x функция f на Ω_1.

Пусть функция $g(u)$ удовлетворяет условию

$$\alpha \leq \frac{g(u)}{u} \leq \beta \quad \forall u \in (-\infty, -C] \cup [C, +\infty) \tag{10}$$

с некоторой положительной константой C. Основной результат для нелинейного уравнения доказан в теореме 3.2. При этом на функцию g не накладывается условие монотонности.

Теорема 3.2. *Пусть функция g непрерывна на $\mathbf{R}$ и удовлетворяет (10), где $[\alpha,\beta]\cap\sigma(A)=\emptyset$. Тогда для любой $2\pi-$периодической по времени функции $f\in L_2(\Omega)$ задача (8), (9), (6) имеет обобщённое решение $u\in H_1\cap C(\Omega)$. Если дополнительно $g\in C^k(\mathbf{R})$ и $\overline{f}\in\overline{H}_k$, где $k\in\mathbf{N}$, то $\overline{u}\in\overline{H}_{k+1}$. Если $\overline{f}\in\overline{H}_3$, $g\in C^3(\mathbf{R})$, то обобщённое решение является классическим.*

Точно такой же результат получен для граничного условия $u(0,t)=u'(\pi,t)=0$. В заключительной части §3 рассматривается случай произвольного периода времени, соизмеримого с длиной струны:

$$T=2\pi\frac{b}{a},\quad a,b\in\mathbf{N},\quad (a,b)=1. \tag{11}$$

Условие (6) перепишем следующим образом:

$$u(x,t+T)=u(x,t)\quad 0<x<\pi, t\in\mathbf{R}. \tag{12}$$

Для нечётных значений b полученный результат полностью совпадает с теоремой 3.2. Если b является чётным числом, то соответствующий оператор Даламбера A относится к случаю 2) и для нелинейной задачи доказана теорема 3.4.

Теорема 3.4. *Пусть выполнено условие (11), b является чётным натуральным числом, функция $g(u)$ непрерывна, не убывает и удовлетворяет (10), где*

$$\alpha,\beta\in(0,+\infty),\ [-\beta,-\alpha]\cap\sigma(A)=\emptyset. \tag{13}$$

Тогда для любой $T-$ периодической функции $f\in L_2(\Omega)$ задача (4), (9), (12) имеет обобщённое $T-$ периодическое решение $u\in L_2(\Omega)$.

Здесь и даллее $\Omega=[0,\pi]\times[0,T]$. В §4 исследуется волновое уравнение (4) с граничными условиями 3-го рода:

$$u(0,t)-h_1u'_x(0,t)=0,\quad u(\pi,t)+h_2u'_x(\pi,t)=0,\quad t\in\mathbf{R}. \tag{14}$$

Ищется $T-$ периодическое решение, где для T выполнено условие (11). Первый пункт §4 посвящён исследованию спектра оператора A. Для этого исследуется ассимптотика собственных значений соответствующей задачи Штурма-Лиувилля, с помощью которой показано, что оператор A относится к случаю 3). Опираясь на теорему 1.3 в §4, доказана следующая теорема.

Теорема 4.1. *Пусть выполнено условие* (11), *функция* $g(u)$ *непрерывна и удовлетворяет* (10), (13). *Если функция* $g(u) + \eta_1 u$ *не убывает на* $\mathbf{R}$, *то для любой* $T-$ *периодической по* t *функции* $f \in L_2(\Omega)$ *задача* (4), (14), (12) *имеет обобщенное решение* $u \in L_2(\Omega)$.

Здесь η_1 есть положительная константа, связанная со спектром A, определенная в §4. Если в граничных условиях (14) либо $h_1 = 0$, либо $h_2 = 0$, то условие монотонности можно опустить. Рассматриваются следующие два типа граничных условий:

$$u(0,t) - hu'_x(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0, \quad t \in \mathbf{R}; \tag{15}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) + hu'_x(\pi,t) = 0, \quad t \in \mathbf{R}. \tag{16}$$

Теорема 4.2. *Пусть* b *является нечетным числом, функция* $g(u)$ *непрерывна и удовлетворяет* (10), *где* $[\alpha,\beta] \cap \sigma(A) = \emptyset$. *Тогда для любой* $T-$ *периодической функции* $f \in L_2(\Omega)$ *задачи* (8), (15), (12) *и* (8), (16), (12) *имеют обобщенное решение* $u \in C(\Omega)$.

В §5 первой главы рассматривается нелинейное волновое уравнение с непостоянными коэффициентами и с однородными граничными условиями Дирихле

$$p\,(x)\,u_{tt} - (p\,(x)\,u_x)_x + g(x,t,u) = f\,(x,t)\,, \qquad 0 < x < \pi,\;\; t \in\, R\,. \tag{17}$$

Заметим, что уравнение более общего вида

$$\rho(z)u_{tt} - (\mu(z)u_z)_z + h(z,t,u) = f(z,t)$$

приводится к виду (17) с помощью замены $x = \int\limits_0^z \left(\frac{\rho(s)}{\mu(s)}\right)^{\frac{1}{2}} ds$.

Коэффициент $p(x)$ в уравнении (17) удовлетворяет условиям из работы[13], обеспечивающих дискретность и положительность собственных значений соответствующей задачи Штурма-Лиувилля. Дифференциальный оператор A в уравнении (17) соответствует случаю 3). Обозначим α- модуль наибольшего отрицательного собственного значения A. В первой части §5 рассмотрено волновое уравнение с нелинейным слагаемым не зависещем от x, t:

$$p\,(x)\,u_{tt} - (p\,(x)\,u_x)_x + g(u) = f\,(x,t)\,, \qquad 0 < x < \pi,\;\; t \in\; R\,. \tag{18}$$

Теорема 5.1. *Пусть выполнено условие* (11), *функция* $g(u)$ *непрерывна, не убывает на* R *и*

$$\delta|u| - C \leq |g(u)| \leq \gamma|u| + C \quad \forall u \in \mathbf{R},$$

где $\delta, C \in (0, +\infty)$, $\gamma \in (0, \alpha)$. *Тогда для любой* $T-$ *периодической по* t *функции* $f \in L_2(\Omega)$ *задача* $(18), (5), (12)$ *имеет обобщенное решение* $u \in L_2(\Omega)$.

Заметим, что в работе[13] данный результат получен при более сильных условиях, когда функция $g(u)$ дополнительно удовлетворяет глобальному условию Липшица с константой $\gamma \in (0, \alpha)$.

В теореме 5.2 исследован не рассмотренный в ранних работах случай произвольных соседних собственных значений оператора A.

Теорема 5.2. *Пусть функция* g *непрерывна по всем переменным и*

$$\alpha \leq \frac{g(x,t,u)}{p(x)u} \leq \beta \quad \forall u \in (-\infty, -C] \cup [C, +\infty), \tag{19}$$

где для констант α, β *выполнено* (13) *и* $C > 0$. *Если функция* $g(u) + 2b_0 u$ *не убывает на* $\mathbf{R}$, *то для любой* T- *периодической по* t *функции* $f \in L_2(\Omega)$ *задача* $(17), (5), (12)$ *имеет обобщённое решение* $u \in L_2(\Omega)$.

Здесь b_0 есть положительная константа, связанная со спектром оператора A и определенная в §5.

В §6 рассматривается задача о периодических решениях уравнения колебаний ограниченной неоднородной струны с однородными граничными условиями 3-го рода:

$$p\,(x)\,u_{tt} - \left(p\,(x)\,u_x\right)_x \pm g(x,t,u) = f\,(x,t)\,, \quad 0 < x < \pi,\; t \in \mathbf{R}; \tag{20}$$

$$u\,(0,\,t) - h_1 u'_x(0,t) = 0; u\,(\pi,\,t) + h_2 u'_x(\pi,t) = 0, \quad t \in \mathbf{R}; \tag{21}$$

$$u\,(x,\,t+T) = u\,(x,\,t)\,, \quad 0 < x < \pi,\; t \in \mathbf{R}. \tag{22}$$

Здесь $h_1 \geq 0, \quad h_2 \geq 0, \quad h_1 + h_2 > 0$. Период времени T удовлетворяет (11). Коэффициент $p(x)$ удовлетворяет условиям из работы[13] и дополнительному условию на концах отрезка $[0,\pi]$. Для исследования спектра дифференциального оператора в начале §6 доказываются асимптотические оценки для собственных значений λ_n соответствующих задач Штурма-Лиувилля:

$$0 < c_0 < n\left(\lambda_n - \left(n - \frac{1}{2}\right)\right) < c_1 \quad \forall n \in \mathbf{N}; \tag{23}$$

$$0 < c_0 < n\left(\lambda_n - (n-1)\right) < c_1 \quad \forall n \in \mathbf{N}. \tag{24}$$

При этом оценка (23) имеет место, если $h_1 h_2 = 0$, а оценка (24)-при $h_1 > 0, h_2 > 0$.

Если $h_1 h_2 = 0$, то при нечётном b дифференциальный оператор A соответствует случаю 1) и для нелинейного слагаемого g не требуется условия монотонности по u.

Теорема 6.1. *Пусть либо $h_1 = 0$, либо $h_2 = 0$, функция g непрерывна по всем переменным и выполнены условия* (11), (19), *где $[\alpha,\beta] \cap \sigma(A) = \emptyset$. Тогда, если b является нечётным числом, то для любой T- периодической по t функции $f \in L_2(\Omega)$ задача* (20) – (22) *с "-" имеет обобщённое решение $u \in C(\Omega)$.*

Если $h_1 > 0$, $h_2 > 0$, или $h_1 h_2 = 0$ и b-чётное число, то оператор A соответствует случаю 3). С помощью оценок (23), (24) произведено исследование спектра оператора A и доказано существование инвариантных подпространств $N_2, N_3 \subset L_2(\Omega)$ таких, что оператор $A^{-1} : N_3 \to N_3$ вполне непрерывен и $\eta_1||u||^2 \le (Au,u) \le \eta_2||u||^2 \ \ \forall u \in N_2$, где $\eta_1 > 0$. Опираясь на теорему 1.3, в §6 доказаны теоремы 6.2, 6.3.

Теорема 6.2. *Пусть $h_1 > 0, h_2 > 0$ и выполнены условия (11),(19), (13). Предположим дополнительно, что $g_u(x,t,u)$ непрерывна в $\Omega \times \mathbf{R}$ и*

$$g_u(x,t,u) \ge -\eta_1 p(x) \quad \forall (x,t,u) \in \Omega \times \mathbf{R}. \tag{25}$$

Тогда для любой $T-$ периодической по t функции $f \in L_2(\Omega)$ задача (20) – (22) с "$+$" имеет обобщенное решение $u \in L_2(\Omega)$.

Теорема 6.3. *Пусть либо $h_1 = 0$, либо $h_2 = 0$, b является чётным числом и выполнены условия $(11),(19),(13)$. Предположим также, что $g_u(x,t,u)$ непрерывна в $\Omega \times \mathbf{R}$ и выполнено условие (25). Тогда для любой $T-$ периодической по t функции $f \in L_2(\Omega)$ задача $(20)-(22)$ с "$+$" имеет обобщённое решение $u \in L_2(\Omega)$.*

В заключительной части §6 рассмотрен случай наибольшего отрицательного собственного значения η оператора A. Теорема 6.4 является аналогом теоремы 5.1 для граничных условий (21).

В случае, когда $h_1 \cdot h_2 = 0$ и b является нечётным числом, условие монотонности функции g можно опустить.

Теорема 6.5. *Пусть $h_1 \cdot h_2 = 0$, b-нечётное число и выполнено условие (11). Предположим, что функция $g(u)$ непрерывна и существуют константы $\varepsilon > 0, C > 0$ такие, что*

$$\varepsilon \le \frac{g(u)}{u} \le |\eta| - \varepsilon \quad \forall u \in (-\infty, -C] \cup [C, +\infty).$$

Тогда для любой $T-$ периодической по t функции $f \in L_2(\Omega)$ задача $(18),(21),(22)$ имеет обобщенное решение $u \in C(\Omega)$.

В параграфе 7 рассматривается многомерное квазилинейное волновое уравнение в шаре:

$$u_{tt} - \Delta u = g\left(u\right) + f\left(|x|, t\right), \qquad (x,\ t) \in B_a \times \mathbf{R}; \tag{26}$$

$$u\,(x,\,t) = 0 \quad \forall\ (x,\ t) \in S_a \times \mathbf{R}; \tag{27}$$

$$u\,(x,\,t+T) = u\,(x,\ t) \quad \forall\ (x,\ t) \in B_a \times \mathbf{R}\,. \tag{28}$$

Здесь $a > 0,\ B_a = \{x \in \mathbf{R}^n \mid |x| < a\}\,, \quad S_a = \{x \in \mathbf{R}^n \,||x| = a\}\,,$

$$x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R^n}, \quad |x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, \quad \Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

Период времени T соизмерим с радиусом шара a. Для определенности положим

$$a = \frac{\pi}{2}, \quad T = 2\pi \frac{b}{c}, \qquad b, c \in \mathbf{N},\ \ (b, c) = 1. \tag{29}$$

Одна из трудностей, возникающих при изучении многомерного волнового уравнения, состоит в том, что линейная часть уравнения может иметь ненулевые собственные значения бесконечной кратности. Этого можно избежать, если рассматривать радиально симметричные решения. Обозначим H множество $T-$периодических по t радиально симметричных функций из $L_2(B_a \times [0, T])$. Обозначим также $\Lambda_+ = \sigma(A) \cap (0, +\infty)$, где $\sigma(A)$ есть множество собственных значений многомерного волнового оператора, действующего на радиально симметричных функциях, удовлетворяющих условиям (27), (28). Множество $\sigma(A)$ исследовано в §7. При исследовании волнового оператора A в §7 доказано, что если $n \geq 4$ и либо b-чётное число, либо $n \equiv 3(mod 4)$, либо $n \equiv 1(mod 4)$ и c- нечетное число, то оператор A соответствует случаю 3). Для этого случая получена теорема 7.1.

Теорема 7.1. *Пусть $n \geq 4$ и либо b является чётным числом, либо $n \equiv 3(mod 4)$, либо $n \equiv 1(mod 4)$ и c- нечетное число. Предположим, что выполнены условия* (10), (29), *где $\alpha > 0, C > 0$ и $[\alpha,\, \beta] \cap \Lambda_+ = \emptyset$. Если функция $g(u) + \gamma_0^n u$ непрерывна и не убывает, то для любой T-периодической по времени функции $f \in H$ задача* (26) – (28) *имеет обобщенное решение $u \in H$.*

Здесь γ_0^n есть положительная константа, связанная с оператором A и определенная в §7.

Если $n \geq 4$, b нечетное и либо n- четное число, либо $n \equiv 1(mod4)$ и c- четное число, то оператор A соответствует случаю 1) и условие монотонности для функции $g(u) + \gamma_0^n u$ можно опустить.

Теорема 7.2. *Пусть $n \geq 4$, b- нечетное число и либо n- четное число, либо $n \equiv 1(mod4)$ и c-четное число. Пусть функция $g(u)$ непрерывна и удовлетворяет (10), где $[\alpha, \beta] \cap \sigma(A) = \emptyset$, $C > 0$. Тогда для любой T - периодической функции $f \in H$ задача $(26)-(28)$ имеет обобщенное решение $u \in H$.*

Таким образом, в теоремах 7.1, 7.2 получены достаточные условия существования периодических решений в неисследованных ранее случаях нечетных размерностях при произвольных периодах времени, соизмеримых с радиусом шара. Случай $n = 2$ рассмотрен отдельно. Это связано с особенностями спектра волнового оператора на плоскости. Теоремы 7.3, 7.4, являются аналогами теорем 7.1,7.2 для случая $n = 2$. В трехмерном случае спектр волнового оператора обладает свойствами одномерного оператора Даламбера и оператор A соответствует случаю 2). Существование периодического решения волнового уравнения для случая $n = 3$ доказано в теореме 7.5, которая является аналогом теоремы 2.1.

Публикации автора по теме главы 1: [1], [2], [5], [6], [8], [9], [14]- [19].

Глава 2. Периодические решения волнового уравнения с нелинейным слагаемым, имеющим степенной рост.

Вторая глава диссертации посвящена исследованию волнового уравнения с нелинейным слагаемым, имеющим степенной рост. В первом параграфе второй главы рассматривается волновое уравнение с граничными условиями 3-го рода и Дирихле:

$$u_{tt} - u_{xx} + g(x,t,u) = 0, \quad 0 < x < \pi,\ t \in \mathbf{R}; \tag{30}$$

$$u(0,t) - h\,u'_x(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t \in \mathbf{R}; \tag{31}$$

$$u(x,t+T) = u(x,t), \quad 0 < x < \pi,\ t \in \mathbf{R}. \tag{32}$$

Здесь $h > 0$, функция $g(x, t, u)$ удовлетворяет условию:

$$A_3|u|^{p-1} - A_4 \leq |g(x, t, u)| \leq A_1|u|^{p-1} + A_2 \qquad \forall (x, t, u) \in [0, \pi] \times \mathbf{R}^2, \quad (33)$$

где $p > 2$, а A_1, A_2, A_3, A_4 есть положительные константы такие, что

$$\frac{A_3}{2} > \frac{A_1}{p} + \delta. \quad (34)$$

Основным результатом §1 является доказательство теоремы 1.1.

Теорема 1.1. *Пусть функция g непрерывна на* $[0, \pi] \times \mathbf{R}^2, T-$ *периодична по* t*, не убывает по* u *и выполнены условия* $(11), (33),\ (34)$*. Предположим также, что выполнено одно из двух условий: или* g *не зависит от* t*, или*

$$g(x, t, -u) = -g(x, t, u) \qquad \forall (x, t, u) \in [0, \pi] \times \mathbf{R}^2.$$

Тогда для любого $d > 0$ *существует обобщенное решение* $u \in L_p(\Omega)$ *задачи* $(30) - (32)$ *такое, что* $\|u\|_{L_p} \geq d$*. При нечетном b обобщенное решение* $u \in C(\Omega)$.

Доказательство теоремы 1.1 проводится вариационным методом. Решение задачи ищется как критическая точка соответствующего функционала $F(u)$, который не ограничен ни снизу, ни сверху. На конечномерных подпространствах топологическими методами (теорема Борсука), опираясь на леммы Файрайсла находятся критические точки $F(u)$. Далее методом монотонности доказывается существование подпоследовательности, слабым пределом которой, при стремлении размерностей подпространств к бесконечности, является обобщенное решение задачи (30)-(32). Аналогичные результаты доказаны для случая граничного условия 3-го рода на правом конце и условия Дирихле на левом, а также для случая граничных условий 3-го рода на обоих концах (теорема 1.2).

В теоремах 1.3-1.6 существование периодических решений доказано для волнового уравнения с переменными коэффициентами с различными граничными условиями и нелинейностью, имеющей степенной рост. Условиям теорем 1.1-1.6 удовлетворяют, например, функции $g(x, t, u)$ вида

$$g(x, t, u) = c(x)|u|^{p-2}u - f(x), \quad g(x, t, u) = h(x, t)|u|^{p-2}u,$$

где функции $f(x), c(x) \in C[0,\pi]$, функция $h(x,t)$– T- периодична по времени, непрерывна в Ω, $0 < A_3 \le h(x,t) \le A_1, \quad 0 < A_3 \le c(x) \le A_1$ и для констант A_1, A_3 выполнено неравенство (34).

Во втором параграфе второй главы рассматривается волновое уравнение со степенной нелинейностью и с правой частью, зависящей от x и t:

$$p\,(x)\,u_{tt} - (p\,(x)\,u_x)_x + g(x,t,u) = h\,(x,t)\,,\;\; 0 < x < \pi,\;\; t \in R; \qquad (35)$$

$$u\,(0,\,t) = u\,(\pi,\,t) = 0, \qquad\qquad t \in R. \qquad (36)$$

Положительная функция $p(x)$ удовлетворяет условиям из работы [13].
Ищется периодическое решение с периодом T, имеющим вид

$$T = \frac{2\,\pi}{a}, \quad \text{где} \quad a \in \mathbf{N}. \qquad (37)$$

Теорема 2.1 *Пусть выполнено условие* (37), *функция* $g(x,t,u)$ *непрерывна на* $[0,\pi]\times\mathbf{R}^2$, $T-$*периодична по* t *и удовлетворяет условиям* (33), (34). *Тогда для любого положительного числа* d_1 *существует* $a_0 = a_0(d_1, A_1, A_2, A_3, A_4, \delta) \in \mathbf{N}$ *такое, что при любом* $a \in [a_0,\infty) \cap \mathbf{N}$ *и любой* T *- периодической по* t *и непрерывной на* $[0,\pi]\times\mathbf{R}$ *функции* $h(x,t)$ *с* $||h||_C \le d_1$ *задача* (35),(36),(32) *имеет обобщенное решение* $u \in L_r(\Omega)$.

Заметим, что соответствующий данной задаче функционал не является ограниченным ни сверху, ни снизу. Для поиска седловых критических точек этого функционала используется вариант леммы "горного перевала" Е. Файрайсла.

В теоремах 2.2, 2.3 аналогичный результат получен для случая граничных условий 3-го рода.

Публикации автора по теме главы 2: [1], [4], [5], [12], [13], [17].

Глава 3. Свободные колебания. Нетривиальные периодические решения.

Третья глава посвящена задаче о свободных нелинейных колебаниях струны, плоской пластины и балки, поставленной Х. Брезисом в[12]. В первом параграфе рассматривается волновое уравнение с граничным условием 3-го рода на одном из концов

$$u_{tt} - u_{xx} = g(x,t,u), \quad 0 < x < \pi, \ t \in \mathbf{R}. \tag{38}$$

Рассмотрим случай граничного условия 3-го рода на левом конце:

$$u(0,t) - hu_x'(0,t) = 0, \ \ u(\pi,t) = 0, \quad \ t \in \mathbf{R}. \tag{39}$$

Случай условия 3-го рода на правом конце рассматривается аналогично. Функция $g(x,t,u)$ непрерывна при $(x,t,u) \in [0,\pi] \times \mathbf{R}^2$ и

$$g(x,t,0) = 0 \quad \forall (x,t) \in [0,\pi] \times \mathbf{R}. \tag{40}$$

Из последнего условия следует, что $u \equiv 0$ является решением задачи (38),(39), (32). Ищется не равное нулю почти всюду в Ω решение, которое мы будем называть нетривиальным.

Для наглядностии сформулируем основной результат §1 в случае, когда функция g не зависит от x, t, существует $g'(0)$ и запишем уравнение (38) в виде

$$u_{tt} - u_{xx} = g(u), \quad 0 < x < \pi, t \in \mathbf{R}. \tag{41}$$

Теорема 1.1. *Пусть функция $g(u)$ непрерывна, $g(0) = 0$ и существуют $\lambda_1, \lambda_2 \in \sigma(A)$ такие, что $(\lambda_1, \lambda_2) \cap \sigma(A) = \emptyset$, выполнены условия (10), (11) так, что $b-$ нечетное число и*

$$[\alpha, \beta] \subset (\lambda_1, \lambda_2), \ \ g'(0) > \lambda_2, \ \ g'(0) \notin \sigma(A). \tag{42}$$

Предположим дополнительно, что

$$\frac{g(u)}{u} \leq \lambda \quad \forall u \in \mathbf{R}/\{0\}, \ \ \textit{где} \tag{43}$$

$$\lambda \in \sigma(A), \quad \lambda > g'(0), \quad (g'(0), \lambda) \cap \sigma(A) = \emptyset. \tag{44}$$

Тогда задача (41), (39), (32) имеет нетривиальное обобщенное решение $u \in C(\Omega)$.

Заметим, что из условий (10), (42) следует, что график функции $y = g(u)$ при больших $|u|$ лежит между прямыми $y = \lambda_1 u, \;\; y = \lambda_2 u$, где $\lambda_1, \;\; \lambda_2 \in \sigma(A)$, а при малых значениях $|u| \neq 0$ график $g(u)$ лежит вне сектора, ограниченного этими прямыми и, следовательно, пересекает линию $y = \lambda_2 u$. В утверждении 1.1 главы 3 доказано, что если график функции $y = g(u)$ не выходит из сектора, ограниченного линиями $y = \lambda_1 u$ и $y = \lambda_2 u$ (точнее $y = (\lambda_1 + \varepsilon)u$ и $y = (\lambda_2 - \varepsilon)u$, где ε сколь угодно мало), то задача (41),(39),(32) не имеет нетривиального решения. Теорема 1.1 останется в силе, если график функции $y = g(u)$ при $u \geq 0$ выходит из сектора $\lambda_1 u \leq y \leq \lambda_2 u$ снизу, то есть условия (42)-(44) можно заменить на условия

$$g'(0) < \lambda_1, \;\; g'(0) \notin \sigma(A), \;\; \frac{g(u)}{u} \geq \lambda \quad \forall u \in \mathbf{R}/\{0\}, \;\; \text{где}$$

$$\lambda \in \sigma(A), \quad \lambda < g'(0), \quad (\lambda, g'(0)) \cap \sigma(A) = \emptyset.$$

Доказывается теорема 1.1 вариационным методом. Решение задачи (41),(39),(32) ищется как критическая точка функционала

$$F(u) = \int\limits_{\Omega} \left(\frac{1}{2}(Au)u - \int\limits_{0}^{u} g(x,t,s)ds \right) dxdt.$$

Функционал F не ограничен ни снизу, ни сверху. Поэтому критическую точку F нельзя получить, как точку минимума или максимума. Однако на конечномерных подпространствах с помощью леммы "горного перевала" из [1] удалось найти нетривиальную стационарную "седловую точку" функционала F. Для этого были построены на конечномерных подпространствах "зацепляющиеся" поверхности, для которых выполнены условия леммы "горного перевала". Факт "зацепления" доказан в приложении к диссертации. Далее решение задачи (41),(39),(32) получается предельным переходом, когда размерность конечномерных подпространств стремится к бесконечности.

Во втором параграфе главы 3 рассматривается волновое уравнение (41) с граничными условиями Дирихле

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t \in \mathbf{R}. \tag{45}$$

При поиске нетривиального решения задачи (41), (45),(32) метод доказательства теоремы 1.1 явно не проходит, поскольку $\dim\ker A=\infty$ и предельный переход не получается. Чтобы преодолеть эту трудность, найдено инвариантное относительно A и g подпространство $H\subset L_2(\Omega)$ такое, что $H\cap\ker A=\{0\}$. В теоремах 2.1, 2.2 из §2 главы 3 для задачи (41),(45),(32) доказывается существование обобщенного или классического решения (при $g\in C^1(\mathbf{R})$) из подпространства H. Условия и методы доказательств теорем 2.1, 2.2 аналогичны условиям и методу доказательства теоремы 1.1. В утверждениях 2.1-2.4 доказываются достаточные условия, при выполнении которых нетривиальные решения задач (41),(45),(32) и (41),(39),(32) зависят от времени.

В качестве приложения полученных нами результатов рассмотрим уравнение sin-Гордон:

$$u_{tt}-u_{xx}+\sin u=0,\quad 0<x<\pi,\ \ t\in\mathbf{R}. \tag{46}$$

Уравнение sin-Гордон, возникшее изначально в дифференциальной геометрии, играет важную роль во многих областях физики. Это уравнение является одной из моделей единой теории поля, применяется в теории дислокаций в металлах, в теории джозефсоновских переходов, при описании нелинейных волновых свойств геофизической среды, имеющей блоковое (фрагментированное) строение. В связи с приложениями в геофизике одной из важных особенностей сейсмичности, на которую исследователи достаточно давно обратили внимание, было свойство периодичности - повторяемости наиболее сильных землетрясений в одном месте через определенный интервал времени. Поэтому является актуальной и представляет интерес задача о периодических решениях уравнения sin-Гордон.

Задача о периодических решениях уравнения sin-Гордон была сформулирована в работе Л.Ниренберга [1]. В ней сказано, что в случае бесконечной струны для уравнения sin-Гордон доказано существование периодического решения и ничего не известно о существовании периодических по времени решений уравнения sin-Гордон для конечной струны. Доказательство существования периодических решений уравнения sin-Гордон на отрезке получено в пункте 4, §2 главы 3. В теореме 5.2 главы 3 уравнение sin-Гордон рассмотрено с граничным условием 3-го рода. Здесь доказано, что при $h > \frac{8}{\pi}$ задача (46), (39) имеет нетривиальное $2\pi-$периодическое по времени решение, зависящее от времени. Как следствие теоремы 2.2 из §2 доказано, что уравнение sin-Гордон (46) с граничными условиями Дирихле (45) имеет нетривиальное, $T = \frac{5}{3}\pi$-периодическое по t, бесконечно гладкое решение, которое зависит от времени. Ранее в [13] существование периодического решения было получено только для случая однородных граничных условий Дирихле с достаточно большим периодом, который явно не задается.

В третьем и четвертом параграфах главы 3 методы, разработанные нами в главах 1,3, применяются при решении двумерных и одномерных гиперболических уравнений четвертого порядка: уравнений колебаний плоской пластины и балки. В этих параграфах доказаны (теоремы 3.1-3.3, теоремы 4.1-4.3) теоремы о существовании решений уравнений вынужденных и свободных колебаний плоской пластины и балки. В технических леммах 3.1-3.3, 4.1, 4.2 доказаны свойства оператора A^{-1}, необходимые при регуляризации обобщенных решений. В автореферате сформулируем одну из перечисленных выше теорем, например, теорему 3.1 о свободных колебаниях прямоугольной плоской пластины:

$$u_{tt} + \triangle^2 u = g(u), \quad (x,y) \in \varPi, t \in \mathbf{R}; \tag{47}$$

$$u = \triangle u = 0, \quad (x,y) \in \partial\varPi, t \in \mathbf{R}; \tag{48}$$

$$u(x,y,t+T) = u(x,y,t), \quad (x,y) \in \varPi, t \in \mathbf{R}. \tag{49}$$

Здесь $\varPi = (0,\pi)\times(0,\pi)$, $\quad \triangle = \partial_{xx} + \partial_{yy}$. Обозначим также $\Omega = [0,\pi]\times[0,\pi]\times[0,T]$. В §3 построено инвариантное подпространство H относительно g и дифференциального оператора A такое, что $\ker A \cap H = \{0\}$. Спектр $\sigma(A|_H)$ можно занумеровать в порядке возрастания: $\sigma(A|_H) = \{\eta_l |\ l \in \mathbf{Z}\}$ так, что $\eta_{-1} < 0, \eta_0 > 1$. Заметим, что при $T = 2\pi : \eta_{-1} = -11, \ \eta_0 = 9$.

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия* (10), (11), $b-$ *нечетно, функция* $g(u)$ *непрерывна на* $\mathbf{R}$ *и существует* $g'(0) \notin \sigma(A|_H)$. *Предположим, что либо существуют* $m \in \mathbf{Z}, k \in \mathbf{N}$ *такие, что*

$$[\alpha, \beta] \subset (\eta_m, \eta_{m+1}), \;\; g'(0) > \eta_{m+k}, \;\; \frac{g(u)}{u} \le \eta_{m+k+1} \quad \forall u \in \mathbf{R}/\{0\},$$

либо существуют $m \in \mathbf{Z}, k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ *такие, что*

$$[\alpha, \beta] \subset (\eta_m, \eta_{m+1}), \;\; g'(0) < \eta_{m-k}, \;\; \frac{g(u)}{u} \ge \eta_{m-k-1} \quad \forall u \in \mathbf{R}/\{0\}.$$

Тогда задача (47) – (49) *имеет нетривиальное обобщенное решение* $u \in C^{\frac{1}{2}}(\Omega) \cap H_1(\Omega)$. *Если дополнительно* $g \in C^1(\mathbf{R})$, *то* $u \in C^1(\Omega) \cap H_2(\Omega) \cap L^2((0,T) : H_4(\varPi) \cap H_1^0(\varPi))$.

Публикации автора по теме главы 3: [3], [7], [10], [11], [20].

Автор выражает глубокую признательность руководителям научных семинаров профессорам В.А. Кондратьеву и М.И. Вишику за постановку задач и многочисленные полезные обсуждения. Автор также выражает большую благодарность профессору А.В. Михалеву за помощь и постоянное внимание к работе.

Основные публикации автора по теме диссертации в журналах из официального перечня ВАК

[1] И.А. Рудаков. Периодические решения квазилинейного волнового уравнения с переменными коэффициентами// Математический сборник.– 2007.– Т. 198.– вып. 7.– С. 91-108

[2] И.А. Рудаков. Нелинейные колебания струны// Вестн. Моск. Ун-та., Сер.1. Матем. Механ.– 1984.– N 2.– С. 9-13.

[3] И.А. Рудаков. Задача о свободных периодических колебаниях струны с немонотонной нелинейностью//УМН.–1985.–Т. 40.– Вып. 1(241).– С. 215-216.

[4] И.А. Рудаков. Периодические решения нелинейного волнового уравнения с непостоянными коэффициентами//Матем. заметки.–2004.–Т.76.–вып. 3.–С. 427-438.

[5] И.А. Рудаков. Периодические решения нелинейного волнового уравнения с однородными граничными условиями//Известия РАН. Сер. матем.- 2006.– N 1. –С. 173-184.

[6] И.А. Рудаков. Периодическое радиально-симметричное решение нелинейного волнового уравнения в шаре// Вестн. Моск. Ун-та., Сер.1. Матем. Механ.– 2004.– N 6.– С. 8-14.

[7] И.А. Рудаков. Нетривиальное периодическое решение нелинейного волнового уравнения с однородными граничными условиями //Дифференциальные уравнения.-2005.– Т. 41.– N 10.–С. 1392-1399.

[8] И.А. Рудаков. Периодическое по времени решение уравнения вынужденных колебаний струны с однородными граничными условиями//Дифференциальные уравнения.– 2003.– Т. 39.– N 11.– С. 1556-1561.

[9] И.А. Рудаков. Периодическое решение нелинейного уравнения колебаний струны.//УМН.–1985.–Т. 40.– Вып. 5.– С. 238-239.

[10] И.А. Рудаков. Свободные нелинейные колебания струны// Вестн. Моск. Ун-та., Сер.1. Матем. Механ.– 1985.– N 4.– С. 80-83.

[11] И.А. Рудаков. К вопросу о существовании нетривиального периодического решения нелинейного волнового уравнения//УМН.–1986.–Т. 41.– Вып. 4.– С. 161.

[12] И.А. Рудаков. О существовании периодического решения нелинейного телеграфного уравнения //УМН.–1991.–Т. 46.– Вып. 6.–С. 151.

[13] И.А. Рудаков. Периодическое решение нелинейного телеграфного уравнения// Вестн. Моск. Ун-та., Сер.1. Матем. Механ.– 1993.– N 4.– С. 3-6.

[14] И.А. Рудаков. Периодические решения нелинейного волнового уравнения с граничными условиями 3-го рода// Дифференциальные уравнения.–2007. - Т.43.– N 6. – С. 854-855.

[15] И.А. Рудаков. Периодическое по времени решение нелинейного волнового уравнения с непостоянными коэффициентами// Фундаментальная и прикладная математика.– 2002.– Т. 8.– Вып. 3. – С. 877-886.

[16] И.А. Рудаков. Нелинейные уравнения , удовлетворяющие условию нерезонансности // Труды семинара им. И.Г.Петровского.–2006.– Т. 25.–С. 226-248.(I.A. Rudakov. Nonlinear equations satisfying the nonresonance condition// Journal of Mathematical Scinces. Springer New-York.– 2006.– V 135.– N 1.– P. 2749-2763.)

(Прочие публикации)

[17] И.А. Рудаков. Периодические решения нелинейного волнового уравнения с однородными граничными условиями//Фундаментальная и прикладная математика.-2006.–Т. 12.–ВЫП. 5.–С. 189-201.(I.A. Rudakov. Periodic solutions of a quasilinear wave equations with homogeneous boundary conditions//Journal of Mathematical Scinces.– Springer New-York.– 2008.– V 150.– N 6. –P. 2588-2597.)

[18] И.А. Рудаков. Периодические решения нелинейного волнового уравнения с граничными условиями Неймана и Дирихле//Известия Вузов. Математика.–2007.–N 537.–С. 45-55.

[19] И.А. Рудаков. Нелинейные уравнения, удовлетворяющие условию нерезонансности на бесконечности//Вестник БГУ им. И.Г.Петровского.–2005.–N 4. –С. 212-230.

[20] И.А. Рудаков. Нетривиальные периодические решения нелинейных уравнений колебаний плоской пластины и балки//Вестник БГУ им. И.Г.Петровского.–2006.–N 4. –С. 161-177.