МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи

Зобова Александра Александровна

Качественный анализ движения тела вращения на шероховатой плоскости.

01.02.01 – Теоретическая механика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Москва
2008

Работа выполнена на кафедре теоретической механики и мехатроники механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:

д-р физ.-мат. наук, профессор
А.В. Карапетян

Официальные оппоненты:

д-р физ.-мат. наук, профессор
И.И. Косенко
канд. физ.-мат. наук
А.С. Сумбатов

Ведущая организация:

Институт прикладной математики
имени М.В. Келдыша РАН

Защита состоится 10 октября 2008 года в 16 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.22 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, Ленинские горы, Главное Здание МГУ, механико-математический факультет, ауд. 16-10.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ.

Автореферат разослан «   » сентября 2008 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
канд. физ.-мат. наук, доцент, В.А. Прошкин

Общая характеристика работы

Актуальность работы. Движение тела по шероховатой поверхности — важная задача аналитической механики. В постановке этой задачи главную роль играет выбор модели взаимодействия тела с поверхностью. Сравнение результатов теоретических исследований с наблюдаемыми в реальных системах эффектами позволяет выбирать для описания динамики модель, наиболее точно отражающую поведение рассматриваемой системы. Таким образом, качественное исследование динамики тела при выборе разных моделей взаимодействия представляется весьма актуальным.

Цель диссертационной работы. Диссертация посвящена глобальному качественному анализу динамики тела вращения, катящегося по шероховатой горизонтальной плоскости, как без проскальзывания (неголономная модель), так и с проскальзыванием (с учетом силы трения скольжения). Исследования базируются на методах Пуанкаре – Четаева и Смейла исследования динамики консервативных систем с симметрией и их модификациях на случай диссипативных систем.

Научная новизна работы. Все основные результаты, полученные в работе, являются новыми, ранее неизвестными. Впервые для неголономной постановки задачи о качении тела вращения построены бифуркационные диаграммы Пуанкаре – Четаева и Смейла в случае, когда явный вид линейных интегралов неизвестен. Свойства этих диаграмм исследованы аналитически (анализ опирается на свойства системы дифференциальных уравнений, задающих коэффициенты линейных интегралов).

Впервые поставлена и решена задача глобального качественного анализа динамики тела, ограниченного поверхностью, в некоторых точках которого касательная плоскость не определена однозначно (тело с “острием”).

В задаче о движении китайского волчка, или волчка “тип-топ”, то есть тела, состоящего из двух шаровых сегментов, соединенных стержнем, найдены все стационарные движении, исследована их устойчивость и ветвление. Результат представлен в виде атласа бифуркационных диаграмм Пуанкаре – Четаева и обобщенных диаграмм Смейла.

Достоверность результатов. Все результаты диссертационной работы обоснованы, они базируются на общих теоремах динамики, теории устойчивости и бифуркаций. Результаты, полученные с помощью численных методов, верифицированы аналитически.

Теоретическая и практическая ценность работы. Работа носит теоретический характер, полученные результаты могут быть использованы в исследованиях, проводимых в МГУ имени М.В. Ломоносова, Вычислительном центре имени А.А. Дородницына РАН, Институте прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН, Институте проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН и других научно-исследовательских центрах.

Апробация работы. Результаты, представленные в диссертации, докладывались автором и обсуждались на следующих научных семинарах и конференциях:

- Семинар по аналитической механике и устойчивости движения кафедры теоретической механики и мехатроники МГУ под руководсвом чл.-корр. РАН В.В. Белецкого и проф. А.В.Карапетяна, 2008 г.

- Научная школа-конференция “Мобильные роботы и мехатронные системы” 2003, 2004 г.

- Научная конференция Ломоносовские чтения МГУ им. М.В. Ломоносова, 2004 г. – 2008 г.

- VIII, IX Международный семинар “Устойчивость и колебания нелинейных систем управления”, 2004 г., 2006 г.

- Международная научная конференция по механике “Четвертые Поляховские чтения”, г. Санкт-Петербург, 2006 г.

Публикации. Основные результаты диссертационной работы изложены в шести печатных работах, две из которых опубликованы в журналах, входящих в перечень ВАК. Список работ приведен в конце автореферата.

Структура работы. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы из 88 наименований. Общий объем диссертации — 102 страницы.

Содержание работы

Во введении описана предметная область и цель настоящей диссертации, дан обзор работ, посвященных исследованию движений твердых тел по шероховатым поверхностям, как в неголономной постановке, так и для систем с проскальзыванием, а также приведено краткое содержание диссертации.

В первой главе рассматривается качение без скольжения тяжелого абсолютно твердого динамически симметричного тела, ограниченного поверхностью вращения без особенностей, по неподвижной горизонтальной плоскости.

Как показал С.А. Чаплыгин, уравнения движения тела (неголономная постановка) допускают интеграл энергии $H = h$ (известный в явном виде) и два линейных по компонентам угловой скорости первых интеграла, неизвестных в явном виде: $K_1(\theta, p, r) = k_1$, $K_2(\theta, p, r) = k_2$ (здесь

$\theta \in (0, \pi)$ — угол отклонения оси симметрии от вертикали, p — проекция угловой скорости на направление, перпендикулярное к оси симметрии и лежащее в вертикальной плоскости, r — проекция угловой скорости на ось симметрии). Структура этих интегралов известна, они имеют следующий вид:

$$\mathbf{K} = \left\| \begin{array}{c} K_1 \\ K_2 \end{array} \right\| = \mathbf{\Phi}^{-1}(\theta) \left\| \begin{array}{c} p \\ r \end{array} \right\|$$

Матрица этих интегралов является обратной к фундаментальной матрице $\Phi(\theta)$ линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d}{d\theta} \left\| \begin{array}{c} p \\ r \end{array} \right\| = \mathbf{A}(\theta) \left\| \begin{array}{c} p \\ r \end{array} \right\| \tag{1}$$

Явный вид этих линейных интегралов известен лишь для специальных форм поверхностей катящегося тела (шар, диск, и некоторое семейство поверхностей, найденное Х.М. Муштари (1932) и А.С. Кулешовым (2005)). Однако даже в этих случаях (кроме шара) интегралы выражаются с помощью гипергеометрических рядов и эллиптических функций первого и второго родов. Понятно, что исследование этих интегралов связано с большими аналитическими трудностями.

В то же время известно (Н.К. Мощук, 1988), что на фиксированном уровне $K_1 = k_1$, $K_2 = k_2$ линейных интегралов уравнения движения тела вращения по шероховатой плоскости сводятся к одномерной гамильтоновой системе с потенциалом, зависящим от двух параметров $k_1,\ k_2$ и угла θ. Таким образом, задача о качественном описании движения состоит в изучении фазового портрета этой приведенной системы, то есть в изучении ее потенциала $W_{k_1,k_2}(\theta)$, в который входят компоненты фундаментальной матрицы $\Phi(\theta)$, неизвестные в явном виде.

Для того, чтобы дать исчерпывающее качественное описание движения, необходимо исследовать количество и характер критических точек потенциала $W_{k_1,k_2}(\theta)$ при разных значениях $k_1,\ k_2$. (Критическая точка эффективного потенциала, согласно теории Рауса, соответствует стационарному движению тела вращения, причем точка минимума — устойчивому, а точки максимума — неустойчивому движению.) Эффективным методом исследования является построение диаграммы Пуанкаре – Четаева — поверхности в пространстве $(k_1,\ k_2,\ \theta)$, каждая точка которой соответствует стационарному движению (уравнение, которое задает эту поверхность, неизвестно в явном виде). Был разработан алгоритм, позволяющий построить эту поверхность для любого тела вращения. Аналогично может быть построена диаграмма Смейла — поверхность стационарных движений в пространстве констант первых интегралов $(k_1,\ k_2,\ h)$.

В диссертационной работе построены диаграммы для семейства однородных тел, ограниченных эллипсоидами вращения (как сплюснутыми, так и вытянутыми по оси вращения). Аналитически были установлены свойства диаграмм Пуанкаре – Четаева и Смейла, которые позволяют сделать следующие качественные выводы: для всех эллипсоидов, вытянутых вдоль оси симметрии, для каждой пары констант линейных интегралов внутри интервала $(0, \pi)$ существует лишь одна критическая точка эффективного потенциала, и она является минимумом, следовательно, все прецессионные стационарные движения устойчивы. Для эллипсоидов, сплюснутых по оси симметрии, на плоскости $(k_1,\ k_2)$ выделены области, движения в которых качественно различаются, приведены характерные графики эффективного потенциала.

Во второй главе рассматривается задача о качении без скольжения тела вращения, у которого в двух точках поверхности (на оси вращения) не определена однозначно касательная плоскость. Эти точки в работе названы остриями.

Рассматривается тело, поверхность которого образована вращением части параболы, отсекаемой прямой, проходящей через ее фокус и параллельной директрисе. Такое тело вращения впервые рассмотрел Х.М.Муштари; он показал, что уравнения движения такого тела при некотором соотношении на моменты инерции при качении по плоскости выпуклой частью интегрируемы в явном виде. Однако касательная к телу плоскость однозначно определена лишь на интервале $I_M = (\pi/4,\ 3\pi/4)$ изменения угла θ — при этом тело катится по опорной плоскости. При $\theta \in I_L = (0, \pi)\backslash I_M$ тело опирается о плоскость острием. В диссертационной работе предполагается, что проскальзывания при этом не происходит. Тогда динамика тела при опоре на острие описывается уравнениями движения твердого тела с неподвижной точкой в случае Лагранжа.

Итак, фазовое пространство рассматриваемой задачи разделено на области I_L (случай Лагранжа) и I_M (случай Муштари), в каждой из которых система описывается разными дифференциальными уравнениями. В каждой области существует три первых интеграла: интеграл энергии и два линейных по обобщенным скоростям интеграла, причем структура этих интегралов одинакова. В каждой из областей, благодаря наличию циклических координат, система сводится к одномерной системе с эффективным потенциалом $W_{k_1,k_2}(\theta)$.

В диссертационной работе выполнена стыковка линейных первых интегралов задачи из областей I_L и I_M, в естественном предположении о непрерывности компонент угловой скорости при переходе из одной части фазового пространства в другую (безударное движение; компоненты углового ускорения терпят разрыв). Таким образом, получены глобальные первые интегралы задачи. Показано, что эффективный потенциал задачи при такой стыковке интегралов является непрерывно дифференцируемой функцией. Построены бифуркационные диаграммы Пуанкаре – Четаева и Смейла, которые позволяют дать качественное описание движения тела.

В заключительных параграфах первой и второй главы рассмотрен вопрос об осуществимости качения тела без проскальзывания по горизонтальной плоскости, в предположении, что взаимодействие тела с опорной плоскостью описывается силой сухого трения Кулона. Аналитически показано, что на стационарных движениях сила нормальной реакции равна весу тела, но существуют нестационарные движения, на которых (в предположении, что проскальзывания не возникает) сила нормальной реакции может стать отрицательной. Также показано, что для любого коэффициента трения существуют такие стационарные движения, для которых сила трения выходит из конуса трения. Для веретена Муштари найдено соотношение между коэффициентом трения и величиной интеграла энергии, при которых возможно нестационарное плоскопараллельное движение с переходом с острия на выпуклую поверхность без проскальзывания. Построены поверхности, ограничивающие области констант первых интегралов $(k_1,\ k_2,\ h)$, соответствующих безотрывным движениям и движениям без проскальзывания. Анализ этих поверхностей позволяет заключить, что если на движении сила нормальной реакции может стать отрицательной, то и сила трения выходит из конуса трения. Таким образом, отрыв без возникновения проскальзывания невозможен.

В третьей главе рассматривается движение тела, состоящего из двух шаровых сегментов, жестко связанных стержнем, проходящим через центры этих сегментов (волчок “тип-топ”). В отличие от первой и второй глав, в точке контакта тела и плоскости допускается проскальзывание. В качестве модели для силы трения выбрана модель Контенсу.

В этой задаче конфигурационное пространство системы разбивается на две области. Одна из них (угол отклонения оси симметрии от вертикали θ принадлежит множеству $I_1 = [0,\ \pi - \alpha)$, α — геометрический параметр задачи) соответствует касанию плоскости большим шаровым сегментом, вторая ($\theta \in I_2 = (\pi - \alpha,\ \pi]$) — касанию малым шаровым сегментом (опора волчка на ножку). При $\theta = \pi - \alpha$ волчок опирается о плоскость в двух точках. В каждой из областей $I_1,\ I_2$ уравнения движения имеют одинаковую структуру, и в каждой из областей существует линейный интеграл Желле. Полная механическая энергия системы на движении, вообще говоря, есть невозрастающая функция времени. На стационарных движениях волчка, то есть таких движениях, при которых стержень составляет постоянный угол с вертикалью, а скорость скольжения равна нулю, полная механическая энергия сохраняется.

На границе указанных областей тело касается плоскости двумя точками, и поэтому, в отличие от случая, рассмотренного во второй главе, на границе указанные интегралы Желле не существуют. Помимо этого, во время движения переход из одной области фазового пространства в другую, вообще говоря, происходит с ударом.

В диссертационной работе рассматриваются стационарные движения волчка. Строится эффективный потенциал системы, изучается характер его критических точек. На плоскости $(p^2, \cos\theta)$, где p^2 — константа интеграла Желле, построены диаграммы Пуанкаре – Четаева — кривые стационарных движений. Также построены обобщенные диаграммы Смейла — кривые стационарных движений на плоскости (p^2, h), где h — величина полной механической энергии системы. На интервалах $\cos\theta < -\cos\alpha$ и $\cos\theta > -\cos\alpha$ используются константы интегралов Желле из разных областей фазового пространства. При этом кривые прецессионных стационарных движений терпят разрыв на границе указанных областей.

Результаты представлены в виде атласа бифуркационных диаграмм.

В Заключении приведены основные результаты и выводы:

- В классической неголономной задаче о качении тела вращения по шероховатой плоскости разработан алгоритм построения поверхностей стационарных движений в случае, когда линейные интегралы задачи неизвестны в явном виде; эти поверхности построены для семейства однородных эллипсоидов вращения. Их свойства и структура исследованы аналитически. Показано, что они существенно зависят от того, сплюснут или вытянут эллипсоид вдоль оси симметрии. В пространстве констант первых интегралов выделены области различных типов областей возможности движения и фазовых портретов приведенной системы.

- В задаче о движении тела с острием выполнена стыковка линейных интегралов, в предположении отсутствия проскальзывания между телом и опорной плоскостью. Показано, что эффективный потенциал системы является непрерывно дифференцируемой функцией. Построены бифуркационные диаграммы, которые позволяют дать качественный анализ движения волчка.

- Рассмотрен вопрос об осуществимости качения тела по плоскости без проскальзывания. В пространстве констант первых интегралов выделены области безотрывных движений и движений без проскальзывания.

- В задаче о качении с проскальзыванием китайского волчка (моделируемого двумя шаровыми сегментами, соединенными ножкой) по шероховатой плоскости построен полный атлас бифуркационных диаграмм стационарных движений. Показано, что кривые стационарных движений на этих диаграммах всегда разрывны (в отличие от ранее исследованных более простых моделей китайского волчка).

По теме диссертации опубликованы следующие работы:

1. *Зобова А.А.* О стационарных движениях тяжелого тела вращения на шероховатой плоскости // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения М.: ВЦ РАН. 2004. С. 78 – 88.

2. *Зобова А.А.* Построение бифуркационных диаграмм Пуанкаре – Четаева и Смейла в динамике тела вращения на шероховатой плоскости // Труды научной школы-конференции "Мобильные роботы и мехатронные системы" М.: Изд-во МГУ. 2004. С. 107 – 118.

3. *Зобова А.А.* Качественный анализ и визуализация качения эллипсоида вращения по абсолютно шероховатой плоскости // Труды научной школы-конференции "Мобильные роботы и мехатронные системы 2004" М.: Изд-во МГУ. 2004. С. 80 – 86.

4. *Зобова А.А., Карапетян А.В.* Построение бифуркационных диаграмм Пуанкаре – Четаева и Смейла для консервативных неголономных систем с симметрией // ПММ. 2005. Т. 69 Вып. 2. С. 202 – 214.

5. *Зобова А.А.* О связях в задаче о качении тела вращения по абсолютно шероховатой плоскости. // Избранные труды научной конференции "Четвертые поляховские чтения", С.-Петербург. 2006. С. 120 – 125.

6. *Зобова А.А.* Динамика тела вращения, катящегося по абсолютно шероховатой плоскости. // Труды конференции-конкурса молодых

ученых Института механики МГУ, 12-17 октября 2005 г. Изд-во МГУ. 2006. С. 71 – 74.

7. *Зобова А.А.* Качение тела с острием по плоскости. // Труды конференции-конкурса молодых ученых Института механики МГУ, 11-16 октября 2006 г. Изд-во МГУ. 2006. С. 144 – 151.

8. *Зобова А.А.* О сопряжении решений двух интегрируемых задач: качение тела с острием по плоскости. // Автоматика и телемеханика. 2007. №8. С. 156 – 161.