Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 511.3

Сорокин Павел Николаевич

СРЕДНИЕ ЗНАЧЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУММ В КОЛЬЦЕ ГАУССОВЫХ ЧИСЕЛ

специальность 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва
2008

Работа выполнена на кафедре математического анализа Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Владимир Николаевич Чубариков
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Николай Михайлович Добровольский (Тульский педагогический государственный университет имени Л. Н. Толстого)
	кандидат физико-математических наук, доцент Ольга Васильевна Тырина (Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана)
Ведущая организация:	Московский педагогический государственный университет

Защита диссертации состоится 3 октября 2008 г. в 16 час. 40 мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП–1, Ленинские горы, д. 1, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 3 сентября 2008 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 при МГУ,
доктор физико-математических
наук, профессор А. О. Иванов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

Настоящая диссертация посвящена задачам аналитической теории чисел. Первым стал рассматривать простейшие тригонометрические суммы Гаусс. В частности, он исчерпывающим образом исследовал важнейшие свойства носящей его имя "суммы Гаусса":

$$S\left(\frac{ax^2}{P}\right)=\sum_{x=1}^{P}e^{2\pi i\frac{ax^2}{P}},\quad (a,P)=1.$$

Гаусс первый показал пользу тригонометрических сумм как средства решения задач теории чисел, в частности, используя свойства суммы Гаусса, он построил одно из своих доказательств закона взаимности квадратичных вычетов.

В дальнейшем тригонометрические суммы, правда гораздо более общего вида, стали мощным средством решения ряда важных вопросов теории чисел. При этом основной в отношении таких сумм стала проблема разыскания их возможно более точной оценки, т.е. возможно более точной верхней границы их модуля.

Сумма Гаусса является частным случаем более общей рациональной тригонометрической суммы:

$$S\left(\frac{\varphi(x)}{P}\right)=\sum_{x=1}^{P}e^{2\pi i\frac{\varphi(x)}{P}},\tag{1}$$

где $\varphi(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x$ — многочлен степени $n>1$ с условием $(a_n,\ldots,a_1,P)=1$.

Наилучшую оценку суммы (1) в общем случае дал Хуа Ло-кен. Он установил неравенство

$$\left|S\left(\frac{\varphi(x)}{P}\right)\right|\leqslant c(n)P^{1-\nu}.$$

Это неравенство замечательно тем, что при постоянном n в смысле порядка роста правой части с возрастанием P оно, вообще говоря, уже не может быть заменено существенно лучшим.

Рациональная тригонометрическая сумма входит как частный случай в еще более общий класс сумм вида

$$S=S(\alpha_n,\ldots,\alpha_1)=\sum_{0<x\leqslant P}e^{2\pi i f(x)},\tag{2}$$

где $f(x)=\alpha_nx^n+\ldots+\alpha_1x$, и $\alpha_n,\ldots,\alpha_1$ — любые вещественные числа. Первый общий метод нахождения нетривиальных оценок сумм (2), дал Г. Вейль. Поэтому этим суммам присвоено название: "суммы Г. Вейля".

При оценке сумм Г. Вейля вводится величина $J = J(P;n,k)$, которая является числом целочисленных решений следующей системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + \ldots + x_k = y_1 + \ldots + y_k, \\ x_1^2 + \ldots + x_k^2 = y_1^2 + \ldots + y_k^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1^n + \ldots + x_k^n = y_1^n + \ldots + y_k^n, \end{cases} \tag{3}$$

где $1 \leqslant x_s \leqslant P$, $1 \leqslant y_s \leqslant P$, $s = 1, \ldots, k$.

Имеет место равенство

$$J = J(P;n,k) = \int_0^1 \ldots \int_0^1 \left| \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i f(x)} \right|^{2k} \mathrm{d}\alpha_1 \ldots \mathrm{d}\alpha_n.$$

Задача нахождения возможно более точной оценки сверху для $J(P;n,k)$ играет важную роль в различных вопросах аналитической теории чисел.

Разработанный И.М. Виноградовым в тридцатых годах двадцатого века метод оценок тригонометрических сумм Г. Вейля[1] опирался на оценку величин типа $|S(\alpha_n, \ldots, \alpha_1)|^{2k}$. Позже И.М. Виноградов заменил сложную оценку сумм степеней $|S(\alpha_n, \ldots, \alpha_1)|^{2k}$ более простой оценкой интеграла

$$J(P;n,k) = \int_0^1 \ldots \int_0^1 |S(\alpha_n, \ldots, \alpha_1)|^{2k} \mathrm{d}\alpha_1 \ldots \mathrm{d}\alpha_n,$$

т.е. оценкой этой суммы "в среднем"по всем $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, и поэтому теорему об оценке величины $J(P;n,k)$ носит название теоремы И.М. Виноградова о среднем значении. В дальнейшем И.М. Виноградов неоднократно улучшал и уточнял эту теорему[2]. Эти результаты позволили И.М. Виноградову добиться существенного продвижения в целом ряде задач аддитивной теории чисел и в теории дзета-функции Римана[3].

И.М. Виноградов получил асимптотически точную по P оценку величины $J(P;n,k)$ вида

$$J(P;n,k) \ll P^{2k - \frac{n(n+1)}{2}}$$

[1]Виноградов И. М. *Новые оценки сумм Вейля*: Докл. АН СССР, 1935, т. 3, № 6, с. 195-198.

[2]Виноградов И. М. *Общие теоремы о верхней границе модуля тригонометрической суммы*: Известия АН СССР, сер. матем., 1951, т. 15, № 2, с. 109-130.

[3]Виноградов И. М. *Метод тригонометрических сумм в теории чисел.* М.: Наука, 1980. — 180 с.

(введенный И.М. Виноградовым знак " $\ll$ " означает, что если $A(P) \ll B(P)$, то $|A(P)| \leqslant c|B(P)|$, где $c > 0$ — некоторая постоянная, не зависящая от P).

Отметим, что оценками тригонометрических сумм по методу И.М. Виноградова занимался также Хуа Ло-кен[4]. В частности, он в явной форме выделил оценку среднего значения тригонометрической суммы из общего метода оценки индивидуальных тригонометрических сумм.

В 1942 году Ю.В. Линником[5] было найдено доказательство теоремы о среднем значении, использующее свойства сравнений по модулю степеней простого числа p. Другое p-адическое доказательство, т.е. использующее свойства сравнений по модулю простого числа p, теоремы о среднем значении было получено А.А. Карацубой на основе разработанного им в шестидесятых годах двадцатого века нового p-адического метода[6]. В дальнейшем его метод, помимо других приложений, позволил не только значительно прояснить и упростить доказательство теорема о среднем значении, но и получить новые существенные результаты, в частности, вывести нетривиальные оценки величины $J(P; n, k)$ при малых значениях k (см. работы А.А. Карацубы[7], С.Б. Стечкина[8], Г.И. Архипова[9], Г.И. Архипова и В.Н. Чубарикова[10], Г.И. Архипова и А.А. Карацубы[11], Г.И. Архипова, А.А. Карацубы и В.Н. Чубарикова[12], В.З. Соколинского[13], О.В. Тыриной[14]).

Естественным продолжением данных исследований является обобщение этих результатов на комплексной плоскости и в полях алгебраических чисел.

В полях алгебраических чисел метод тригонометрических сумм оказался полезным при выводе асимптотических формул в аддитивных

---

[4]Ло-Кен Хуа. *Аддитивная теория простых чисел*: Труды МИАН СССР, 1947, т. 22, с. 1-179.

[5]Линник Ю. В. *Оценки сумм Вейля*: Докл. АН СССР, 1942, т. 34, № 7, с. 201-203.

[6]Например, Карацуба А. А. *Проблема Варинга для сравнения по модулю, равному степени простого числа*: Вестник МГУ, 1962, Сер. 1, № 1, с. 28-38.

[7]Например, Карацуба А. А. *Средние значения модуля тригонометрической суммы*: Изв. АН СССР, Сер. матем., 1973, т. 36, № 6, с. 1203-1227.

[8]Стечкин С. Б. *О средних значениях модуля тригонометрической суммы*: Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР, 1975, т. 134, с. 283-309.

[9]Архипов Г. И. *О среднем значении сумм Г. Вейля*: Матем. заметки, 1978, т. 23, №6, с. 785-788.

[10]Архипов Г. И., Чубариков В. Н. *О кратных тригонометрических суммах*: Докл. АН СССР, 1975, т. 222, № 5, с. 1017-1019.

[11]Архипов Г. И., Карацуба А. А. *Новая оценка интеграла И.М. Виноградова*: Изв. АН СССР, Сер. матем., 1978, т. 42, № 4, с. 751-762.

[12]Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. *Теория кратных тригонометрических сумм.* М.: Наука, 1987. — 400 с.

[13]Соколинский В. З. *О теореме о среднем при малом числе переменных*: Изв. ВГПИ, 1979, т. 201, с. 45-55.

[14]Тырина О. В. *Новая оценка тригонометрического интеграла И. М. Виноградова*: Изв. АН СССР, 51 (1987), 2, — с. 363-378.

задачах варинговского типа с помощью кругового метода Харди-Литтльвуда-Рамануджана в форме тригонометрических сумм И.М. Виноградова. Первые исследования в этом направлении провел К.Л. Зигель[15] в середине сороковых годов двадцатого столетия. Эти исследования были продолжены Т. Татудзавой[16] и О. Кёрнером[17]. В этих работах впервые получается теорема о среднем значении для тригонометрических сумм Г. Вейля в полях алгебраических чисел. После появления p-адического метода А.А. Карацубы доказательства теоремы о среднем значении, И. Еда[18] получил теорему о среднем с параметрами, отвечающими результату И.М. Виноградова в случае поля рациональных чисел.

Отметим, что дальнейшее развитие метод тригонометрических сумм И.М. Виноградова получил в работах А.А. Карацубы[19], Н.М. Коробова[20], Г.И. Архипова[21], В.Н. Чубарикова[22], О.В. Тыриной[23], И.М. Козлова[24] и др.

В настоящей диссертации продолжено изучение указанных проблем в кольце гауссовых чисел. В ней получена асимптотическая формула при $P \to \infty$ для аналога интеграла И.М. Виноградова, то есть асимптотическая формула для количества решений следующей системы уравнений

$$\begin{cases} \lambda_1 + \ldots + \lambda_k = \mu_1 + \ldots + \mu_k, \\ \lambda_1^2 + \ldots + \lambda_k^2 = \mu_1^2 + \ldots + \mu_k^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_1^n + \ldots + \lambda_k^n = \mu_1^n + \ldots + \mu_k^n, \end{cases}$$

где неизвестные $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \mu_1, \ldots, \mu_k \in \mathbb{Z}[i]$, причем $\mathrm{N}\lambda_s = |\lambda_s|^2 < P$, $\mathrm{N}\mu_s < P$, $s = 1, \ldots, k$.

[15]Siegel C.L. *Generalization of Warings problem to algebraic number fields*: Amer. J. Math., 66 (1944), pp. 122-136.

[16]Tatuzava T. *On the Waring problem in an algebraic number field*: Jour. Math. Soc. Japan, 10 (1958), No. 3, pp. 322-341.

[17]Körner O. *Über Mittelwerte trigonometrischen Zahlkorpern*: Math. Ann., 147 (1962), pp. 205-209.

[18]Eda Y. *On the meanvalue problem in an algebraic number field*: Jap. J. Math., 36 (1967), pp. 5-21.

[19]Карацуба А. А. *Основы аналитической теории чисел.* М.: Наука, 1975. — 210 с.

[20]Коробов Н. М. *О тригонометрических суммах*: ДАН СССР, 1979, т. 245, № 1, с. 14-17.

[21]Архипов Г. И. *Оценки двойных тригонометрических сумм*: Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР, 1976, т. 142, с. 46-66.

[22]Чубариков В. Н. *Асимптотическая формула среднего значения кратной тригонометрической суммы*: Мат. заметки, 1978, т. 23, № 6, с. 799-816.

[23]Тырина О. В. *Средние значения тригонометрических сумм*: Дис. канд. физ.-мат. наук, М., 1989.

[24]Козлов И. М. *Теорема о среднем И. М. Виноградова в кольце гауссовых чисел*: Современные проблемы теории чисел и ее приложения: Труды 4-ой международной конференции, Тула, 2002, с. 71-86.

На основе этой асимптотической формулы получена оценка тригонометрической суммы Г. Вейля по гауссовым числам.

Асимптотическая формула является обобщением теоремы о среднем значении И.М. Виноградова и результатов О.В. Тыриной в поле рациональных чисел. Полученные результаты представляют собой частный случай двумерной теоремы о среднем значении. Этот случай имеет дело с многочленами, степень которых по каждой переменной не превосходит n и, следовательно, этот многочлен имеет порядка n^2 коэффициентов. Здесь же мы рассматриваем многочлен с комплексными коэффициентами и поэтому имеем $2n$ независимых в вещественном смысле коэффициентов. В работе обобщается метод И.М. Виноградова при этих условиях. В случае, когда коэффициенты являются вещественными, полученный результат практически совпадает с известными результатами И.М. Виноградова и О.В. Тыриной.

Цель работы

Целью настоящей работы является получение новых оценок средних значений тригонометрических сумм Г. Вейля и вывода из них оценок модуля индивидуальных сумм Г. Вейля.

Методы исследования

В работе используются методы теории диофантовых уравнений, теории чисел, теории тригонометрических сумм, математического анализа и теории функций комплексного переменного.

Научная новизна

Результаты диссертации являются новыми и получены автором самостоятельно. Основные результаты диссертации состоят в следующем:

1. Доказана теорема о среднем И.М. Виноградова, в которой дается улучшенная оценка тригонометрического интеграла в кольце гауссовых чисел.

2. Получен вариант основного рекуррентного неравенства А.А. Карацубы в форме, аналогичной соответствующему неравенству в случае целых чисел.

3. Доказана лемма о кратности пересечении окрестностей гауссовых чисел.

4. Найдена оценка модуля суммы Г. Вейля по гауссовым числам.

Теоретическая и практическая ценность

Диссертация носит теоретический характер. Ее результаты и методы могут быть использованы специалистами в области аналитической теории чисел.

Апробация диссертации

Результаты диссертации докладывались

1. на специальных семинарах по теории чисел в МГУ под руководством Г. И. Архипова и В. Н. Чубарикова в октябре 2006 года и в ноябре 2007 года;

2. на 15-ой международной конференции "Математика. Компьютер. Образование", г. Дубна, январь 2008 года.

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в двух работах, список которых приведен в конце автореферата [1,2].

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, двух глав и списка литературы. Текст диссертации изложен на 68 страницах. Список литературы содержит 57 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение. Во введении дана краткая историческая справка и сформулированы ключевые результаты, полученные автором.

Глава 1. Первая глава "Теорема о среднем И.М.Виноградова в кольце гауссовых чисел"состоит из трех параграфов. В параграфе 1 даны основные определения, сформулированы и доказаны важные свойства величины $J(P; n, k)$, которые будут постоянно использоваться в дальнейшем изложении. Далее даны некоторые свойства простых гауссовых чисел. Также в этом параграфе доказаны две леммы о числе решений некоторых систем сравнений по модулю равному простому гауссовому числу или его степеням. А именно верны

Лемма 1.11. Рассмотрим следующую систему сравнений

$$\begin{cases} \lambda_1 + \ldots + \lambda_n \equiv \nu_1 \pmod{\pi}, \\ \lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2 \equiv \nu_2 \pmod{\pi}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda_1^n + \ldots + \lambda_n^n \equiv \nu_n \pmod{\pi}, \end{cases}$$

где π — простое гауссово число, такое, что $\mathrm{N}\pi > n$, $\mathrm{N}\pi \equiv 1 \pmod 4$, а неизвестные $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ пробегают полную систему вычетов по модулю π. Пусть T — число решений этой системы. Тогда $T \leqslant n!$.

Лемма 1.12. Рассмотрим следующую систему сравнений

$$\begin{cases} \lambda_1 + \ldots + \lambda_n \equiv \nu_1 \pmod{\pi}, \\ \lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2 \equiv \nu_2 \pmod{\pi^2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_1^n + \ldots + \lambda_n^n \equiv \nu_n \pmod{\pi^n}. \end{cases}$$

Пусть также π простое гауссово число и $\mathrm{N}\pi > n$, $\mathrm{N}\pi \equiv 1 \pmod 4), \lambda_i \not\equiv \lambda_j \pmod{\pi}, i \neq j, |\lambda_i| < \frac{4}{3}|\pi|^n$. Пусть S число решений этой системы. Тогда $S \leqslant n!(37)^n(\mathrm{N}\pi)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Параграф 2 содержит вариант основного рекуррентного неравенства, которое доказано с помощью p-адического метода А.А. Карацубы:

Лемма 1.16. Пусть $k \geqslant n, \quad 1 \leqslant r \leqslant n, \quad P > 1$.

Тогда существует простое число $q \in \mathbb{Z}[i]$, удовлетворяющее условию $\mathrm{N}q \in [P^{\frac{1}{r}}, 2P^{\frac{1}{r}}]$ такое, что

$$J(P; n, k) \leqslant 4^r k^{2(r+1)} (\mathrm{N}q)^{2(k-r)+\frac{(2r-n)(2r-n-1)}{2}} P^r J(P_1; n, k-r) +$$

$$+ 9 \cdot 2^{2k-r} r^{r(k+1)} P^{k-1},$$

где $P_1 = 2(\frac{P}{\mathrm{N}q} + 1)$.

Параграф 3 посвящен формулировке и доказательству теоремы о среднем значении И.М.Виноградова для тригонометрической суммы по гауссовым числам. Доказательство проведено методом математической индукции при помощи основного рекуррентного неравенства. Эта теорема дает оценку тригонометрического интеграла $J(P; n, k)$ в точках рекуррентным образом определяемой последовательности k_s: $k_1 = n$, $\Delta_1 = n$, r_1 — ближайшее целое к числу $z_1 = \frac{n^2+3n}{2n+1}$. Далее определяем

$$k_s = k_{s-1} + r_{s-1} = n + r_1 + \ldots + r_{s-1},$$

$$\Delta_s = \Delta_{s-1} + r_{s-1} - \frac{(2r_{s-1} - n - 1)(2r_{s-1} - n)}{2r_{s-1}} - \frac{\Delta_{s-1}}{r_{s-1}},$$

r_s как ближайшее целое к числу

$$z_s = \frac{2\Delta_s + n(n+1)}{2n+1}$$

(если дробная часть $\{z_s\} = 1/2$, то $r_s = [z_s]$, где $[z] = z - \{z\}$). Эти последовательности были введены в работе О.В. Тыриной [45]. В нашей работе получены свои доказательства свойств этих последовательностей, а именно, что последовательность $\{\Delta_s\}$ является возрастающей, а последовательность $\{r_s\}$ неубывающей, при $n > 2$, а также, что

$$\lim_{s\to+\infty} \Delta_s = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \lim_{s\to+\infty} r_s = n, \quad \lim_{s\to+\infty} z_s = \frac{2n(n+1)}{2n+1}.$$

Основным результатом первой главы является следующая

Теорема 1.1. Пусть $n \geqslant 5$. При $k = k_s, s = 1, 2, \ldots$ для среднего значения $J(P; n, k)$ имеет место оценка

$$J(P; n, k) = J(P; n, k_s) \leqslant D_{k_s} P^{2k-\Delta_s},$$

где

$$D_{k_1} = D_n = (4k_1)^{2(k_1+\frac{2k_1}{n})} = (4n)^{2n+4},$$
$$D_{k_s} = 2^{A(s)}(2n)^{2\Delta_s r_s}(4k_s)^{2(k_s+\frac{2k_s}{n})},$$

для $s > 1$, при

$$A(s) = \sum_{i=1}^{s-1} \left(\Delta_i + \frac{n(n-1)}{2}\right).$$

При этом, если $k = k_s = k(n) + nt$, $t = 0, 1, \ldots$, то

$$\frac{n(n+1)}{2} > \Delta_s \geqslant \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^t,$$

где $k(n)$, то k_s, начиная с которого $\Delta_s \geqslant \frac{n^2}{2}$.

Отметим, что в промежуточных точках, лежащих между точками последовательности $\{k_s\}$, оценку тригонометрического интеграла $J(P; n, k)$ дает следующая

Теорема 1.2. Пусть условия и утверждения теоремы 1 справедливы. Тогда для любых натуральных $k = k_{s'}$ таких, что $k_s < k_{s'} < k_{s+1}$, $s = 1, 2, \ldots$ для среднего значения $J(P; n, k)$ имеет место оценка

$$J(P; n, k) = J(P; n, k_{s'}) \leqslant \left(D_{k_{s+1}} P^{2k-\Delta_{s+1}}\right)^{\chi_1} \left(D_{k_s} P^{2k-\Delta_s}\right)^{\chi_2},$$

где

$$\chi_1 = \frac{k_{s+1} - k_{s'}}{k_{s+1} - k_s}, \quad \chi_2 = \frac{k_{s'} - k_s}{k_{s+1} - k_s}.$$

Глава 2. Вторая глава "Оценка тригонометрической суммы Г. Вейля по гауссовым числам"посвящена выводу оценки тригонометрической суммы

$$S = \sum_{N\lambda<P} e^{\pi i \mathrm{Sp}(f(\lambda))} = \sum_{N\lambda<P} e^{\pi i \mathrm{Sp}(\alpha_n\lambda^n+\ldots+\alpha_n\lambda)},$$

где $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{Z}[i]$, $\mathrm{N}\lambda = |\lambda|^2$, $\mathrm{Sp}(\zeta) = 2\mathrm{Re}(\zeta) = \zeta + \overline{\zeta}$, в малых окрестностях рациональных гауссовых чисел, наименьшее общее кратное которых превышает некоторую положительную степень длины интервала суммирования. Данная оценка зависит от теоремы о среднем значении И.М. Виноградова главы 1 и от оценки кратности пересечения окрестностей, указанных выше.

В параграфе 1 рассмотрены некоторые свойства тригонометрических сумм Г. Вейля по гауссовым числам.

Параграф 2 содержит формулировку и доказательство леммы о пересечении областей

Лемма 2.5. Пусть $P \geqslant n^{n^2}$ и каждому гауссовому числу μ отвечает своя точка $\Gamma(\mu) = (\Gamma^R_{n-1}(\mu),\ldots,\Gamma^R_1(\mu),\Gamma^I_{n-1}(\mu),\ldots,\Gamma^I_1(\mu))$ определяемая разложением

$$f(\lambda+\mu)-f(\mu) = \alpha_n\lambda^n + (\Gamma^R_{n-1}(\mu)+\mathrm{i}\Gamma^I_{n-1}(\mu))\lambda^{n-1}+\ldots+(\Gamma^R_1(\mu)+\mathrm{i}\Gamma^I_1(\mu))\lambda$$

многочлена $f(\lambda+\mu)-f(\mu)$ по степеням λ. Каждому $s = n,\ldots,2$ поставим в соответствие свое число $\tau_s = P^{(s-0,5)/2}$, причем α_s представим в виде

$$\alpha_s = \left(\frac{a^R_s}{q^R_s} + \frac{\theta^R_s}{q^R_s\tau_s}\right) + \mathrm{i}\left(\frac{a^I_s}{q^I_s} + \frac{\theta^I_s}{q^I_s\tau_s}\right),$$

где $(a^R_s, q^R_s) = 1$, $(a^I_s, q^I_s) = 1$, $0 < q^R_s \leqslant \tau_s$, $0 < q^I_s \leqslant \tau_s$, и символами Q^R_0 и Q^I_0 обозначим наименьшие общие кратные чисел $q^R_n,\ldots,q^R_2$ и $q^I_n,\ldots,q^I_2$ соответственно.

Пусть G — число точек, отвечающих числам μ, удовлетворяющих условию $\mathrm{N}\mu \leqslant P$, которые путем добавления к их координатам чисел, численно не превосходящих соответственно

$$L^R_{n-1} = P^{(-n+1)/2},\ldots,L^R_1 = P^{-1/2},\quad L^I_{n-1} = P^{(-n+1)/2},\ldots,L^I_1 = P^{-1/2},$$

могут быть сделаны сравнимыми с точкой, отвечающей какому-либо фиксированному числу μ_0 с условием $\mathrm{N}\mu_0 \leqslant P$.

Тогда имеем

$$G < 2n^{4n-4}P^{0,75+0,4\nu},\ \text{если}\ Q^R_0 \geqslant P^{0,25-0,2\nu}, Q^I_0 \geqslant P^{0,25-0,2\nu},$$

$$G < n^{4n-4}P^{0,5+0,4\nu},\ \text{если}\ Q^R_0 < P^{0,25-0,2\nu}, Q^I_0 < P^{0,25-0,2\nu},$$

$$G < n^{4n-4}\frac{P^{0,5+0,4\nu}}{Q_0^I}, \text{ если } Q_0^R \geqslant P^{0,25-0,2\nu}, Q_0^I < P^{0,25-0,2\nu},$$

$$G < n^{4n-4}\frac{P^{0,5+0,4\nu}}{Q_0^R}, \text{ если } Q_0^R < P^{0,25-0,2\nu}, Q_0^I \geqslant P^{0,25-0,2\nu}.$$

В параграфе 3 выводится оценка тригонометрической суммы по гауссовым числам в малых окрестностях рациональных гауссовых чисел, наименьшее общее кратное которых превышает некоторую положительную степень длины интервала суммирования. Верна следующая

Теорема 2.1. Пусть $n \geqslant 5$, $P \geqslant n^{n^2}$ и каждому $s = n, \ldots, 2$ поставлено в соответствие свое число $\tau_s = P^{(s-0,5)/2}$, причем $\alpha_s = \alpha_s^R + \mathrm{i}\alpha_s^I$ и каждые α_s^R и α_s^I, $s = n, \ldots, 2$ представлены в виде

$$\alpha_s^R = \frac{a_s^R}{q_s^R} + \frac{\theta_s^R}{q_s^R\tau_s}, \quad a_s^R, q_s^R \in \mathbb{Z}, \quad (a_s^R, q_s^R) = 1, \quad 0 < q_s^R \leqslant \tau_s,$$

$$\alpha_s^I = \frac{a_s^I}{q_s^I} + \frac{\theta_s^I}{q_s^I\tau_s}, \quad a_s^I, q_s^I \in \mathbb{Z}, \quad (a_s^I, q_s^I) = 1, \quad 0 < q_s^I \leqslant \tau_s.$$

При этом предполагаем, что наименьшее общее кратное Q_0^R чисел $q_n^R, \ldots, q_2^R$ удовлетворяет условию $Q_0^R > P^{0,25-0,2\nu}$, а наименьшее общее кратное Q_0^I чисел $q_n^I, \ldots, q_2^I$ удовлетворяет условию $Q_0^I > P^{0,25-0,2\nu}$. Пусть, также,

$$\rho^{-1} = 8n^2(\ln n + 0,5\ln\ln n + 0,75).$$

Тогда имеем

$$|S| = \left|\sum_{N\lambda<P} e^{\pi i \mathrm{Sp}(f(\lambda))}\right| < c(n)P^{1-\frac{\rho}{2}}, \quad c(n) = 2^{4n+5}n^{2n+12}.$$

Благодарности

Автор благодарит своего научного руководителя профессора Чубарикова В.Н. за постановку задачи, постоянное внимание и поддержку, а также сотрудников кафедры математического анализа.

Список литературы

[1] Сорокин П. Н. *Теорема о среднем значении модуля тригонометрической суммы в кольце гауссовых чисел*: Евразийский Математический журнал, Астана, Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, 2006, № 2, — с. 72-85.

[2] Сорокин П. Н. *Теорема о среднем И. М. Виноградова для тригонометрической суммы по гауссовым числам*: Вестн. Моск. ун-та, Сер. 1, Математика. Механика, 2007, № 6, — с. 63 - 65.