МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи
УДК 517.982.256

Васильева Анастасия Андреевна

АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА ВЕСОВЫХ КЛАССОВ СОБОЛЕВА.

Специальность 01.01.01 — математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2008

Работа выполнена на кафедре математического анализа механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор И.Г. Царьков

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Г.Г. Магарил-Ильяев

кандидат физико-математических наук, доцент А.В. Скориков

Ведущая организация: Институт математики и механики Уральского отделения РАН

Защита диссертации состоится 17 октября 2008 г. в 16 час. 40 мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.85 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 17 сентября 2008 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д.501.001.85 при МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор И.Н. Сергеев

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Весовые пространства Соболева на отрезке числовой прямой и в области пространства появились при изучении дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами и в задачах продолжения функций с многообразия.

Важным направлением исследования весовых пространств Соболева является изучение теорем вложения и таких характеристик вложения, как колмогоровские поперечники и аппроксимативные числа.

В ряде работ рассматривалась задача о непрерывности и компактности оператора вложения весового класса Соболева $W^r_{q,g}$ с нулевыми граничными условиями на одном из концов отрезка в пространство $L_{p,v}$ с весом. Эта задача эквивалентна задаче о непрерывности (компактности) двухвесового оператора Римана–Лиувилля из пространства L_q в L_p. При $r = 1$ критерий непрерывности вложения получили Б. Макенхаупт[1] (случай $p = q$), Брэдли[2], В.Г. Мазья[3] и В.М. Кокилашвили[4]. Для произвольных $r \geqslant 1$ (включая нецелые) критерий ограниченности и компактности двухвесового оператора Римана–Лиувилля был получен В.Д. Степановым[5, 6, 7].

Понятие колмогоровского поперечника было введено А.Н. Колмогоровым[8] в 1936 году. В 60–70-е годы XX века изучались задачи о значениях поперечников конечномерных шаров и функциональных классов. Точные значения колмогоровских и линейных поперечников конечномерных шаров B^n_q в пространстве l^n_p были найдены А. Пичем[9] и М.И. Стесиным[10] (случай $p \leqslant q$), А.Н. Колмогоровым, А.А. Пет-

---

[1] *Muckenhoupt B.* Hardy's inequality with weights. — Studia Math., 1972. V. 44, N 1. P. 31–38.

[2] *Bradley J.S.* Hardy inequalities with mixed norms. — Canad. Math. Bull., 1978. V. 21, N 1. P. 405–408.

[3] *Мазья В.Г.* Пространства С.Л. Соболева. Л., Изд-во ЛГУ, 1985.

[4] *Кокилашвили В.М.* О неравенствах Харди в весовых пространствах. — Сообщ. АН ГССР. 1979. Т. 96, N 1. С. 37–40.

[5] *Stepanov V.D.* Two-weighted estimates for Riemann-Liouville integrals. — Rept. 39, Ceskoslov. Akad. Věd. Mat. Ústav. Praha, 1988. P. 1–28.

[6] *Батуев Э.Н., Степанов В.Д.* О весовых неравенствах типа Харди. — Сиб. мат. ж. 1989. Т. 30, N 1. С. 13–22.

[7] *Степанов В.Д.* Двухвесовые оценки интегралов Римана–Лиувилля. — Изв. АН СССР, сер. мат. 1990. Т. 54, N 3. С. 645–655

[8] *Колмогоров А.Н.* Über die beste Annäherung von Funktion einer gegebenen funktionenklasse. Ann. Math. 1936. V. 37, P. 107–110.

[9] *Pietsch A.* s-numbers of operators in Banach space. Studia Math. 1974. V. 51. P. 201–223.

[10] *Стесин М.И.* Александровские поперечники конечномерных множеств и классов гладких функций. ДАН СССР. 1975. Т. 220, N 6. С. 1278–1281.

ровым, Ю.М. Смирновым[11] и С.Б. Стечкиным[12] (случай $p = 2$, $q = 1$). Для остальных q, p, $q < p$, поведение величин $d_m(B_q^n, l_p^n)$, $\lambda_m(B_q^n, l_p^n)$ известно лишь по порядку (за исключением интервала $q \in [1, 2)$, $p = \infty$, на котором для колмогоровских поперечников получены только оценки, точные в степенной шкале). Оценки колмогоровских и линейных поперечников конечномерных шаров изучались в работах М.З. Соломяка, В.М. Тихомирова[13], Р.С. Исмагилова[14], в ключевых для этой тематики работах Б.С. Кашина[15, 16, 17] и других. Наиболее полный на настоящий момент результат, соединяющий все известные оценки величин колмогоровских и линейных поперечников, был получен Е.Д. Глускиным[18]. Порядки колмогоровских поперечников соболевских классов $W_q^r[0, 1]$ в пространстве $L_p[0, 1]$ при различных соотношениях на p и q были найдены в работах В.М. Тихомирова[19, 20], Ю.И. Маковоза[21] (случай $p \leqslant q$), Р.С. Исмагилова[14] (случай $1 \leqslant q < p \leqslant 2$) и Б.С. Кашина[15] (случай $p > \max\{2, q\}$). В последнем случае использовался метод дискретизации, предложенный В.Е. Майоровым[22]. При $p \leqslant q$ задача о точных значениях величин $d_n(W_q^r[0, 1], L_p[0, 1])$ с различными граничными условиями рассматривалась в работах А.Н. Колмогорова[8], В.М. Тихомирова[19], Ю.Н. Субботина[23], и была окончательно решена

[11] *Колмогоров А.Н., Петров А.А., Смирнов Ю.М.* Одна формула Гаусса из теории метода наименьших квадратов. Изв. АН СССР, сер. мат. 1947. Т. 11, N 6. С. 561–566.

[12] *Стечкин Б.С.* О наилучшем приближении заданных классов функций любыми полиномами. Успехи мат. наук. 1954. Т. 9 N 1 (53). С. 133–134.

[13] *Соломяк М.З., Тихомиров В.М.* О геометрических характеристиках вложения классов W_p^α в C. Изв. вузов. 1967. N 10. С. 76–82.

[14] *Исмагилов Р.С.* Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение тригонометрическими многочленами. Успехи мат. наук. 1974. Т. 29, N 3. С. 161–178.

[15] *Кашин Б.С.* Поперечники некоторых конечномерных множеств и классов гладких функций. Изв. АН СССР, сер. мат. 1977. Т. 41 N 2. С. 234–251.

[16] *Кашин Б.С.* О колмогоровских поперечниках октаэдров. ДАН СССР. 1974. Т. 214, N 5. С. 1024–1026.

[17] *Кашин Б.С.* О поперечниках октаэдров. Успехи матем. наук. 1975. Т. 30, N 4. С. 251–252.

[18] *Глускин Е.Д.* Нормы случайных матриц и поперечники конечномерных множеств. Мат. сборник. 1983. Т. 120 (162), N 2. С. 180–189.

[19] *Тихомиров В.М.* Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория приближений. Успехи мат. наук. 1960. Т. 15 N 3. С. 81–120.

[20] *Бабаджанов С.Б., Тихомиров В.М.* О поперечниках одного класса в пространстве L^p. Изв. АН Узб. ССР, сер. физ.-мат. 1967. Т. 2. С. 24–30.

[21] *Маковоз Ю.И.* Об одном приеме оценки снизу поперечников множеств в банаховом пространстве. Мат. сборник. 1972. Т. 87 (129), N 1. С. 136–146.

[22] *Майоров В.Е.* Дискретизация задачи о поперечниках. Успехи математических наук. 1975. Т. 30, N 6. С. 179–180.

[23] *Субботин Ю.Н.* Поперечник класса W^rL в $L(0, 2\pi)$ и приближение сплайн-функциями.

А.П. Буслаевым и В.М. Тихомировым[24]. В последней работе была установлена связь колмогоровских поперечников соболевских классов и спектров нелинейных дифференциальных уравнений. В дальнейшем А.П. Буслаев[25] обобщил эти результаты на случай весовых пространств с кусочно-непрерывными положительными весами.

В случае, когда двухвесовой оператор Римана–Лиувилля ограничен на пространстве L_q, по нему естественным образом строится оператор вложения весового соболевского класса в $L_{p,v}$. При этом аппроксимативные числа оператора вложения и оператора Римана–Лиувилля совпадают. При $r = 1$, $p = q$ оценкой аппроксимативных чисел оператора Римана–Лиувилля занимались Д.Э. Эдмундс, Р. Керман, В.Д. Эванс, Д.Дж. Харрис и Я. Ланг[26, 27, 28, 29, 30]. Случай $r = 1$, $p < q$ рассматривался в работе Д.Э. Эдмундса и Я. Ланга[31], где была получена асимптотика по n. При $r = 1$, $p > q$ верхнюю и нижнюю оценки аппроксимативных чисел получили Я. Ланг, О. Мендез и А. Неквинда[32]. При $r > 1$, $r \in \mathbb{N}$, в работе В.Д. Степанова и Е.Н. Ломакиной[33] был рассмотрен одновесовой случай (когда вес g соболевского класса $W^r_{q,g}$ тождественно равен единице), и для него были получены порядки по n (а в случаях $p \leqslant q$, $1 < q < p \leqslant 2$ и $2 \leqslant q < p < \infty$ — и по v).

Таким образом, двухвесовой случай, когда $r > 1$ и веса имеют достаточно общий вид, не был рассмотрен. Отметим также, что в

Мат. заметки. 1970. Т. 7, N 1. С. 43–52.

[24] *Буслаев А.П., Тихомиров В.М.* Спектры нелинейных дифференциальных уравнений и поперечники соболевских классов. Мат. сборник. 1990. Т. 181, N 12. С. 1587–1606.

[25] *Буслаев А.П.* Об асимптотике поперечников и спектров нелинейных дифференциальных уравнений. Алгебра и анализ. 1991. Т.3, N 6. С. 108–118.

[26] *Edmunds D.E., Kerman R., Lang J.* Remainder estimates for the approximation numbers of weighted Hardy operators acting on L^2. J. Anal. Math. 2001. V. 85. P. 225–243.

[27] *Lang J.* Estimates for the approximation numbers and n-widths of the weighted Hardy-type operators. Preprint J. Appr. Theory, 2004.

[28] *Lang J.* Improved estimates for the approximation numbers of Hardy-type operators. J. Appr. Theory. 2003. V. 121, N 1. P. 61–70.

[29] *Evans W.D., Harris D.J., Lang J.* Two-sided estimates for the approximation numbers of Hardy-type operators in L^∞ and L^1. Studia Math. 1998. V. 130. P. 171–192.

[30] *Edmunds D.E., Lang J.* Operators of Hardy type. J. Comp. Appl. Math. 2007. V. 208, issue 1. P. 20–28.

[31] *Edmunds D.E., Lang J.* Approximation numbers and Kolmogorov widths of Hardy-type operators in a non-homogeneous case. Math. Nachr. 2006. V. 297, N 7. P. 727–742

[32] *Lang J., Mendez O., Nekvinda A.* Asymptotic behavior of the approximation numbers of the Hardy-type operator fron L^p to L^q (case $1 < p \leqslant q \leqslant 2$ or $2 \leqslant p \leqslant q < \infty$). J. Ineq. Pure Appl. Math. 2004. V.5, N. 1. Article 18.

[33] *Ломакина Е.Н., Степанов В.Д.* Асимптотическая оценка аппроксимативных и энтропийных чисел одновесового оператора Римана–Лиувилля. Матем. труды. 2006. Т.9, N 1. С. 52–100.

вышеуказанных работах ограничения, накладываемые на веса, приводили к тому, что соответствующие порядки аппроксимативных чисел и колмогоровских поперечников совпадали с порядками аппроксимативных чисел и колмогоровских поперечников в невесовом случае. При этих условиях на веса оператор Римана–Лиувилля ограничен и, тем самым, случай, когда этот оператор неограничен, а поперечники конечны, рассмотрен не был.

Цель работы. Цель работы состоит в том, чтобы найти порядки или значения колмогоровских поперечников весовых классов Соболева в пространстве $L_{p,v}$ и аппроксимативных чисел оператора вложения при достаточно широких условиях на веса, а в случае равномерной метрики — исследовать также свойства класса, возникающего в задачах с фазовыми ограничениями.

Методы исследований. В работе использованы методы теории функций и теории аппроксимации.

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Показано, что колмогоровский поперечник класса $W^1_{\infty,g}[a,\, b]$ в пространстве $L_p[a,\, b]$ совпадает с величиной наилучшего приближения в метрике $L_p[a,\, b]$ первообразной функции g кусочно-постоянными функциями с n нефиксированными промежутками постоянства.
2. Для достаточно широкого класса весов найдены порядки колмогоровских поперечников $W^r_{q,g}[a,\, b]$ в пространстве $L_{p,v}[a,\, b]$ и аппроксимативных чисел соответствующего оператора вложения. При $p \leqslant q$ получена асимптотика поперечников и аппроксимативных чисел вложения этих классов, а также установлена связь поперечников со спектром нелинейных дифференциальных уравнений.
3. Получен критерий непустоты пересечения класса $W^1_{\infty,g}[a,\, b]$ с множеством гладких функций, удовлетворяющих поточечным ограничениям на их значения. Найдены порядки поперечников класса функций из $W^1_{\infty,g}[a,\, b]$ с заданными значениями в концах отрезка в пространстве $L_\infty[a,\, b]$.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут найти применение в теории приближения функций, вычислительной математике и теории дифференциальных уравнений.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались неоднократно на семинарах по теории приближения под руководством д.ф.-м.н., профессора И.Г. Царькова в 2006 — 2008 г., на семинаре по теории ортогональных рядов под руководством чл.-корр. РАН, профессора Б.С. Кашина и профессора С.В. Конягина в 2007 и 2008 гг., на семинаре по бесконечномерному анализу и математической физике под руководством д.ф.-м.н., профессора О.Г. Смолянова и д.ф.-м.н., профессора Е.Т. Шавгулидзе в 2008 г., на семинаре по теории ортогональных рядов под руководством профессора М.К. Потапова и профессора М.И. Дьяченко в 2008 г., на международных школах по теории функций им. С.Б. Стечкина (Алексин, 2007; Миасс, 2008), на 14-й Саратовской зимней школе по теории функций (Саратов, 2008), на международной школе-семинаре по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова (Абрау-Дюрсо, 2008).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 5 работах автора, список которых приведен в конце автореферата. Работ, написанных в соавторстве, нет.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, двух глав и списка литературы, содержащего 113 наименований. Общий объем диссертации составляет 130 страниц. Нумерация теорем в автореферате совпадает с нумерацией теорем в диссертации.

Краткое содержание диссертации

Во **введении** содержится обзор исследований по тематике диссертации, приводятся определения основных используемых понятий, непосредственно связанных с темой диссертации.

Первая глава состоит из 6 параграфов. В ней оцениваются колмогоровские поперечники весовых классов Соболева в пространстве $L_{p,v}$ и аппроксимативные числа соответствующих операторов вложения.

Через $L_0(J)$ будем обозначать пространство измеримых функций на числовом промежутке J.

Определим весовой класс Соболева на отрезке или полуоси J для некоторого неотрицательного измеримого веса g, положив

$$W^r_{q,g}(J) = \left\{ f : J \to \mathbb{R} \,\middle|\, f^{(r-1)} \in AC(J),\ \left\| \frac{f^{(r)}}{g} \right\|_{L_q(J)} \leqslant 1 \right\}$$

и считая по определению, что если $g(x) = 0$ на множестве $E \subset J$ положительной меры, то $\frac{f^{(r)}(x)}{g(x)} = 0$ при $x \in E$.

В частности,

$$W^r_{\infty,g}(J) = \left\{ f : J \to \mathbb{R} \,\middle|\, f^{(r-1)} \in AC(J),\ |f^{(r)}(t)| \leqslant g(t) \text{ п.в.} \right\}.$$

Для неотрицательного измеримого веса $v : J \to \mathbb{R}$ обозначим через $L_{0,p,v}(J)$ пространство измеримых функций $f : J \to \mathbb{R}$ с полунормой $\|f\|_{p,v} := \|vf\|_{L_p(J)} \in \overline{\mathbb{R}}$, через $L_{p,v}(J)$ — подпространство в $L_{0,p,v}(J)$, состоящее из функций f таких, что $\|f\|_{p,v} < \infty$.

Пусть X, Y — нормированные пространства. Обозначим $\mathcal{L}_n(X)$ множество всех подпространств в X размерности не больше n, $L(X, Y)$ — множество всех линейных непрерывных операторов $A : X \to Y$, $\operatorname{rk} A$ — размерность образа оператора $A \in L(X, Y)$.

Колмогоровским n-поперечником множества $M \subset X$ в пространстве X с полунормой $\|\cdot\|_X$ (возможно, принимающей бесконечные значения) называется величина

$$d_n(M, X) = \inf_{L_n \in \mathcal{L}_n(X)} \sup_{x \in M} \inf_{y \in L_n} \|x - y\|_X.$$

Линейным n-поперечником множества $M \subset X$ в нормированном пространстве X называется величина

$$\lambda_n(M, X) = \inf_{A \in L(X, X),\, \operatorname{rk} A \leqslant n} \sup_{x \in M} \|x - Ax\|_X.$$

Аппроксимативные числа оператора $A \in L(X, Y)$ определяются как

$$\mathcal{A}_n(A) = \inf\{\|A - A_n\|_{X \to Y} : \operatorname{rk} A_n \leqslant n\}.$$

Если $\dim Y < \infty$ и $\ker A = \{0\}$, то $\mathcal{A}_n(A) = \lambda_n(AB_X, Y)$, где $B_X = \{x \in X : \|x\|_X \leqslant 1\}$.

В §**1.1** получены точные значения величин $d_n(W^1_{\infty,g}[a, b], L_p[a, b])$ в терминах наилучшего приближения первообразной функции g в метрике пространства $L_p[a, b]$ кусочно-постоянными функциями.

Предложение 1.1.1. Пусть существуют точки $\{t_i\}_{i=1}^{m-1}$, $a < t_1 < \dots < t_{m-1} < b$, такие, что для любого $j = 1, \dots, m-1$ и для любого $\delta > 0$ функция g не интегрируема на отрезке $[t_j - \delta, t_j + \delta]$, и $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Тогда

$$d_n(W^1_{\infty,g}[a, b], L_p[a, b]) = \infty,\ n \leqslant m - 1.$$

Пусть $\{t_k\}_{k=1}^{m-1}$ — множество всех точек из интервала (a, b), в любой окрестности которых функция g не интегрируема, $t_0 = a$, $t_m = b$, $t_{k-1} < t_k$ для любого $k \in \{1, \ldots, m\}$. Выберем $\alpha_k \in (t_k, t_{k+1})$ произвольным образом и положим

$$G(t) = \int\limits_{\alpha_k}^{t} g(s)\, ds,\ t \in (t_k,\, t_{k+1}).$$

Пусть $n \geqslant m$. Обозначим через $S_n = S_n[a, b]$ множество функций $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ таких, что существует разбиение $a = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_{n-1} < \tau_n = b$, являющееся измельчением $\{t_k\}_{k=0}^{m}$ и удовлетворяющее условию $\varphi|_{(\tau_{j-1}, \tau_j)} \equiv \mathrm{const}$.

Теорема 1.1.1. Пусть $n \geqslant m$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Тогда

$$d_n(W^1_{\infty,g}[a, b],\, L_p[a, b]) = \inf_{\varphi \in S_n} \|G - \varphi\|_p.$$

Введем понятие порядкового неравенства. Пусть X, Y — множества, f_1, $f_2 : X \times Y \to \mathbb{R}_+$. Скажем, что $f_1(x, y) \underset{y}{\lesssim} f_2(x, y)$ ($f_2(x, y) \underset{y}{\gtrsim} f_1(x, y)$), если существует положительная функция $c : Y \to \mathbb{R}$ такая, что $f_1(x, y) \leqslant c(y) f_2(x, y)$ для любого $x \in X$; $f_1(x, y) \underset{y}{\asymp} f_2(x, y)$, если $f_1(x, y) \underset{y}{\lesssim} f_2(x, y) \underset{y}{\lesssim} f_1(x, y)$. Наряду с символами $\underset{y}{\lesssim}$, $\underset{y}{\gtrsim}$ и $\underset{y}{\asymp}$ (означающими, что константа c в порядковом неравенстве может зависеть только от y), нам будет удобно использовать эквивалентные им символы $\overset{x}{\lesssim}$, $\overset{x}{\gtrsim}$ и $\overset{x}{\asymp}$ (означающие, что константа не зависит от x). Для f_1, $f_2 : X \to \mathbb{R}_+$ будем обозначать $f_1(x) \lesssim f_2(x)$ ($f_2(x) \gtrsim f_1(x)$), если существует число $c \in (0, \infty)$ такое, что $f_1(x) \leqslant c f_2(x)$ для любого $x \in X$; $f_1(x) \asymp f_2(x)$, если $f_1(x) \lesssim f_2(x) \lesssim f_1(x)$.

Положим

$$L_p^{\mathrm{loc}}[a, b) = \{f \in L_0[a, b] : \forall c < b\ f \in L_p[a, c]\},$$

$$L_p^{\mathrm{loc}}(a, b] = \{f \in L_0[a, b] : \forall c > a\ f \in L_p[c, b]\}.$$

В §**1.2** получен критерий существования непрерывного вложения в $L_{p,v}[a, b]$ класса, являющегося факторизацией класса $W^r_{q,g}[a, b]$ по некоторому конечномерному подпространству измеримых функций. Затем определяется класс $\hat{W}^r_{q,g}[a,\, b]$, являющийся специально выбранной факторизацией $W^r_{q,g}[a,\, b]$ по пространству кусочно-полиномиальных функций степени не выше $r-1$. Под непрерывностью вложения мы будем понимать конечность величины

$$d_n(W^r_{q,g},\, L_{0,p,v}) = \inf_{L\in\mathcal{L}_n(L_0)} \sup_{f\in W^r_{q,g}} \inf_{\varphi\in L} \|f-\varphi\|_{L_{p,v}}$$

для некоторого $n\in\mathbb{Z}_+$. Компактность вложения понимается как стремление к нулю последовательности величин $d_n(W^r_{q,g},\, L_{0,p,v})$.

Оказывается, что если $d_n(W^r_{q,g},\, L_{0,p,v})<\infty$ для некоторого n, то существует естественный способ определения оператора непрерывного или компактного вложения, состоящий в замене класса $W^r_{q,g}$ приведенным соболевским классом $\hat{W}^r_{q,g}$ и определении такого оператора на $\hat{W}^r_{q,g}$. Для этого нам понадобятся две теоремы.

Теорема 1.2.1. Пусть $1<q\leqslant\infty$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, $r\in\mathbb{N}$, g, $v\in L_0([a,\, b],\, \mathbb{R}_+)$ и $d_n(W^r_{q,g}[a,\, b],\, L_{0,p,v}[a,\, b])<\infty$ для некоторого $n\in\mathbb{N}$. Тогда существует разбиение $\{[\alpha_i,\, \beta_i]\}_{i=1}^{i_0}$ отрезка $[a,\, b]$, $i_0 \underset{r}{\lesssim} n$, такое, что для каждого $i=1,\, \dots,\, i_0$ выполнено одно из следующих условий:

1. $g|_{[\alpha_i,\, \beta_i]}=0$;
2. $v|_{[\alpha_i,\, \beta_i]}=0$;
3. $g\in L_{\frac{q}{q-1}}[\alpha_i+\delta,\, \beta_i-\delta]$ и $v\in L_p[\alpha_i+\delta,\, \beta_i-\delta]$ для любого $\delta>0$.

Для формулировки второй теоремы потребуются дополнительные обозначения. Пусть g, $v\in L_0([a,\, b],\, \mathbb{R}_+)$, $\mathcal{L}_g=\{f\in L_0[a,\, b]:\, fg\in L_1[a,\, b]\}$, $r\in\mathbb{N}$. Зададим отображения $I_{r,g,v,a}$ и $\tilde{I}_{r,g,v,b}:\mathcal{L}_g\to L_0[a,\, b]$ формулами

$$(I_{r,g,v,a}f)(t) = v(t)\int\limits_a^t (t-x)^{r-1}g(x)f(x)\,dx,$$

$$(\tilde{I}_{r,g,v,b}f)(t) = v(t)\int\limits_t^b (x-t)^{r-1}g(x)f(x)\,dx.$$

Положим $I^{a,b,k}_{r,g,v}=\tilde{I}_{k,1,v,b}\circ I_{r-k,g,1,a}$, $\tilde{I}^{a,b,k}_{r,g,v}=I_{k,1,v,a}\circ\tilde{I}_{r-k,g,1,b}$, $k=1,\, \dots,\, r-1$, $I^{a,b,0}_{r,g,v}=\tilde{I}^{a,b,r}_{r,g,v}=I_{r,g,v,a}$, $I^{a,b,r}_{r,g,v}=\tilde{I}^{a,b,0}_{r,g,v}=\tilde{I}_{r,g,v,b}$.

Теорема 1.2.2. Предположим, что $r \in \mathbb{N}$, $1 < q \leqslant \infty$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

1. Пусть $g \in L^{\mathrm{loc}}_{\frac{q}{q-1}}[a, b)$, $v \in L^{\mathrm{loc}}_p[a, b)$. Тогда для существования $n \in \mathbb{N}$ такого, что $d_n(W^r_{q,g}[a, b], L_{0,p,v}[a, b]) < \infty$, необходимо и достаточно существования $k \in \{0, \dots, r\}$ такого, что
$$\|I^{a,b,k}_{r,g,v}\|_{L_q[a,b]\to L_p[a,b]} < \infty.$$

2. Пусть $g \in L^{\mathrm{loc}}_{\frac{q}{q-1}}(a, b]$, $v \in L^{\mathrm{loc}}_p(a, b]$. Тогда для существования $n \in \mathbb{N}$ такого, что $d_n(W^r_{q,g}[a, b], L_{0,p,v}[a, b]) < \infty$, необходимо и достаточно существования $k \in \{0, \dots, r\}$ такого, что
$$\|\tilde{I}^{a,b,k}_{r,g,v}\|_{L_q[a,b]\to L_p[a,b]} < \infty.$$

Теперь перейдем к построению приведенного соболевского класса. Пусть $d_n(W^r_{q,g}, L_{0,p,v}) < \infty$. Из теорем 1.2.1 и 1.2.2 следует, что существует разбиение $T_* = \{[\alpha_i, \beta_i]\}_{i=1}^{i_0}$ отрезка $[a, b]$ такое, что $i_0 \underset{r}{\lesssim} k$, $\{1, \dots, i_0\} = \cup_{\nu=1}^4 I_\nu$, $i \in I_1$, если $v|_{[\alpha_i,\beta_i]} \equiv 0$, $i \in I_2$, если $g|_{[\alpha_i,\beta_i]} \equiv 0$ и $i \notin I_1$,
$$i \in I_3,\ \text{если } g \in L^{\mathrm{loc}}_{\frac{q}{q-1}}[\alpha_i, \beta_i),\ v \in L^{\mathrm{loc}}_p[\alpha_i, \beta_i) \text{ и } i \notin I_1 \cup I_2,$$
$$i \in I_4,\ \text{если } g \in L^{\mathrm{loc}}_{\frac{q}{q-1}}(\alpha_i, \beta_i],\ v \in L^{\mathrm{loc}}_p(\alpha_i, \beta_i] \text{ и } i \notin I_1 \cup I_2 \cup I_3.$$
При этом, если $i \in I_3$, то $\|I^{k_i,\alpha_i,\beta_i}_{r,g,v}\|_{L_q[\alpha_i,\beta_i]\to L_p[\alpha_i,\beta_i]} < \infty$ для некоторого $k_i \in \{0, \dots, r\}$; если $i \in I_4$, то $\|\tilde{I}^{k_i,\alpha_i,\beta_i}_{r,g,v}\|_{L_q[\alpha_i,\beta_i]\to L_p[\alpha_i,\beta_i]} < \infty$ для некоторого $k_i \in \{0, \dots, r\}$.

Пространство сплайнов, по которому будет проводиться факторизация, определим как
$$S(r-1, [a, b], T_*) = \{s \in L_0[a, b] : s|_{(\alpha_i,\beta_i)} \in \mathcal{P}_{r-1}(\alpha_i, \beta_i),\ i = \overline{1, i_0}\},$$
где $\mathcal{P}_{r-1}(\Delta)$ — множество полиномов степени не выше $r-1$ на интервале Δ.

Скажем, что функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ принадлежит классу $\hat{W}^r_{q,g}[a, b]$, если существует функция φ такая, что $\|\varphi\|_{L_q[a,b]} \leqslant 1$ и $\frac{f^{(r)}}{g}\Big|_{(\alpha_i,\beta_i)} = \varphi|_{(\alpha_i,\beta_i)}$ при $i \in I_1$, $f|_{(\alpha_i,\beta_i)} = 0$ при $i \in I_2$, $f|_{(\alpha_i,\beta_i)} = c^{-1}_{r,k_i} I^{k_i,\alpha_i,\beta_i}_{r,g,v}(\varphi|_{(\alpha_i,\beta_i)})$ при $i \in I_3$, $f|_{(\alpha_i,\beta_i)} = c^{-1}_{r,k_i} \tilde{I}^{k_i,\alpha_i,\beta_i}_{r,g,v}(\varphi|_{(\alpha_i,\beta_i)})$ при

$i \in I_4$, где $c_{r,k_i} = (k_i-1)!(r-k_i-1)!$. Тогда любая функция $h \in W^r_{q,g}[a,\,b]$ представима в виде суммы $h = f+s$, где $f \in \hat W^r_{q,g}[a,\,b]$ и $s \in S(r-1,\,[a,\,b],\,T_*)$.

Пусть X — линейная оболочка класса $\hat W^r_{q,g}[a,\,b]$. Обозначим через $\mathcal{I}_{\hat W^r_{q,g}\to L_{p,v}} : X \to L_{p,v}[a,\,b]$ оператор тождественного вложения.

В §**1.3** получена верхняя оценка для $d_n(\hat W^r_{q,g}[a,\,b],\,L_{p,v}[a,\,b])$ и аппроксимативных чисел соответствующего оператора вложения в случае "регулярных" весов. Введем некоторые обозначения.

Пусть $1 \leqslant p < \infty$, $1 < q \leqslant \infty$, $g \in L^{\rm loc}_{\frac{q}{q-1}}[a,\,b)$, $v \in L^{\rm loc}_p(a,\,b]$ — неотрицательные функции. Положим $G(x) = \int\limits_a^x g^{\frac{q}{q-1}}(t)\,dt$, $V(x) = \int\limits_x^b v^p(t)\,dt$.

Всюду далее будем полагать $\varkappa := \frac{1}{r+\frac1p-\frac1q}$.

Пусть $\rho_g > 1$, $\rho_v > 1$. Для каждого $k \in \mathbb{Z}$ выберем ξ_k и η_k так, чтобы $G(\xi_k) = \rho_g^{k\frac{q}{q-1}}$ (если $G(x) < \rho_g^{k\frac{q}{q-1}}$ для любого x, то полагаем $\xi_k = b$) и $V(\eta_k) = \rho_v^{kp}$ (если $V(x) < \rho_v^{kp}$ для любого x, то полагаем $\eta_k = a$).

Положим $\tilde a = \lim\limits_{k\to-\infty} \xi_k$, $\tilde b = \lim\limits_{k\to-\infty} \eta_k$. Рассмотрим множество $\mathcal{Z}$ концов непустых интервалов $(\xi_j,\,\xi_{j+1}) \cap (\eta_{l+1},\,\eta_l)$. Для любого $\delta > 0$ множество $\mathcal{Z} \cap [\tilde a+\delta,\,\tilde b-\delta]$ конечно. Значит, множество $\mathcal{Z}$ можно упорядочить: $\mathcal{Z} = \{\zeta_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, $\zeta_k < \zeta_{k+1}$. Числа j_k и l_k зададим равенством $[\zeta_k,\,\zeta_{k+1}] = [\xi_{j_k},\,\xi_{j_k+1}] \cap [\eta_{l_k+1},\,\eta_{l_k}]$. Так как $(\xi_j,\,\xi_{j+1}) \cap (\xi_{j'},\,\xi_{j'+1}) = \emptyset$ при $j \neq j'$ и $(\eta_{l+1},\,\eta_l) \cap (\eta_{l'+1},\,\eta_{l'}) = \emptyset$ при $l \neq l'$, то числа j_k и l_k определены однозначно. Положим $\varkappa_1 = \frac{1}{r+\frac1p-1}$, $\varkappa_2 = \frac{1}{r-\frac1q}$.

Теорема 1.3.1. Пусть $r \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p < \infty$, $1 < q \leqslant \infty$, g, $v : [a,\,b] \to \mathbb{R}_+$. Предположим, что выполнено одно из следующих условий:

1. функция g возрастает, функция v убывает и $gv \in L_\varkappa[a,\,b]$;
2. $r = 1$ или функция v убывает; существует такое $\rho_g > 1$, что

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \|v\|^{\varkappa}_{L_{\varkappa_1}[\xi_k,\,\xi_{k+1}]}\rho_g^{k\varkappa} < \infty;$$

3. $r = 1$ или функция g возрастает; существует такое $\rho_v > 1$, что

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \|g\|^{\varkappa}_{L_{\varkappa_2}[\eta_{k+1},\, \eta_k]} \rho_v^{k\varkappa} < \infty;$$

4. $r \geqslant 2$ и $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |\zeta_{k+1} - \zeta_k|^{(r-1)\varkappa} \rho_g^{j_k\varkappa} \rho_v^{l_k\varkappa} < \infty$.

Тогда

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{d_n(\hat{W}^r_{q,g}[a,\, b],\, L_{p,v}[a,\, b])}{d_n(W^r_q[0,\, 1],\, L_p[0,\, 1])} \underset{p,q,r}{\lesssim} \|gv\|_{\varkappa}, \qquad (1)$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\mathcal{A}_n(\mathcal{I}_{\hat{W}^r_{q,g}\to L_{p,v}})}{\lambda_n(W^r_q[0,\, 1],\, L_p[0,\, 1])} \underset{p,q,r}{\lesssim} \|gv\|_{\varkappa}. \qquad (2)$$

Утверждение теоремы 1.3.1 также переносится на случай полуоси $[a,\, +\infty)$ и класса $\hat{W}^r_{q,g}[a,\, +\infty) = \{I_{r,g,v,a}\varphi : \|\varphi\|_q \leqslant 1\}$. Кроме того, если $g \equiv 1$, то методом из доказательства этой теоремы можно получить следующий результат: если $r \in \mathbb{N}$, $1 < q \leqslant \infty$, $1 \leqslant p < \infty$,

$$\sum_{s\in\mathbb{Z}} 2^{s\varkappa\left(r-\frac{1}{q}\right)} \|v\|^{\varkappa}_{L_p[2^s,\, 2^{s+1}]} < \infty,$$

то выполнено (1) и (2). В случаях $p \leqslant q$, $1 < q < p \leqslant 2$ и $2 \leqslant q < p < \infty$ оценка (2) при таких условиях на v была доказана В.Д. Степановым и Е.Н. Ломакиной[33], а в случае $1 < q < 2 < p < \infty$ неравенство (2) является уточнением верхней оценки, полученной в той же работе.

Следующая теорема является обобщением теоремы 1.3.1.

Теорема 1.3.2. Пусть $r \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p < \infty$, $1 < q \leqslant \infty$, $[a,\, b] = \cup_{i=1}^{i_0} [\tau_{i-1},\, \tau_i]$, при этом для каждого $i = 1, \ldots, i_0$ функции $g_i = g|_{[\tau_{i-1},\, \tau_i]}$, $v_i = v|_{[\tau_{i-1},\, \tau_i]}$ или $\tilde{g}_i(t) = g_i(-t)$, $\tilde{v}_i(t) = v_i(-t)$ удовлетворяют условиям теоремы 1.3.1. Тогда выполнено (1) и (2).

В §**1.4** доказана нижняя оценка для величин $\mathcal{A}_n(\mathcal{I}_{\hat{W}^r_{q,g}\to L_{p,v}})$ и $d_n(\hat{W}^r_{q,g}[a,\, b],\, L_{p,v}[a,\, b])$.

Теорема 1.4.1. Пусть $r \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, $(qr > 1 \vee p \leqslant 2)$, g, $v \in L_0([a, b], \mathbb{R}_+)$, $gv \in L_\varkappa[a, b]$. Тогда

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{d_n(\hat{W}^r_{q,g}[a, b], L_{p,v}[a, b])}{d_n(W^r_q[0, 1], L_p[0, 1])} \underset{p,q,r}{\gtrsim} \|gv\|_\varkappa,$$

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{\mathcal{A}_n(\mathcal{I}_{\hat{W}^r_{q,g}\to L_{p,v}})}{\lambda_n(W^r_q[0, 1], L_p[0, 1])} \underset{p,q,r}{\gtrsim} \|gv\|_\varkappa.$$

В §**1.5** найдена асимптотика величин $d_n(W^r_{q,g}[a, b], L_{p,v}[a, b])$ при $p \leqslant q$ и получено обобщение результатов А.П. Буслаева и В.М. Тихомирова о связи значений колмогоровских поперечников и спектра нелинейных дифференциальных уравнений на случай более общих весов.

Обозначим $h_{(\sigma)} = |h|^{\sigma-1}\mathrm{sgn}\, h$. В случае $p \leqslant q$ и кусочно-непрерывных положительных функций g, v В.М. Тихомировым и А.П. Буслаевым [24, 25] было показано, что

$$\lim_{n\to\infty} n^r d_n(W^r_{q,g}[a, b], L_{p,\,v}[a, b]) = \lambda^{-1}_{rpq}\|gv\|_\varkappa,$$

где λ_{rpq} — минимальное собственное значение задачи

$$(-1)^{r+1}\left(\left(x^{(r)}\right)_{(q)}\right)^{(r)} + \lambda^p x_{(p)} = 0$$

с периодическими краевыми условиями. Отсюда и из теоремы 1.3.2 получается

Теорема 1.5.1. В условиях теоремы 1.3.2 при $p \leqslant q$ выполнено

$$\lim_{n\to\infty} n^r d_n(\hat{W}^r_{q,g}[a, b], L_{p,\,v}[a, b]) = \lambda^{-1}_{rpq}\|gv\|_\varkappa.$$

Пусть $1 < p \leqslant q < \infty$, весовые функции g, $v : [0, 1] \to \mathbb{R}_+$ почти всюду положительны и оператор $I_{r,g,v,0} : L_q[0, 1] \to L_p[0, 1]$ компактен. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} x^{(r)} = g^{\frac{q}{q-1}} y_{(\frac{q}{q-1})}, \\ y^{(r)} = (-1)^r \lambda^p v^p x_{(p)}, \\ x^{(j)}(0) = 0,\ y^{(j)}(1) = 0,\ 0 \leqslant j \leqslant r-1. \end{cases} \tag{3}$$

Скажем, что $(x, y, \lambda) \in SP_n(p, q, r, g, v)$, если $\left\|\frac{x^{(r)}}{g}\right\|_q = 1$, $\frac{y^{(r)}}{v} \in L_p[0, 1]$, выполнено (3) и x имеет n точек перемены знака; положим

$$sp_n(p, q, r, g, v) = \{\lambda | \exists x,\ y : (x, y, \lambda) \in SP_n(p, q, r, g, v)\}.$$

Теорема 1.5.2. Пусть $1 < p \leqslant q < \infty$, весовые функции g, $v : [0, 1] \to \mathbb{R}_+$ почти всюду положительны и оператор $I_{r,g,v,0} : L_q[0, 1] \to L_p[0, 1]$ компактен. Положим $\hat{W}^r_{q,g}[0, 1] = \{I_{r,g,v,0}\varphi : \|\varphi\|_q \leqslant 1\}$. Тогда

$$d_n(\hat{W}^r_{q,g}[0, 1], L_{p,v}[0, 1]) = \overline{\lambda}_n^{-1},$$

где $\overline{\lambda}_n = \max sp_n(p, q, r, g, v)$.

В §**1.6** рассматривается класс весов g, для которых порядки поперечников отличаются от порядков поперечников невесовых соболевских классов.

Пусть $1 \leqslant p < \infty$, $1 < q \leqslant \infty$, $r \in \mathbb{N}$, $g(x) = x^{-\beta}$, $0 < x \leqslant e^{-1}$. Если $\beta < \frac{1}{\varkappa}$, то $g \in L_\varkappa[0, e^{-1}]$, и порядки величин $d_n(W^r_{q,g}[0, e^{-1}], L_p[0, e^{-1}])$ по n совпадают с порядками поперечников невесовых соболевских классов. Если $\beta \geqslant \frac{1}{\varkappa}$, то можно проверить, что не существует непрерывного вложения $W^r_{q,g}[0, e^{-1}]$ в $L_p[0, e^{-1}]$. Поэтому представляет интерес случай веса, близкого к $g(x) = x^{-r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}$ в нестепенной шкале:

$$g(x) = x^{-r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}\varphi(|\ln x|),\ x \in (0, e^{-1}), \tag{4}$$

где функция $\varphi : [1, +\infty) \to (0, \infty)$ удовлетворяет некоторому условию, которое будет указано ниже. Обозначим $\psi(x) = \ln\varphi(x)$, $\frac{1}{s} = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)_+$. Пусть $\omega(\psi, \delta) = \sup\{\psi(x) - \psi(y) : |x - y| \leqslant \delta\}$, $\delta > 0$, — модуль непрерывности функции ψ. Скажем, что φ удовлетворяет условию $(\#)$, если

1. $\omega(\psi, 1) < \infty$;
2. $\psi = \psi_0 + \psi_1$, где функция ψ_1 ограничена, а функция $\frac{1}{\varkappa}t - \psi_0(t)$ возрастает;
3. существует последовательность $\{N_n\}$ такая, что $N_n = O(n)$ и

$$\|\varphi\|_{L_s[N_n, \infty)} n^{r-\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)_+} \underset{n}{\asymp} \|\varphi\|_{L_\varkappa[1, N_n]};$$

4. если $p < q$, то также предполагается, что $\psi = \psi_2 + \psi_3$, где функция ψ_3 ограничена и существует такое $\gamma_0 > 0$, что функция $\left(\frac{1}{p} - \gamma_0\right) y + \psi_2(y)$ возрастает;
5. если $q < p$ и $p > 2$, также предполагается, что существуют такие $\alpha > \frac{1}{p} \min\left\{\frac{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}},\, 1\right\}$ и $M > 0$, что $\varphi(cy) \leqslant Mc^{-\alpha}\varphi(y)$ для любых $c \geqslant 1$, $y \geqslant 1$.

Теорема 1.6.1. Пусть φ удовлетворяет условию $(\#)$. Тогда

$$d_n(W^r_{q,g}[0,\, e^{-1}],\, L_p[0,\, e^{-1}]) \overset{n}{\asymp} \|\varphi\|_{L_\varkappa[1,\, N_n]} d_n(W^r_q[0,\, 1],\, L_p[0,\, 1]).$$

Аналогичное утверждение выполняется и для класса $W^r_{q,g}[e,\, +\infty)$, где функция g имеет вид (4) и φ удовлетворяет $(\#)$.

Для иллюстрации рассматриваются два примера применения этой теоремы.

1. Положим

$$\alpha_{pq} = \begin{cases} \frac{1}{p} - \frac{1}{q}, \text{ если } p < q, \\ 0, \text{ если } q \leqslant p \leqslant 2, \\ \frac{1}{p}, \text{ если } q \leqslant 2 < p, \\ \frac{1}{p}\frac{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}, \text{ если } 2 \leqslant q \leqslant p. \end{cases}$$

Пусть $\varphi(y) = y^{-\alpha}\rho(y)$, где $\alpha_{pq} < \alpha < r + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, ρ — положительная абсолютно непрерывная функция, такая что $\frac{y\rho'(y)}{\rho(y)} \to 0$ при $y \to \infty$. Тогда в условии $(\#3)$ можно взять $N_n = n$, и

$$d_n(W^r_{q,g}[0,\, e^{-1}],\, L_p[0,\, e^{-1}]) \asymp n^{-\alpha+r+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\rho(n) d_n(W^r_q[0,\, 1],\, L_p[0,\, 1]).$$

2. Пусть $\varphi(y) = y^{-r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}$. Тогда в условии $(\#3)$ можно взять $N_n = \frac{n}{\ln n}$ при $p \geqslant q$ и $N_n = n(\ln n)^{-1-r^{-1}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}$ при $p < q$, и

$$d_n(W^r_{q,g}[0,\, e^{-1}],\, L_p[0,\, e^{-1}]) \asymp (\ln n)^{r+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} d_n(W^r_q[0,\, 1],\, L_p[0,\, 1]).$$

В следующей теореме вычисляется порядок поперечника в случае $\varphi(y) = y^{-\alpha}$ при малых значений α.

Теорема 1.6.2. Пусть $p > \max\{q, 2\}$, $0 < \alpha < \frac{1}{p}\min\left\{1, \frac{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\right\}$, $\varphi(y) = y^{-\alpha}$, $g(x) = x^{-r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}\varphi(|\ln x|)$, $x \in (0, e^{-1}]$. Тогда

$$d_n(W^r_{q,g}[0, e^{-1}], L_p[0, e^{-1}]) \asymp n^{-\frac{\alpha p}{2}}.$$

Таким образом, зависимость порядков поперечников от p, q, α, r в этом случае не такая, как при $\alpha > \frac{1}{p}\min\left\{1, \frac{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\right\}$. Это имеет сходство с эффектом малой гладкости, возникающего для поперечников классических соболевских классов (см. работы Б.С. Кашина[34] и Е.Д. Куланина[35]).

Вторая глава состоит из 3 параграфов. В ней рассматриваются некоторые задачи, связанные с оценкой поперечников пересечения класса $W^1_{\infty,g}[a, b]$ с интервалом $[\![f_1, f_2]\!]$ или $[\![f_1, f_2]\!]_{C^1[a,b]}$.

Пусть Q — множество, f_1, $f_2 : Q \to \mathbb{R}$ и $f_1(t) \leqslant f_2(t)$ для любого $t \in Q$. Интервалом $[\![f_1, f_2]\!]$ называется множество функций

$$\{f : Q \to \mathbb{R} | f_1(t) \leqslant f(t) \leqslant f_2(t),\ t \in Q\}.$$

Для некоторого линейного пространства X функций $f : Q \to \mathbb{R}$ интервалом в X назовем множество $[\![f_1, f_2]\!]_X = [\![f_1, f_2]\!] \cap X$. Интервалы в $C(Q)$ изучались в работах Франчетти и Чини[36], М.В. Кадеца и В.Н. Замятина[37] и С.Я. Хавинсона[38].

В §**2.1** доказываются вспомогательные утверждения.

В §**2.2** для непрерывных g получен критерий непустоты множества

$$\{f \in C^1([a, b]) : \forall t \in [a, b]\ f(t) \in [f_1(t), f_2(t)],\ f'(t) \in [\varphi_1(t), \varphi_2(t)]\},$$

а также установлена плотность множества $W^1_{\infty,g}[a, b] \cap [\![f_1, f_2]\!]_{C^1[a,b]}$ в $W^1_{\infty,g}[a, b] \cap [\![f_1, f_2]\!]$ относительно равномерной метрики. В частности, получается, что колмогоровские поперечники этих множеств в пространстве L_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, совпадают.

[34] *Кашин Б.С.* О поперечниках классов Соболева малой гладкости. Вестник МГУ (сер. мат., мех.). 1981. Т. 5. С. 50–54.

[35] *Куланин Е.Д.* Оценки поперечников функциональных классов малой гладкости. Дисс. .. канд. физ.-мат. наук. М., 1986.

[36] *Franchetti C., Cheney E.W.* The embedding of proximinal sets. J. Approxim. Theory. 1986. V. 48, N 2. P.213-223.

[37] *Кадец М.В., Замятин В.Н.* Чебышевские центры в пространстве $C[a,b]$. Теория функций, функциональный анализ и приложения. 1968. N 7. С.20-26.

[38] *Хавинсон С.Я.* Аппроксимативные свойства некоторых множеств в пространствах непрерывных функций. Anal. math. 2003. V. 29, N 2. P. 87–105.

Для произвольной функции $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ и числа $t \in [a, b]$ положим

$$\underline{D}_{\pm} f(t) = \varliminf_{\Delta t \to \pm 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}, \overline{D}_{\pm} f(t) = \varlimsup_{\Delta t \to \pm 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Теорема 2.1.1. Пусть f_1, $f_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ полунепрерывны соответственно сверху и снизу, для любого t выполнены неравенства $\underline{D}_- f_1 \leqslant \overline{D}_+ f_1$ и $\overline{D}_- f_2 \geqslant \underline{D}_+ f_2$, и множество $[\![f_1, f_2]\!]_{C^1[a,b]}$ непусто. Пусть φ_1, $\varphi_2 \in C([a, b])$, $\varphi_1 \leqslant \varphi_2$. Тогда для того, чтобы множество

$$\{f \in C^1([a, b]) : \forall t \in [a, b]\ f(t) \in [f_1(t), f_2(t)],\ f'(t) \in [\varphi_1(t), \varphi_2(t)]\}$$

было непустым, необходимо и достаточно, чтобы для любых $a \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant b$ выполнялись неравенства

$$f_2(t_2) \geqslant f_1(t_1) + \int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi_1(t)\, dt,\ f_1(t_2) \leqslant f_2(t_1) + \int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi_2(t)\, dt.$$

Теорема 2.2.2. Пусть f_1, $f_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g \in C([a, b], \mathbb{R}_+)$ и множество $M := W^1_{\infty,g}[a, b] \cap [\![f_1, f_2]\!]_{C^1[a,b]}$ непусто. Тогда M плотно в $W^1_{\infty,g}[a, b] \cap [\![f_1, f_2]\!]$ относительно метрики $C[a, b]$.

В §**2.3** найдены порядки поперечников множества $\{f \in W^1_{\infty,g}[a, b] : f(a) = 0,\ f(b) = c\}$ при достаточно больших n в зависимости от c.

Теорема 2.3.1. Пусть $g \in L_1([a, b], \mathbb{R}_+)$, $M = \{f \in W^1_{\infty,g}[a, b] : f(a) = 0,\ f(b) = c\}$, где $|c| \leqslant \|g\|_{L_1[a,b]} =: I$, $\varepsilon = 1 - \frac{|c|}{I}$. Тогда если $n\varepsilon \geqslant 1$, то

$$d_n(M, L_\infty[a, b]) \asymp \frac{I\varepsilon^{1/2}}{n}.$$

Автор выражает благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору И.Г. Царькову, а также чл.-корр. РАН профессору Б.С. Кашину, профессору В.М. Тихомирову, профессору Э.М. Галееву и доценту А.С. Кочурову за плодотворные обсуждения поставленных задач и постоянную поддержку.

Работы автора по теме диссертации

1. *Васильева А.А.* "Критерий существования гладкой функции при ограничениях". Мат. заметки, т. 82 вып. 3, 2007, стр. 335–346.

2. *Васильева А.А.* "Колмогоровские поперечники классов Соболева с весом". М., 2008. - 43 с. - Библиогр.: 16 назв. Деп. в ВИНИТИ 27.05.08, N 454-B2008.

3. *Васильева А.А.* "Колмогоровские поперечники классов Соболева с весом". Труды Международной летней математической Школы С.Б. Стечкина по теории функций. Россия, Алексин, 1–9 августа, 2007. С. 57–58.

4. *Васильева А.А.* "Колмогоровские поперечники весовых классов Соболева на отрезке и их обобщений". Тезисы докладов 14-й Саратовской зимней школы "Современные проблемы теории функций и их приложения". Саратов, 28 января – 4 февраля 2008 г. С. 41–42.

5. *Васильева А.А.* "Колмогоровские поперечники классов Соболева на отрезке с сингулярными весами". Труды участников Международной школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова. Пос. Абрау-Дюрсо, 9–15 сентября 2008 г. С. 100–102.