МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

Механико – математический факультет.

На правах рукописи
УДК 517.518

Захарова Анастасия Александровна

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ОБОБЩЕННЫЕ ФРЕЙМЫ

01.01.01 — математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Москва — 2008

Работа выполнена на кафедре математического анализа механико–математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико–математических наук, профессор Лукашенко Тарас Павлович
Официальные оппоненты:	доктор физико–математических наук, профессор Протасов Владимир Юрьевич
	кандидат физико–математических наук, Куликова Татьяна Юрьевна
Ведущая организация:	Математический институт имени В.А. Стеклова Российской академии наук

Защита состоится «___» _____________ 2008 г. в _____ часов на заседании диссертационного совета Д.501.001.85 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские Горы, Главное здание МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан "___"_____________ 2008 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 501.001.85 при МГУ,
доктор физико – математических
наук, профессор Сергеев И.Н.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Впервые фрейм был определен в работе Р. Даффина и А. Шеффера[1]. Несмотря на то, что уже в этой работе было дано общее определение фрейма, приведенное ниже, а также доказаны некоторые его свойства, основное внимание уделялось свойствам экспоненциальных систем $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n\in\mathbb{N}}$, $t \in [-\gamma, \gamma]$. По определению, система $\{\varphi_n\}_{n\in K}$ в гильбертовом пространстве H, где K — не более чем счетное множество индексов, называется фреймом, если существуют константы a, b, $0 < a \leqslant b < \infty$, такие что для всех $g \in H$

$$a \parallel g \parallel^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |(g, \varphi_n)|^2 \leqslant b \parallel g \parallel^2 .$$

Числа a и b называются границами фрейма. Они не единственны. Точная нижняя грань множества всех верхних границ b (точная верхняя грань множества всех нижних границ a) называется соответственно оптимальной верхней (оптимальной нижней) границей фрейма. Если возможно выбрать границы a и b так, чтобы $a = b$, то фрейм называется жестким, константа a — его границей. Если при этом $a = b = 1$, то фрейм называется фреймом Парсеваля.

После этого фреймы долгое время практически не встречались в исследованиях, за исключением работы Р. Юнга[2].

В конце 80-х годов прошлого века интерес к фреймам возобновился в связи с возникновением и развитием теории всплесков (вэйвлетов).

Фреймы обладают многочисленными свойствами, позволяющими широко использовать их как в теоретических, так и в практических целях, к примеру, для анализа звуковых сигналов или изображений. В пятой главе монографии С. Малла[3] описаны применения фреймов в анализе сигналов для уменьшения шума, а также в анализе изображений. Другие применения теории фреймов можно найти в книгах И. Добеши[4], Ч. Чуи[5], К. Блаттера[6], О. Кристенсена[7].

Фреймы обладают некоторыми свойствами ортонормированных базисов в гильбертовом пространстве. Так, например, в случае жесткого фрейма для всех

---

[1]Duffin R. J., Schaeffer A. C. *A class of nonharmonic Fourier series.* Trans. Amer. Math. Soc. 1952. V. 72. P. 341-366.

[2]Young R. *An introduction to nonharmonic Fourier series.* Academic Press, New York, 1980.

[3]Малла С. *Вэйвлеты в обработке сигналов.* М.: Мир, 2005.

[4]Добеши И.*Десять лекций по вейвлетам.* М.-Ижевск: РХД, 2001.

[5]Чуи Ч. *Введение в вейвлеты.* М.: Мир, 2001.

[6]Блаттер К. *Вэйвлет-анализ. Основы теории.* М.: Техносфера, 2004.

[7]Christensen O. *An introduction to frames and Riesz bases.* Birkhaeuser, 2003.

$x \in H$ в слабом смысле выполнено равенство

$$x = a^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} (x, \varphi_n) \varphi_n.$$

Эта формула похожа на разложение элемента по ортонормированному базису. Аналогичная формула справедлива для произвольного фрейма, если в разложении брать скалярные произведения не с элементами самого фрейма, а с элементами двойственного фрейма. Однако фреймы (даже фреймы Парсеваля), вообще говоря, не являются ортонормированными базисами. В отличие от базиса, фрейм не обязательно состоит из линейно независимых векторов, вследствие чего коэффициенты разложения элемента гильбертова пространства по фрейму, вообще говоря, не единственны. Иначе говоря, фрейм является переполненной, или избыточной системой.

Избыточность фрейма можно описать также с помощью числа фреймов, двойственных к нему. Среди множества двойственных к фрейму можно естественно (посредством введения некоторого оператора, называемого фреймовым оператором, или оператором анализа) выделить так называемый канонический двойственный фрейм.

Канонический двойственный фрейм обладает интересным свойством: l^2-норма коэффициентов разложения элемента по каноническому двойственному фрейму минимальна. Именно, если для некоторой последовательности $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2(\mathbb{N})$ выполнено

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(y, \widetilde{\varphi}_n)|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2,$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $c_n = (y, \widetilde{\varphi}_n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

В упомянутых выше работах фреймы рассматривались только для счетного множества индексов K. Между тем, оказывается, что при использовании непрерывного множества индексов получаемые системы сохраняют многие свойства фреймов с соответствующими изменениями. Первое обобщение такого рода было сделано Т.П. Лукашенко[8]. Им было введено понятие ортоподобной

[8]Лукашенко Т.П. *Ортоподобные неотрицательные системы разложения.* Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1997. №5. С. 27-31.

системы $\{e^\omega\}_{\omega\in\Omega}$ в гильбертовом пространстве H — такой системы разложения, что любой элемент $y \in H$ можно представить в виде

$$y = \int_\Omega (y, e^\omega) e^\omega \, d\mu(\omega).$$

Если взять $\Omega = \mathbb{N}$, $\Omega_k = \{1, 2, ..., k\}$, $\mu(k) > 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$, то получим, в частности, счетные полные ортогональные системы. Таким образом, понятие ортоподобной системы обобщает понятие ортогональной системы. С другой стороны, частным случаем ортоподобной системы являются ортогональные проекции ортонормированных базисов — фреймы Парсеваля. Свойства ортоподобных систем (разложение по ортоподобной системе, свойства коэффициентов разложения, аналог теоремы Рисса-Фишера и некоторые другие) подробно изучены в работе Т.П. Лукашенко[9].

Существуют системы, обладающие теми же свойствами, что и ортоподобные системы, но не являющиеся ортоподобными системами. В качестве примеров таких систем в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R})$ можно привести преобразование Фурье $F(f) = \widehat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-2\pi i\omega x) f(x) dx$ и преобразование Гильберта $\widetilde{f}(\omega) = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{|x-\omega|\geq\varepsilon} \frac{f(x)}{\pi(\omega-x)} dx$; для них выполняется равенство Парсеваля[10], однако они не являются ортоподобными системами в $L^2(\mathbb{R})$, так как ни функции $\{\exp(2\pi i\omega x)\}_{\omega\in\mathbb{R}}$, ни $\{\frac{1}{\pi(\omega-x)}\}_{\omega\in\mathbb{R}}$ не принадлежат $L^2(\mathbb{R})$.

Т.П. Лукашенко[11] ввел новый класс систем, названных им обобщенными ортоподобными системами, который включает в себя как ортоподобные системы, так и системы, задающие преобразование Фурье и преобразование Гильберта, а также некоторое другие системы. Для этого им было использовано понятие обобщенной системы, приведенное ниже в изложении содержания работы. Элемент системы в этом случае — это не непосредственно элемент гильбертова пространства, а последовательность элементов исчерпывающих подпространств, подчиненных некоторым условиям, что позволяет определить таким же образом преобразования Фурье и Гильберта. Полученные системы, названные авторомм обобщенными ортоподобными системами, сохраняют многие свойства ортоподобных систем[12].

[9] Лукашенко Т.П. *О коэффициентах систем разложения, подобных ортогональным.* Матем. сб. 1997. **188**, №12. С. 57-72.

[10] Кашин Б.С., Саакян А.А. *Ортогональные ряды.* М.: Изд-во АФЦ, 1999.

[11] Лукашенко Т.П. *Обобщенные системы разложения, подобные ортогональным.* Вестн. Моск. ун-та. Сер.1. Матем. Механ. 1998. №4. С. 6-10.

[12] Лукашенко Т.П. *О свойствах обобщенных систем разложения, подобных ортогональным.* Известия высших учебных заведений. Математика. 2000. №10(461). С. 33-48.

Цель работы. Ввести и изучить обобщения понятия фрейма в гильбертовом пространстве.

Методы исследования. В диссертации используются методы теории функций и функционального анализа.

Научная новизна. Все полученные результаты являются новыми и состоят в следующем:

1. Введено понятие интегрального фрейма и доказаны некоторые свойства таких систем, в частности, формула разложения элемента гильбертова пространства по фрейму и экстремальное свойство канонического двойственного фрейма.

2. Введено понятие обобщенного фрейма и доказаны некоторые свойства таких систем, в частности, формула разложения элемента гильбертова пространства по фрейму и экстремальное свойство канонического двойственного фрейма.

3. Теорема о том, что любой линейный ограниченный обратимый оператор, действующий из сепарабельного гильбертова пространства в $L^2(\Omega)$, задает некоторый обобщенный фрейм, обобщена для случая несепарабельного пространства. С этой целью введено понятие трансобобщенного фрейма.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация носит теоретический характер; результаты диссертации могут быть использованы специалистами по функциональному анализу.

Апробация диссертации. Результаты диссертации неоднократно докладывались автором в МГУ им. М.В. Ломоносова на семинаре по теории ортогональных рядов под руководством академика РАН П.Л. Ульянова, проф. М.К. Потапова и проф. М.И. Дьяченко(2004, 2008), на семинаре по теории функций действительного переменного под руководством проф. Т.П Лукашенко, проф. В.А. Скворцова и м.н.с. А.П. Солодова (2006, 2007), на семинаре по ортогональным рядам под руководством чл.-корр. РАН проф. Б.С. Кашина и проф. С.В. Конягина (2006), на семинаре по теории ортоподобных систем под руководством проф. Т.П. Лукашенко, доц. Т.В. Родионова и доц. В.В. Галатенко (2006, 2007); на международной школе-семинаре по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова (Ростов-на-Дону, 2004); на Седьмой международной Казанской летней научной школе-конференции (Казань, 2005); на Воронежской зимней математической школе “Современные методы теории функций и смежные проблемы” (Воронеж, 2007), на Саратовских зимних школах “Современные проблемы теории функций и их приложения“ (Саратов, 2004 и 2006).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 9 работах, список которых приведен в конце автореферата [1]-[9].

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на разделы, и списка литературы, насчитывающего 33 наименования. Общий объем текста – 54 страницы. Нумерация теорем в автореферате совпадает с нумерацией в диссертации.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении приведен краткий исторический обзор по теме диссертации и сформулированы основные задачи и результаты диссертации.

В **первой главе** вводится обобщение понятия фрейма — интегральный фрейм, включающее в себя как частный случай понятие ортоподобной системы, а также и (дискретные) фреймы с произвольными границами a, b. Назовем систему функций $\{\varphi^\omega\}_{\omega\in\Omega} \subset H$ интегральным фреймом, если (g, φ^ω) μ-измерима для всех $g \in H$ и существуют a, b, $0 < a \leqslant b < \infty$, такие что для всех $g \in H$

$$a \parallel g \parallel^2 \leqslant \int_\Omega |(g, \varphi^\omega)|^2 d\mu(\omega) \leqslant b \parallel g \parallel^2 .$$

Если положить $\Omega = \mathbb{N}$ и выбрать меру μ таким образом, что для любого $k \in \mathbb{N}$ $\mu(k) = 1$, то получим определение фрейма. Аналогично дискретному случаю, определяются верхняя и нижняя оптимальные границы как точная нижняя грань множества всех верхних границ b (точная верхняя грань множества всех нижних границ a) соответственно. Если возможно выбрать границы a и b так, чтобы $a = b$, интегральный фрейм называется жестким. Жесткий интегральный фрейм Парсеваля (интегральный фрейм с константами $a = b = 1$) — это ортоподобная система.

Оказывается, что при такого рода обобщении системы сохраняют основные свойства дискретных фреймов с соответствующими изменениями. Определяются фреймы, двойственные к интегральному фрейму, в частности, определяется канонический двойственный фрейм и доказывается корректность его определения. Доказывается аналог экстремального свойства коэффициентов разложения элемента гильбертова пространства по фрейму (именно, что наименьшей L^2-нормой обладают коэффициенты разложения элемента по каноническому двойственному фрейму) — обобщение соответствующего свойства дискретных фреймов:

Теорема 3. *Если для некоторой* $c(\omega) \in L^2(\Omega)$ *выполнено*

$$y = \int_\Omega c(\omega)\varphi^\omega d\mu(\omega),$$

то

$$\int_\Omega |(y, \widetilde{\varphi}^\omega)|^2 d\mu(\omega) \leqslant \int_\Omega |c(\omega)|^2 d\mu(\omega),$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $c(\omega) = (y, \widetilde{\varphi}^\omega)$ *п.в. на* Ω.

Приводится также формула разложения элемента гильбертова пространства по системе, являющейся интегральным фреймом. Кроме того, для интегральных фреймов доказывается следующий аналог теоремы Рисса-Фишера:

Теорема 4. *Пусть* $\{\varphi^\omega\}_{\omega\in\Omega}$ *— интегральный фрейм в гильбертовом пространстве* H, $c(\omega)$ *— функция из пространства Лебега* $L^2(\Omega)$ *со значениями в* $\mathbb{R}$ *или* $\mathbb{C}$ *в зависимости от того, над каким полем рассматривается* H, $\{\Lambda_k\}_{k=1}^\infty$ *— такая последовательность измеримых подмножеств* Ω, *что* $\liminf\limits_{k\to\infty} \Lambda_k = \Omega$ *и* $c(\omega)\varphi^\omega$ *интегрируема по Лебегу на* Λ_k. *Тогда в* H *существует*

$$\lim_{k\to\infty} (L) \int_{\Lambda_k} c(\omega)\varphi^\omega d\mu(\omega),$$

причем значение предела не зависит от выбранной последовательности подмножеств $\{\Lambda_k\}_{k=1}^\infty$, *удовлетворяющей условиям теоремы.*

Во **второй главе** рассмотрено дальнейшее обобщение понятия фрейма. Если $\{H_n\}_{n=1}^\infty$ — система замкнутых вложенных ($H_n \subset H_{n+1}$) расширяющихся подпространств в H, объединение которых всюду плотно в H, и $\{\varphi^\omega\}_{\omega\in\Omega}$ — система, такая что любой ее элемент φ^ω является последовательностью $\{\varphi_n^\omega\}_{n=1}^\infty$ элементов H, $\varphi_n^\omega \in H_n$ и φ_n^ω — ортогональная проекция φ_{n+1}^ω на H_n, то $\{\varphi^\omega\}_{\omega\in\Omega}$ — обобщенная система в H. Назовём обобщенную систему функций $\{\varphi^\omega\}_{\omega\in\Omega} \subset H$ обобщенным фреймом, если существуют константы $a, b : 0 < a \leqslant b < \infty$, такие что для любого $y \in H_n$ все функции (y, φ_n^ω) измеримы и для любого $y \in H_n$

$$a \parallel y \parallel^2 \leqslant \int_\Omega |(y, \varphi_n^\omega)|^2 d\mu(\omega) \leqslant b \parallel y \parallel^2 . \tag{1}$$

Верхняя и нижняя оптимальные границы определяются так же, как и в интегральном случае. Очевидно, что в качестве частного случая это понятие включает обобщенные ортоподобные системы, в том числе преобразования Фурье и Гильберта. Приведен пример, показывающий, что существует нежесткий обобщенный фрейм, не являющийся интегральным фреймом. Доказывается теорема о сходимости коэффициентов разложения элемента гильбертова пространства по обобщенному фрейму в пространстве $L^2(\Omega)$.

Теорема 5. *Если $\{\varphi^\omega\}_{\omega\in\mathbf{\Omega}}$ — обобщенный фрейм в H, то для любого $y \in H$ существует единственная с точностью до эквивалентности (совпадения почти всюду) функция $y(\omega)$ на Ω, такая что последовательность функций $y_\omega^n = (y, \varphi_n^\omega)$ сходится к ней в смысле*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |y_\omega^n - y(\omega)|^2 d\mu(\omega) = 0.$$

В качестве следствия этой теоремы получим, в частности, такое утверждение:

Следствие 1. *Если $\{\varphi^\omega\}_{\omega\in\Omega}$ — обобщенный фрейм в H, то для любого $y \in H$*

$$a\|y\|^2 \leqslant \int_\Omega |y(\omega)|^2 d\mu(\omega) \leqslant b\|y\|^2. \tag{2}$$

В дальнейшем рассматриваются L^2-измеримые обобщенные фреймы $\{\varphi^\omega\}_{\omega\in\Omega}$, то есть такие обобщенные фреймы, для которых для любой функции $c(\omega) \in L^2(\Omega)$ со значениями в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ все функции $c(\omega)\varphi_n^\omega$ измеримы как функции на Ω со значениями в H. Для обобщенных L^2-измеримых фреймов доказывается теорема:

Теорема 8. *Пусть $\{\varphi^\omega\}_{\omega\in\Omega}$ — обобщенный L^2-измеримый фрейм в гильбертовом пространстве H, тогда для любой $c(\omega)$ — функции из пространства Лебега $L^2(\Omega)$ — в H существует элемент*

$$y = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega c(\omega)\varphi_n^\omega d\mu(\omega).$$

Доказывается аналог экстремального свойства коэффициентов разложения элемента гильбертова пространства по фрейму — дальнейшее обобщение теоремы 3:

Теорема 9. *Пусть $\{\varphi^\omega\}_{\omega\in\mathbf{\Omega}}$ — обобщенный фрейм в H. Если для некоторой последовательности функций $c_n(\omega) \in L^2(\Omega)$, сходящейся в $L^2(\Omega)$ к функции*

$c(\omega)$, для некоторого элемента $y \in H$ выполнено

$$y = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega c_n(\omega)\varphi_n^\omega d\mu(\omega),$$

то имеет место неравенство

$$\int_\Omega |\widetilde{y}(\omega)|^2 d\mu(\omega) \leqslant \int_\Omega |c(\omega)|^2 d\mu(\omega),$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $c(\omega) = \widetilde{y}(\omega)$ п.в. на Ω.

Как следует из примеров, приведенных в начале второй главы, существуют обобщенные фреймы, не являющиеся интегральными фреймами. Поэтому естественно возникает вопрос: какие условия должны выполняться, чтобы обобщенный фрейм был интегральным фреймом. Ниже приводятся условия, необходимые и достаточные для того, чтобы обобщенный фрейм являлся также и интегральным фреймом в гильбертовом пространстве.

Теорема 10. *Пусть $\{\varphi^\omega\}_{\omega\in\Omega}$ — обобщенный L^2-измеримый фрейм в пространстве H (с системой подпространств $\{H_n\}_{n=1}^\infty$ и индексами из Ω). Он весь (почти весь) является некоторым интегральным фреймом в пространстве H с ω, пробегающим все (почти все) значения из Ω в том смысле, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ и каждого (почти каждого) $\omega \in \Omega$ элемент φ_n^ω — ортогональная проекция φ^ω из H на H_n, тогда и только тогда, когда для каждого (почти каждого) $\omega \in \Omega$ $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|\varphi_n^\omega\| < +\infty$.*

Также приводятся необходимые и достаточные условия того, что обобщенный фрейм является дискретным фреймом в гильбертовом пространстве.

Как следует из интегрального аналога формул для фреймового оператора, приведенных в первой главе, для любого интегрального фрейма фреймовый оператор является линейным ограниченным обратимым оператором из H в $L^2(\Omega)$. Однако существуют линейные ограниченные операторы с ограниченным обратным из H в $L^2(\Omega)$, не задающие никакого интегрального фрейма (в качестве примера можно привести преобразование Фурье в $H = L^2(\mathbb{R})$). В завершение второй главы доказывается следующая теорема:

Теорема 12. *Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, Ω — пространство с мерой μ, $L^2(\Omega)$ — пространство Лебега над Ω, A — ограниченный линейный оператор с ограниченным обратным, действующий из H в $L^2(\Omega)$ (то есть существуют $a, b : 0 < a \leqslant b < \infty$, такие что для любого $x \in H$ $a\|x\|^2 \leqslant \|Ax\|^2 \leqslant b\|x\|^2$). Тогда существует такая система $\{\varphi^\omega\}_{\omega\in\boldsymbol{\Omega}}$,* *являющаяся обобщенным фреймом в H, что для любого $x \in H$ выполняется равенство $A(x) = (L^2) \lim\limits_{n\to\infty}(x, \varphi_n^\omega)$. В качестве фреймовых констант можно взять a, b.*

Приведенная теорема вместе со следствием теоремы о сходимости коэффициентов разложения элемента гильбертова пространства по обобщенному фрейму устанавливает соответствие между классом обобщенных фреймов и классом линейных ограниченных обратимых операторов в сепарабельном пространстве.

Так как при доказательстве предыдущей теоремы существенно используется сепарабельность пространства H, возник вопрос, можно ли описать похожим образом линейные ограниченные обратимые операторы в произвольном (возможно, несепарабельном) гильбертовом пространстве. С этой целью в **третьей главе** диссертации вводятся трансобобщенные фреймы, отличающиеся от обобщенных фреймов тем, что вместо счетного исчерпывания пространства рассматривается произвольное (возможно, несчетное) исчерпывание.

Следуя Натансону[13], обозначим за W_α множество всех порядковых чисел, меньших порядкового числа α. Пусть $\{H_k\}_{k\in W_\alpha}$ — система замкнутых расширяющихся ($H_k \subset H_n$ для всех $k < n$) подпространств в H, объединение которых всюду плотно в H. $\{\varphi^\omega\}_{\omega\in\Omega}$ — система, такая что любой ее элемент φ^ω является последовательностью $\{\varphi_k^\omega\}_{k\in W_\alpha}$ элементов H и $\varphi_k^\omega = P_{H_n\to H_k}\varphi_n^\omega$, где $P_{H_n\to H_k}$ — ортогональная проекция из H_n в H_k для всех $k < n$. Тогда $\{\varphi^\omega\}_{\omega\in\Omega}$ — трансобобщенная система в H. Назовём трансобобщенную систему функций $\{\varphi^w\}_{w\in\Omega} \subset H$ трансобобщенным фреймом, если существуют $a, b : 0 < a \leqslant b < \infty$, такие что для любого $y \in H_n$, $n \in W_\alpha$, все функции (y, φ_n^w) измеримы и выполняются неравенства

$$a \parallel y \parallel_{H_n}^2 \leqslant \int_\Omega |(y, \varphi_n^w)|^2 d\mu(w) \leqslant b \parallel y \parallel_{H_n}^2$$

для любого $y \in H_n$.

С помощью таких систем можно описать линейные ограниченные обратимые операторы в произвольном (в том числе несепарабельном) гильбертовом пространстве.

Теорема 13. *Пусть A — ограниченный линейный оператор с ограниченным обратным, действующий из H в $L^2(\Omega)$ (то есть существуют $a, b : 0 < a \leqslant b < \infty$, такие что для любого $y \in H$ $a\|y\| \leqslant \|Ay\| \leqslant b\|y\|$). Тогда существует такая система $\{\varphi^\omega\}_{\omega\in\Omega}$, являющаяся трансобобщенным фреймом*

[13] Натансон И.П. *Теория функций вещественной переменной.* М. Наука, 1974.

в H *с системой подпространств* $\{H_k\}_{k\in W_\alpha}$, *что для любого* $y \in H$ *выполняется равенство* $A(y) = (L^2)\lim\limits_{n\in W_\alpha}(y, \varphi_n^\omega)$.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Т.П. Лукашенко за предложенную тему и постоянное внимание к работе.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Список литературы

[1] Захарова А.А., *Интегральные системы Рисса и их свойства.* Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 2004. №6. С. 28-33.

[2] Захарова А.А., *О свойствах обобщенных фреймов.* Мат. заметки. 2008. т. 83, вып. 2 (2008). С. 210-220.

[3] Zakharova A.A., *Integral frames and Riesz bases.* Suppl. Rend. Circ. Mat. Palermo. Ser.II. N. 76. 2005. P. 667-676.

[4] Захарова А.А., *Интегральные системы Рисса и их свойства.* Современные методы теории функций и их приложения. Тезисы докладов 12-ой Саратовской зимней школы. Саратов. 2004. С. 87.

[5] Захарова А.А., *Экстремальное свойство обобщенных фреймов.* Теория функций, ее приложения и смежные вопросы. Материалы Седьмой международной Казанской летней научной школы-конференции. Казань. 2005. С. 77-78.

[6] Захарова А.А., *Некоторые свойства интегральных фреймов.* Труды участников международной школы семинара по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова. Ростов-на-Дону. 2004. С. 104.

[7] Захарова А.А., *Экстремальное свойство интегральных фреймов.* Международная конференция "Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ". Тезисы докладов. Москва. 2005. С. 108.

[8] Захарова А.А., *О существовании обобщенных фреймов.* Современные методы теории функций и их приложения. Тезисы докладов 13-ой Саратовской зимней школы. Саратов. 2006. С. 71-72.

[9] Захарова А.А., *Трансобобщенные системы.* Современные методы теории функций и смежные проблемы. Материалы Воронежской зимней математической школы. Воронеж. 2007. С. 84.