Московский Государственный Университет

имени М.В.Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 517.983

Неклюдов Александр Юрьевич

ТЕОРЕМЫ ЧЕРНОВА И ТРОТТЕРА-КАТО ДЛЯ ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВ

Специальность 01.01.01 — математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2008

Работа выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор О. Г. Смолянов

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Е. Т. Шавгулидзе

доктор физико-математических наук
С. В. Козырев

Ведущая организация: Московский государственный институт
электроники и математики
(технический университет)

Защита диссертации состоится 17 октября 2008 г. в 16 ч. 45 мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.85 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 17 сентября 2008 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д.501.001.85 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор

И. Н. Сергеев

Общая характеристика работы

Актуальность работы. В диссертации рассматриваются задачи бесконечномерного анализа, связанные с исследованием абстрактной задачи Коши

$$\dot{x} = \mathrm{A}x,\ x(0) = x_0 \in \mathcal{D}(\mathrm{A}) \tag{1}$$

для плотно определенных линейных операторов $\mathrm{A} \in \mathcal{Z}_{\mathbf{X}}$ в локально выпуклом пространстве $\mathbf{X}$, где $\mathcal{Z}_{\mathbf{X}}$ состоит из всех операторов, играющих роль аналогичную генераторам локально равностепенно непрерывных полугрупп (но не обязательно являющихся генераторами). В ней получены представление локального решения задачи Коши для уравнения (1) в виде формулы типа Чернова, обобщения теорем Чернова, Троттера и Троттера-Като для секвенциально полных локально выпуклых пространств, необходимые и достаточные условия того, что замыкание оператора является генератором локально равностепенно непрерывной полугруппы. Следует отметить, что при доказательстве этих теорем не использовалась резольвентная техника, так что наш подход принципиально отличается от классического подхода, использованного при доказательстве первоначальных вариантов и некоторых обобщений этих теорем.

Перечисленные задачи относятся к одному из важнейших направлений бесконечномерного анализа, на протяжении более 50 лет находящемуся в центре внимания специалистов – теории полугрупп операторов. Считается, что рождение этой теории началось с публикацией книги Е. Хилле "Функциональный анализ и полугруппы" в 1948 году. С тех пор вышло бесчисленное количество литературы посвященной этой области функционального анализа; отметим в частности, монографии [1], [2] , [3], [4], [5] и многочисленные журнальные статьи как этих, так и многих других авторов, в том числе Ю.Л. Далецкого, Х. Троттера, П. Чернова, В. Феллера, Т. Като, Р. С. Филлипса, К. Иосида, О. Г. Смолянова и многих других. Область применения этой теории огромна и включает в частности задачи математической физики, теории вероятностей и теории управления. Всё сказанное и определяет актуальность диссертации.

[1] С.Г. Крейн, Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, М.: Наука, 1967.

[2] E. B. Davies, One-Parameter Semigroups, St. John's College, Oxford, England (1980).

[3] K.-J. Engel and R. Nagel, One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations, Graduate Texts. in Math., vol. 194, Springer-Verlag, 2000.

[4] J. A. Goldstein, Semigroups of Linear Operators and Applications, Oxford Univercity Press, New York, 1985.

[5] A. Pazy, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Appl. Math. Sci., vol. 44, Springer- Verlag, 1983.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми. Основные из них состоят в следующем:

1. Получены обобщения теорем Чернова и Троттера для произвольных локально равностепенно непрерывных полугрупп, заданных на секвенциально полных локально выпуклых пространств.
2. Получено обобщение теоремы Троттера-Като для произвольных локально равностепенно непрерывных полугрупп, заданных на секвенциально полных локально выпуклых пространств: а именно, доказана эквивалентность сходимости последовательности полугрупп и сходимости последовательности порождающих генераторов.
3. Доказано представление локального решения абстрактной задачи Коши уравнения (1) в виде формулы типа Чернова для плотно определенных линейных операторов $\mathrm{A} \in \mathcal{Z}_{\mathbf{X}}$ в произвольном локально выпуклом пространстве $\mathbf{X}$.
4. Получены необходимые и достаточные условия существования локального решения уравнения вида (1) для плотно определенных линейных операторов $\mathrm{A} \in \mathcal{Z}_{\mathbf{X}}$ в произвольном локально выпуклом пространстве $\mathbf{X}$.
5. Получены необходимые и достаточные условия того, что замыкания операторов являются генераторами локально равностепенно непрерывных полугрупп, заданных на секвенциально полных локально выпуклых пространствах.

Результаты пунктов 3-5 являются новыми и для линейных операторов в банаховых пространствах.

Методы исследования

В диссертации используются методы бесконечномерного анализа, а также ряд специальных конструкций.

Теоретическая и практическая ценность

Диссертация носит теоретический характер. Кроме того некоторые результаты могут найти применение в математической физике и в уравнениях в частных производных.

Апробация диссертации

Результаты диссертации докладывались на семинарах в Московском университете, а также на следующих конференциях:
1) XXVIII Конференция Молодых Учёных МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, 2006;

2) XXIX Конференция Молодых Учёных МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, 2007;
3) XXII Международная конференция "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы", посвящённая памяти И.Г.Петровского, Москва, 2007;
4) XXX Конференция Молодых Учёных МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, 2008.

Публикации

Основные результаты работы опубликованы в четырёх работах автора.

Структура и объём работы

Диссертация состоит из трёх глав, разбитых на параграфы. Общий объём диссертации составляет 95 страницы. Список литературы включает 36 названий.

Краткое содержание диссертации

В теории полугрупп хорошо известна проблема о связи между сходимостью последовательности полугрупп и последовательности порождающих генераторов. В случае банахова пространства теорема Троттера-Като[6] достаточно полно решает эту задачу. Эта теорема и её различные модификации играют важнейшую роль в теории полугрупп ([7], [8]). При доказательстве теоремы Троттера-Като изначально использовалась резольвентная техника. Развитие этой техники для теории полугрупп в локально выпуклых пространствах было одной из центральных проблем в работах [8], [9], [10], [11], [12], [13] и других. Отметим отдельно работу [14]. Используя резольвентную технику, развитую в [11], в ней доказываются обобщения теоремы Троттера-Като (теоремы 15, 17) для локально равностепенно непрерывных полугрупп, заданных на секвенциально полных локально выпуклых пространств. В отличие от результатов, полученных в этой работе, в диссертации доказывается обобщение теоремы Троттера-Като для произвольных локально равностепенно непрерывных полугрупп. А именно, нам удалось показать при естественных условиях эквивалентность сходимости последовательности локально равностепенно непре-

[6]H. Trotter, On the product of semigroups of operators, Proc. Amer. Math. Soc. 10 (1959), 545–551.

[7]A. A. Albanese, E. Mangino, Trotter–Kato theorems for bi-continuous semigroups and applications to Feller semigroups, J. Math. Anal. Appl. 289 (2004) 477–492.

[8]C. Grosu, The Trotter product formula in locally convex spaces, I. Rev. Roumaine Math. Pures Appl.- 31.- 1986, no. 1, p.29-42.

[9]H. Komatsu, Semi-groups of operators in locally convex spaces, J. Math. Soc. Japan, 16 (1964), 230-262.

[10]T. Komura, Semigroups of operators in locally convex spaces, J. Functional Analysis, 2 (1968), 258-296.

[11]S. Ouchi, Semi-groups of operators in locally convex spaces, Math. Soc. Japan, Vol. 25, No. 2, 1973.

[12]L. Schwartz, Lectures on mixed problems in partial differential equations and the representation of semigroups, Tata Institute of Fundamental Research, 1958.

[13]K. Yosida, Functional analysis, Springer, Berlin, 1965.

[14]A. A. Albanese, F. Kühnemund, Trotter-Kato approximation theorems for locally equicontinuous semigroups, Riv. Mat. Univ. Parma 1 (2002) 19–53.

рывных полугрупп и последовательности их генераторов, не накладывая никаких дополнительных условий на генераторы этих полугрупп. Этот результат применим даже для локально равностепенно непрерывных полугруппT, заданных на секвенциально полном локально выпуклом пространствеX, генератор Z которых удовлетворяет следующему условию: не существует числа $\lambda \in \mathbb{C}$, при котором образ оператора $\lambda \mathrm{I} - \mathrm{Z}$ будет плотен в X. В частности такая полугруппа приводится в примере 1.

Другим центральным результатом в теории полугрупп можно считать теорему Чернова [15] (являющейся обобщением теоремы Троттера [16]). Теорема Чернова используется для представления решения задачи Коши уравнения (1). Частным случаем этого уравнения являются такие важные уравнения в математической физике как уравнение Шредингера, уравнение теплопроводности и многие другие. Э. Нельсон [17] использовал формулу Троттера (являющуюся частным случаем теоремы Чернова) для представления решения уравнения Шредингера с помощью интеграла Фейнмана по траекториям в конфигурационном пространстве. Теорема Чернова была использована в [18] для представления решения уравнения теплопроводности на компактном римановом многообразии и в [19] для представления решения уравнения Шредингера в виде фейнмановского интеграла по траекториям в фазовом пространстве. Эта теорема также была использована в работах [20], [21] и других. Обобщения теорем Чернова и Троттера для локально выпуклых пространств можно найти в [7], [14]. В отличие от результатов, полученных в этих статьях, в диссертации были доказаны обобщения этих теорем для произвольных локально равностепенно непрерывных полугрупп, заданных на секвенциально полных локально выпуклых пространствах.

Заметим, что при использовании теоремы Чернова предполагается глобальное существование и единственность решения уравнения вида (1) для банаховых пространств. В диссертации получена теорема (4) о представимости локального решения уравнения (1) в виде формулы типа Чернова, кото-

[15] P. R. Chernoff, Note on product formulas for operator semigroups, J. Funct. Anal. 2 (1968), 238–242.

[16] H. Trotter, On the product of semigroups of operators, Proc. Amer. Math. Soc. 10 (1959), 545–551.

[17] E. Nelson, Feynman integrals and the Schrodinger equation, J. Math. Phis., 1964, Vol. 5, no. 3, p. 332-343.

[18] O. G. Smolyanov, H. von Weizsacker, O. Wittich, Brownian Motion on a Manifold as Limit of Stepwise Conditioned Standard Brownian Motions, Canadian Math. Society Conference Proceedings, 589-602, 29 (2000).

[19] O. G. Smolyanov, A. G. Tokarev, A. Truman, Hamiltonian Feynman path integral via the Chernoff formula, J. Math. Phys., Vol. 43, No. 10, October 2002.

[20] Я. А. Бутко, Функциональные интегралы, соответствующие решению задачи Коши–Дирихле для уравнения теплопроводности в области компактного риманова многообразия, Фундаментальная и прикладная математика, 2006, том 12, выпуск 6, стр. 3-15.

[21] Х. фон Вайцзеккер, О.Г. Смолянов, О. Виттих, Диффузия на компактном римановом многообразии и поверхностные меры, доклады Академии Наук, 371 (2000), N 4, 442–447.

рая не предполагает ни единственность локального решения уравнения (1), ни тем более существование глобального решения этого уравнения. При этом уравнение вида (1) мы рассматриваем на произвольном локально выпуклом пространстве. Теорема (4) является центральным результатом в диссертации. Используя эту теорему, мы получаем обобщения теорем Чернова, Троттера и Троттера-Като на случай секвенциально полных локально выпуклых пространств. Даже в случае банахова пространства область применения теоремы (4) значительно шире, чем у теоремы Чернова. В частности из неё следует, что если существует локальное решение уравнения

$$\dot{x} = \mathrm{Z}x \tag{2}$$

с начальным условием $x(0) = x_0$ для диссипативного оператора Z в гильбертовом пространстве $\mathbf{X}$, то это решение представимо в виде формулы типа Чернова. Также из этой теоремы непосредственно следует, что из существования локального решения уравнения Шредингера следует представление этого решения в виде фейнмановского интеграла. Используя теорему (4), в диссертации доказываются необходимые и достаточные условия существования локального решения уравнения вида (1). Как следствие этих результатов, мы получаем необходимые и достаточные условия того, что замыкания операторов являются генераторами локально равностепенно непрерывных полугрупп, заданных на секвенциально полных локально выпуклых пространствах. В частности, в работе найдены необходимые и достаточные критерии того, что сумма двух генераторов локально равностепенно непрерывных полугрупп является генератором локально равностепенно непрерывной полугруппы и при этом формула Троттера справедлива. Отметим также, что интерес представляет само доказательство теоремы (4), поскольку оно может быть использовано для оценки аппроксимации решения задачи Коши уравнения вида (1).

В первой главе рассматривается задача Коши уравнения (1). В ней доказывается, что если существует локальное решение уравнения (1), то тогда это решение будет единственным и её производная по времени будет непрерывной. Также в этой главе доказываются различные вспомогательные результаты, которые в дальнейшем будут использоваться.

Глава состоит из трех параграфов. В параграфе §1.1 формулируются основные определения используемые в диссертации.

Для произвольного локально выпуклого пространства $\mathbf{E}$ над полем $\mathbb{T} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ с топологией задаваемой полунормами $\|\cdot\|_\alpha$, $\alpha \in \Omega$, мы предполагаем, что $\mathcal{L}(\mathbf{E})$ — пространство всех ограниченных линейных операторов в

$\mathbf{E}$ с топологией поточечной сходимости (сильной операторной топологии), I — тождественный оператор в $\mathbf{E}$. Для любой функции C, определенной на подмножестве пространства $\mathbf{E}$, через $\mathcal{D}(\mathrm{C})$ будет обозначаться область определения C. Для любой функции $\mathrm{S} : [0, \infty) \mapsto \mathcal{L}(\mathbf{E})$ обозначим через S^* функцию из $[0, \infty)$ в $\mathcal{L}(\mathbf{E})$ такую, что выполняется равенство $\mathrm{S}^*(s) = (\mathrm{S}(s))^*$ для каждого $s \geq 0$.

Определение 7. *Семейство функций* $\mathrm{G}_\beta \in \mathcal{L}(\mathbf{E})$, $\beta \in \Gamma$, *равностепенно непрерывно, если для любого* $\alpha \in \Omega$ *существуют* $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$, $\alpha_i \in \Omega$, *и* $\{b_i\}_{i=1}^n$, $b_i > 0$, *такие, что* $\sup\limits_{\beta\in\Gamma} \|\mathrm{G}_\beta x\|_\alpha \leq \sum_{i=1}^n b_i \|x\|_{\alpha_i}$ *для каждого* $x \in \mathbf{E}$.

Определение 8. *Для любой функции* $\mathrm{F} : [0, \infty) \mapsto \mathcal{L}(\mathbf{E})$ *и любого числа* $s \geq 0$ *пусть* $\mathbf{B}_s^{\mathrm{F}} \subset \mathcal{L}(\mathbf{E})$ *— семейство функций* $\{\mathrm{F}^m(\frac{d}{n}) | md/n \leq s,\ n, m \in \mathbb{N},\ d \geq 0\}$.

Определение 9. $\mathcal{E}_{\mathbf{E}}$ *— множество, состоящее из всех функций* $\mathrm{F} : [0, \infty) \mapsto \mathcal{L}(\mathbf{E})$ *таких, что* $\mathrm{F}(0) = \mathrm{I}$ *и для каждого* $s \geq 0$ *множество* $\mathbf{B}_s^{\mathrm{F}}$ *равностепенно непрерывно.*

Определение 12. *Для любой функции* $\mathrm{F} : [0, \infty) \mapsto \mathcal{L}(\mathbf{E})$ *пусть* $\mathbf{E}_{\mathrm{F}}$ *— множество, состоящее из всех* $f \in \mathbf{E}$ *для которых существует последовательность* $\{f_s\}_{s\geq 0}$ *такая, что существуют пределы* $\lim\limits_{h\to 0} f_h = f$, $\lim\limits_{h\to 0} h^{-1}(\mathrm{S}(h) - \mathrm{S}(0)) f_h$.

Определение 13. *Мы назовем (сильной) многозначной эффективной производной в* 0 *функции* $\mathrm{S} : [0, \infty) \mapsto \mathcal{L}(\mathbf{E})$ *отображение* $\mathrm{S}'_{mef}(0) : \mathbf{E}_{\mathrm{F}} \mapsto 2^{\mathbf{E}}$ *удовлетворяющее условию: для любого* $f \in \mathbf{E}_{\mathrm{F}}$ $\mathrm{S}'_{mef}(0) f$ *состоит из всех* $g \in \mathbf{E}$ *для которых существуют последовательности* $\{f_s\}_{s\geq 0}$ *такие, что существуют пределы* $\lim\limits_{h\to 0} f_h = f$, $\lim\limits_{h\to 0} h^{-1}(\mathrm{S}(h) - \mathrm{S}(0)) f_h = g$.

Определение 14. *Мы будем говорить, что* $\mathrm{S}'_{mef}(0)$ *однозначная, если* $\mathrm{S}'_{mef}(0) f$ *состоит из одного элемента для каждого* $f \in \mathbf{E}_{\mathrm{F}}$.

Определение 15. *Пусть* S *— функция из* $[0, \infty)$ *в* $\mathcal{L}(\mathbf{E})$ *и* $\mathrm{S}'_{mef}(0)$ *однозначна. Мы назовем (сильной) эффективной производной в*0 *функции* S *линейное отображение* $\mathrm{S}'_{ef}(0) : \mathbf{E}_{\mathrm{F}} \mapsto \mathbf{E}$ *такое, что для каждого* $f \in \mathbf{E}_{\mathrm{F}}$ $\mathrm{S}'_{ef}(0) f \in \mathrm{S}'_{mef}(0) f$. *Мы будем говорить, что существует (сильная) эффективная производная* $\mathrm{S}'_{ef}(0)$, *если* $\mathrm{S}'_{mef}(0)$ *однозначна.*

Определение 16. *Мы назовем (сильной) производной в* 0 *функции* $\mathrm{S} : [0, \infty) \mapsto \mathcal{L}(\mathbf{E})$ *линейное отображение* $\mathrm{S}'(0) : \mathcal{D}(\mathrm{S}'(0)) \mapsto \mathbf{E}$ *определенное равенством* $\mathrm{S}'(0)\psi = \lim\limits_{h\to 0} h^{-1}(\mathrm{S}(h)\psi - \mathrm{S}(0)\psi)$, $\psi \in \mathcal{D}(\mathrm{S}'(0))$, *где* $\mathcal{D}(\mathrm{S}'(0))$ *состоит из всех* $\psi \in \mathbf{E}$ *для которых этот предел существует.*

Определение 17. *Функцию* $\mathrm{T} : [0, \infty) \to \mathcal{L}(\mathbf{E})$ *назовём* lC_0*-полугруппой,*

если выполняются следующие условия:
1) $\mathrm{T}(0) = \mathrm{I}$, $\mathrm{T}(l+m) = \mathrm{T}(l)\mathrm{T}(m)$ *для каждых* $l,\ m \in [0,\ \infty)$.
2) Функция T *непрерывна.*
3) $\mathrm{T} \in \mathcal{E}_{\mathbf{E}}$.
Определение 18. *Линейный оператор* Z *назовём генератором* lC_0*-полугруппы* T*, если* Z *является (сильной) производной в нуле* 0 *функции* T.

Хорошо известен факт, что имеется взаимно однозначное соответствие между lC_0-полугруппами и их генераторами.
Определение 19. *Назовём* $\mathcal{D}$ *ядром генератора* Z lC_0*-полугруппы* T*, если замыкание множества* $\{(x, \mathrm{Z}x) | x \in \mathcal{D}\}$ *в* $\mathbf{E} \times \mathbf{E}$ *совпадает с графиком функции* Z.
Определение 20. $\mathcal{F}_{\mathbf{E}}$ *— множество, состоящее из всех функций* $\mathrm{F} : [0,\ \infty) \mapsto \mathcal{L}(\mathbf{E})$ *таких, что* $\mathrm{F} \in \mathcal{E}_{\mathbf{E}}$ *и* $\mathcal{D}(\mathrm{S}'_{mef}(0))$ *плотно в* $\mathbf{E}$.
Определение 21. $\mathcal{Z}_{\mathbf{E}}$ *— множество, состоящее из всех плотно определенных линейных операторов в* $\mathbf{E}$ *для которых существуют функции* $\mathrm{F} \in \mathcal{F}_{\mathbf{E}}$ *такие, что* $\mathcal{D}(\mathrm{Z}) \subset \mathcal{D}(\mathrm{F}'_{ef}(0))$ *и* $\mathrm{Z}f = \mathrm{F}'_{ef}(0)f$ *для каждого* $f \in \mathcal{D}(\mathrm{Z})$.

Далее всюду мы предполагаем, что $\mathbf{X}$ — хаусдорфово локально выпуклое пространство над полем $\mathbb{T} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\})$ с топологией порожденной полунормами $\|\cdot\|_\alpha$, $\alpha \in \Omega$, и $\mathcal{B}$ — либо сепарабельное рефлексивное банахово пространство, либо гильбертово пространство.
Замечание 2. *Условие хаусдорфовости пространства* $\mathbf{X}$ *на самом деле не является существенным, поскольку вместо любого локально выпуклого пространства можно рассматривать соответствующее фактор-пространство.*

В параграфе §1.2 мы доказываем существование эффективной производной $\mathrm{S}'_{ef}(0)$ для функций $\mathrm{S} \in \mathcal{F}_{\mathbf{X}}$. Также в ней доказана следующая теорема:
Теорема 1. *Пусть* $\mathrm{F} \in \mathcal{F}_{\mathbf{X}}$*. Пусть также линейный оператор* Z *имеет область определения* $\mathcal{D}(\mathrm{Z}) \subset \mathcal{D}(\mathrm{F}'_{ef}(0))$ *и*

$$\mathrm{Z}f = \mathrm{F}'_{ef}(0)f,\ \ f \in \mathcal{D}(\mathrm{Z}).$$

Тогда оператор Z *замыкаем.*

Из теоремы 1 непосредственно следует, что если $\mathrm{Z} \in \mathcal{Z}_{\mathbf{X}}$, то тогда Z — замыкаемый оператор.
Замечание 4. *Далее мы будем часто пользоваться тем, что оператор* $\mathrm{Z} \in \mathcal{Z}_{\mathbf{X}}$ *является замыкаемым оператором, и в условиях некоторых утверждений мы не будем пояснять существование замыкания оператора* Z $(\overline{\mathrm{Z}})$*, если из других условий этих утверждений следует, что* $\mathrm{Z} \in \mathcal{Z}_{\mathbf{X}}$.

В параграфе §1.3 вводится определение локального решения и доказываются некоторые свойства этих решений.

Определение 22. *Функция $g : [0, l) \mapsto \mathrm{X}$, $l > 0$, называется локальным решением на полуинтервале $[0, l)$ системы*

$$\begin{aligned} f'(t) &= \overline{\mathrm{Z}} f(t),\ t \in [0, l), \\ f(0) &= h \in \mathcal{D}(\overline{\mathrm{Z}}), \end{aligned}$$

где $\mathrm{Z} \in \mathcal{Z}_{\mathbf{E}}$, если выполняются следующие условия:
1) $g(s) \in \mathcal{D}(\overline{\mathrm{Z}})$ при каждом $s \in [0, l)$.
2) $g(0) = h$ и $(g(s))'_s = \overline{\mathrm{Z}} g(s)$, при каждом $s \in [0, l)$.

Следующие две теоремы показывают единственность и гладкость локальных решений соответствующих систем уравнений:

Теорема 2. *Предположим, что функция $\mathrm{F} \in \mathcal{F}_{\mathbf{X}}$ и $t > 0$. Предположим также, что линейный оператор Z имеет область определения $\mathcal{D}(\mathrm{Z}) \subset \mathcal{D}({\mathrm{F}'}_{ef}(0))$ и*

$$\mathrm{Z} f = {\mathrm{F}'}_{ef}(0) f,\ f \in \mathcal{D}(\mathrm{Z}).$$

Если существует локальное решение $f : [0, l) \mapsto \mathrm{X}$ системы

$$\begin{aligned} f'(s) &= \overline{\mathrm{Z}} f(s),\ s \in [0, l), \\ f(0) &= g \in \mathcal{D}(\overline{\mathrm{Z}}), \end{aligned}$$

то тогда это решение единственное и

$$f(s) = w\text{-}\lim_{n \to \infty} \{\mathrm{F}(t/n)\}^{[n \frac{s}{t}]} g,\ s \in [0, l).$$

Теорема 3. *Предположим, что $\mathrm{F} \in \mathcal{F}_{\mathbf{X}}$. Предположим также, что линейный оператор Z имеет область определения $\mathcal{D}(\mathrm{Z}) \subset \mathcal{D}({\mathrm{F}'}_{ef}(0))$ и*

$$\mathrm{Z} f = {\mathrm{F}'}_{ef}(0) f,\ f \in \mathcal{D}(\mathrm{Z}).$$

Пусть $f : [0, l) \mapsto \mathrm{X}$ — локальное решение системы

$$\begin{aligned} f'(t) &= \overline{\mathrm{Z}} f(t),\ t \in [0, l), \\ f(0) &= g \in \mathcal{D}(\overline{\mathrm{Z}}). \end{aligned}$$

Тогда $f \in C_1([0, l), \mathrm{X})$.

Во второй главе доказывается теорема о представимости локального решения уравнения (1) в виде формулы типа Чернова, которая не предполагает ни единственность локального решения уравнения (1), ни тем более существование глобального решения этого уравнения. При этом уравнение вида

(1) мы рассматриваем на произвольном локально выпуклом пространстве. Эта теорема является центральным результатом в диссертации. Используя эту теорему, мы получаем обобщения теорем Чернова, Троттера и Троттера-Като на случай секвенциально полных локально выпуклых пространств. В частности из этой теоремы непосредственно следует, что из существования локального решения уравнения Шредингера следует представление этого решения в виде фейнмановского интеграла. Также эта теорема в дальнейшем будет использована для доказательств необходимых и достаточных условий существования локального решения уравнения вида (1). И как следствие этих результатов, мы в дальнейшем получим необходимые и достаточные условия того, что замыкания операторов являются генераторами локально равностепенно непрерывных полугрупп, заданных на секвенциально полных локально выпуклых пространствах.

Вторая глава состоит из двух параграфов. В параграфе §2.1 доказывается теорема о представимости локального решения уравнения (1) в виде формулы типа Чернова. Она формулируется следующим образом:

Теорема 4. *Предположим, что функция* $\mathrm{F} \in \mathcal{F}_{\mathbf{X}}$*. Предположим также, что линейный оператор* Z *имеет область определения* $\mathcal{D}(\mathrm{Z}) \subset \mathcal{D}({\mathrm{F}'}_{ef}(0))$ *и*

$$\mathrm{Z}f = {\mathrm{F}'}_{ef}(0)f, \ f \in \mathcal{D}(\mathrm{Z}).$$

Если существует локальное решение $f : [0, l) \mapsto \mathrm{X}$ *системы*

$$\begin{aligned} f'(t) &= \overline{\mathrm{Z}}f(t), \ t \in [0, l), \\ f(0) &= h \in \mathcal{D}(\overline{\mathrm{Z}}), \end{aligned}$$

то тогда $\mathrm{F}(\frac{t}{n})^n h$ *сходится к* $f(t)$ *при* $n \to \infty$ *равномерно по* $t \in [0, t_0]$ *для каждого* $t_0 \in (0, l)$.

Отметим, что доказательство теоремы (4) может быть использовано для оценки аппроксимации решения задачи Коши уравнения вида (1).

В параграфе §2.2 доказываются обобщения теорем Чернова, Троттера и Троттера-Като для секвенциально полных локально выпуклых пространств.

Следующая теорема является обобщением теоремы Чернова[15] для локально выпуклых пространств.

Теорема 6. *Пусть оператор* Z *является генератором* lC_0*-полугруппы в секвенциально полном локально выпуклом пространстве* $\mathbf{X}$ *и* $\mathcal{D}$ *является ядром (существенной областью определения)генератора* Z*. Предположим также, что существует функция* $\mathrm{F} \in \mathcal{F}_{\mathbf{X}}$ *такая, что*

$$\mathrm{F}'_{ef}(0)f = \mathrm{Z}f$$

для каждого $f \in \mathcal{D}$. *Тогда* $\mathrm{F}(t/n)^n f$ *сходится к* $\exp(t\mathrm{Z})f$ *при* $n \to \infty$ *для произвольного* $f \in \mathbf{X}$ *равномерно по* $t \in [0,\, t_0]$ *для каждого* $t_0 > 0$.

Далее приводится теорема представляющая собой обобщение теоремы Троттера-Като для произвольных локально равностепенно непрерывных полугрупп, заданных на секвенциально полных локально выпуклых пространств: а именно, в ней утверждается эквивалентность сходимости последовательности полугрупп и сходимости последовательности порождающих генераторов при соответствующих условиях.

Теорема 7. *Для каждого* $s \geq 0$ *пусть* Z_s *является генератором* lC_0-*полугруппы в секвенциально полном локально выпуклом пространстве* $\mathbf{X}$. *Пусть также множество операторов*

$$\mathbf{A}_{l_0} = \{\exp(l\mathrm{Z}_s) | l \in [0,\, l_0],\ s \geq 0\}$$

равностепенно непрерывно для каждого $l_0 \geq 0$. *Пусть* $\mathcal{D}$ *состоит из всех* $f \in \mathcal{D}(\mathrm{Z}_0)$ *для которых существует последовательность* $\{f_s\}_{s>0}$, $f_s \in \mathcal{D}(\mathrm{Z}_s)$, *такая, что существуют пределы*

$$\lim_{s\to 0} f_s = f,$$

$$\lim_{s\to 0} \mathrm{Z}_s f_s = \mathrm{Z}_0 f.$$

Тогда следующие условия эквивалентны:

i) $\exp(l\mathrm{Z}_s)f$ *сходится к* $\exp(l\mathrm{Z}_0)f$ *при* $s \to 0$ *равномерно по* $l \in [0,\, t_0]$ *для каждых* $t_0 > 0$ *и* $f \in \mathbf{X}$.

ii) $\mathcal{D}$ *— ядро (существенная область определения) генератора* Z_0.

Следующая теорема является обобщением теоремы Троттера для локально выпуклых пространств.

Теорема 8. *Пусть* A, B *и* Z *являются генераторами* lC_0-*полугрупп в секвенциально полном локально выпуклом пространстве* $\mathbf{X}$ *и* $\mathcal{D}$ *является ядром (существенной областью определения) генератора* Z. *Предположим, что* $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}(\mathrm{A}) \cap \mathcal{D}(\mathrm{B})$,

$$\mathrm{Z}f = \mathrm{A}f + \mathrm{B}f$$

для каждого $f \in \mathcal{D}$ *и функция*

$$\{\exp(\cdot \mathrm{A})\exp(\cdot \mathrm{B}) : [0,\, \infty) \to \mathcal{L}(\mathbf{X})\} \in \mathcal{E}_{\mathbf{X}}.$$

Тогда $(\exp(\frac{t}{n}\mathrm{A})\exp(\frac{t}{n}\mathrm{B}))^n f$ *сходится к* $\exp(t\mathrm{Z})f$ *при* $n \to \infty$ *для всех* $f \in \mathbf{X}$ *равномерно по* $t \in [0,\, t_0]$ *для каждого* $t_0 > 0$.

В заключение покажем, что результаты, полученные в работах[7], [14] в отличие от приведенных выше, не применимы для произвольных равностепенно непрерывных полугрупп на секвенциально полных локально выпуклых пространствах. Для этого нам достаточно построить генератор Z локально равностепенно непрерывной полугруппы T, который удовлетворяет следующему условию: не существует числа $\lambda \in \mathbb{C}$, при котором образ оператора $\lambda\mathrm{I} - \mathrm{Z}$ будет плотен в X. Следующий пример удовлетворяет этому условию:

Пример 1. *Пусть* $\mathbf{X}$ *состоит из всех комплеснозначных непрерывных функций на комплексной плоскости и топология на* $\mathbf{X}$ *задается полунормами* $\|\cdot\|_r,\ r > 0,$*, которые определяются равенствами* $\|f\|_r = \sup\limits_{|x|\le r} |f(x)|,\ x \in \mathbb{C}$*, для каждого* $f \in \mathbf{X}$*. Определим оператор умножения* $\mathrm{Z} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ *равенством* $\mathrm{Z}(f(x)) = xf(x),\ f \in \mathbf{X},\ x \in \mathbb{C}$*. Тогда легко проверяется, что* Z *порождает* lC_0*-полугруппу* T*, которая удовлетворяет равенству* $\mathrm{T}(s)(f(x)) = e^{sx}f(x),\ s \ge 0,\ f \in \mathbf{X},\ x \in \mathbb{C}$*. Тогда очевидно, что при любом* $\lambda \in \mathbb{C}$ *замыкание образа* $\lambda\mathrm{I} - \mathrm{Z}$ *не содержит ни одну не обращающуюся в 0 непрерывную функцию из* $\mathbf{X}$*. Таким образом, мы получили, что образ оператора* $\lambda\mathrm{I} - \mathrm{Z}$ *не плотен в* X*.*

В третьей главе доказываются необходимые и достаточные условия существования локального решения уравнения вида (1). И как следствие этих результатов, выводятся необходимые и достаточные условия того, что замыкания операторов являются генераторами локально равностепенно непрерывных полугрупп, заданных на секвенциально полных локально выпуклых пространствах.

Третья глава состоит из трех параграфов. В параграфе §3.1 доказываются необходимые и достаточные условия существования локального решения уравнения вида (1).

Теорема 9. *Пусть оператор* $\mathrm{Z} \in \mathcal{Z}_{\mathbf{X}}$ *и* $t > 0$*. Пусть также существует функция* $\mathrm{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{X}}$ *такая, что выполняются следующие условия:*
i) $\mathcal{D}(\mathrm{F}'(0)) \supset \mathcal{D}(\mathrm{Z})$ *и* $\mathrm{F}'(0)f = \mathrm{Z}f,\ f \in \mathcal{D}(\mathrm{Z})$*.*
ii) $\mathcal{D}(\mathrm{F}^{*\prime}(0))$ **-плотно в* $\mathbf{X}^*$*.*
Тогда локальное решение $f : [0,\, l) \mapsto \mathrm{X},\ l > 0,$ *системы*

$$\begin{aligned} f'(v) &= \overline{\mathrm{Z}}f(v), \\ f(0) &= h \in \mathcal{D}(\overline{\mathrm{Z}}), \end{aligned}$$

существует на полуинтервале $[0,\, l)$ *в том и только в том случае, когда выполнены следующие условия:*
a) Из любой подпоследовательности последовательности $\{\mathrm{F}^{[ns/t]}(\frac{t}{n})g\}_{n\in\mathbb{N}}$*,* $g \in \{h, \overline{\mathrm{Z}}h\}$*,* $s \in [0,\, l)$*, можно выбрать слабо сходящуюся подподпоследовательность.*

b) Для любых $s \in [0,\, l)$ *и* $\phi \in \mathbf{X}^*$ *существует последовательность* $\{f_n^s\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n^s \in \mathcal{D}(\mathrm{Z})$, *такая, что*

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathrm{F}^{[ns/t]}(\tfrac{t}{n})h - f_n^s\|_\phi = 0.$$

c) Из любой подпоследовательности последовательности $\{\mathrm{Z} f_n^s\}_{n\in\mathbb{N}}$, $s \in [0,\, l)$, *можно выбрать слабо сходящуюся подподпоследовательность.*
Более того, если условия (a)-(c) выполнены, то тогда

$$f(v) = \lim_{n\to\infty} \{\mathrm{F}(v/n)\}^n h,\; v \in [0,\, l).$$

Из теоремы 9 получаем следующее утверждение:
Следствие 5. *Пусть оператор* $\mathrm{Z} \in \mathcal{Z}_{\mathbf{X}}$ *и* $t > 0$. *Пусть также существует функция* $\mathrm{F} \in \mathcal{F}_{\mathbf{X}}$ *такая, что выполняются следующие условия:*
i) $\mathcal{D}(\mathrm{F}'(0)) \supset \mathcal{D}(\mathrm{Z})$ *и* $\mathrm{F}'(0)f = \mathrm{Z}f,\ f \in \mathcal{D}(\mathrm{Z})$.
ii) $\mathcal{D}(\mathrm{F}^{*\prime}(0))$ **-плотно в* $\mathbf{X}^*$.
Тогда локальное решение $f : [0,\, l) \mapsto \mathrm{X},\ l > 0$, *системы*

$$\begin{array}{rcl} f'(v) & = & \overline{\mathrm{Z}} f(v), \\ f(0) & = & h \in \mathcal{D}(\overline{\mathrm{Z}}), \end{array}$$

существует на полуинтервале $[0,\, l)$ *в том и только в том случае, когда выполнены следующие условия:*
a) Из любой подпоследовательности последовательности $\{\mathrm{F}^{[ns/t]}(\tfrac{t}{n})g\}_{n\in\mathbb{N}}$, $g \in \{h,\, \overline{\mathrm{Z}}h\}$, $s \in [0,\, l)$, *можно выбрать слабо сходящуюся подподпоследовательность.*
b) Для любых $s \in [0,\, l)$ *и* $\phi \in \mathbf{X}^*$ *существует последовательность* $\{f_n^s\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n^s \in \mathcal{D}(\mathrm{Z})$, *такая, что*

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathrm{F}^{[ns/t]}(\tfrac{t}{n})h - f_n^s\|_\phi = 0$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathrm{F}^{[ns/t]}(\tfrac{t}{n})\overline{\mathrm{Z}}h - \mathrm{Z}f_n^s\|_\phi = 0.$$

Более того, если условия (a)-(b) выполнены, то тогда

$$f(v) = \lim_{n\to\infty} \{\mathrm{F}(v/n)\}^n h,\; v \in [0,\, l).$$

Если заменить условие (a) теоремы 9 на условие, что из любой подпоследовательности последовательности $\{\mathrm{F}^{[ns/t]}(\tfrac{t}{n})h\}_{n\in\mathbb{N}}$, $s \in [0,\, l)$, можно выбрать сходящуюся подподпоследовательность, то тогда, как следует из следующей теоремы, условие (iii) можно опустить.

Теорема 11. *Предположим, что* Z *— плотно определенный линейный оператор в локальном выпуклом пространстве* $\mathbf{X}$ *и* $t > 0$. *Предположим также, что существует функция* $\mathrm{F} \in \mathcal{F}_{\mathbf{X}}$ *такая, что* $\mathcal{D}(\mathrm{F}'(0)) \supset \mathcal{D}(\mathrm{Z})$ *и* $\mathrm{F}'(0)f = \mathrm{Z}f,\ f \in \mathcal{D}(\mathrm{Z})$.
Тогда локальное решение $f : [0,\, l) \mapsto \mathrm{X},\ l > 0$, *системы*

$$\begin{aligned} f'(v) &= \overline{\mathrm{Z}}f(v), \\ f(0) &= h \in \mathcal{D}(\overline{\mathrm{Z}}), \end{aligned}$$

существует на полуинтервале $[0,\, l)$ *в том и только в том случае, когда выполнены следующие условия:*
a) Из любой подпоследовательности последовательности $\{\mathrm{F}^{[ns/t]}(\frac{t}{n})h\}_{n\in\mathbb{N}}$, $s \in [0,\, l)$, *можно выбрать сходящуюся подподпоследовательность.*
b) Для любого $s \in [0,\, l)$ *существует последовательность* $\{f_n^s\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n^s \in \mathcal{D}(\overline{\mathrm{Z}})$, *такая, что существует предел* $w\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} (\mathrm{F}^{[ns/t]}(\frac{t}{n})h - f_n^s) = 0$ *и из любой подпоследовательности последовательности* $\{\mathrm{Z}f_n^s\}_{n\in\mathbb{N}}$ *можно выбрать слабо сходящуюся подподпоследовательность.*
Более того, если условия (a)-(b) выполнены, то тогда

$$f(v) = \lim_{n\to\infty} \{\mathrm{F}(v/n)\}^n h,\, v \in [0,\, l).$$

Из теоремы 11 получаем следующий результат.

Следствие 6. *Пусть* $t > 0$. *Предположим, что* C *и* D *являются генераторами* lC_0*-полугрупп* $\exp(s\mathrm{C})$ *и* $\exp(s\mathrm{D})$ *в секвенциально полном локально выпуклом пространстве* $\mathbf{X}$. *Предположим также, что выполнены следующие условия:*
i) $\mathcal{D}(\mathrm{C}) \cap \mathcal{D}(\mathrm{D})$ *плотно в* $\mathbf{X}$.
ii) $\{[0,\, \infty) \ni s \mapsto \exp(s\mathrm{C})\exp(s\mathrm{D})\} \in \mathcal{E}_{\mathbf{X}}$.
Тогда локальное решение $f : [0,\, l) \mapsto \mathrm{X},\ l > 0$, *системы*

$$\begin{aligned} f'(v) &= (\overline{\mathrm{C} + \mathrm{D}})f(v), \\ f(0) &= h \in \mathcal{D}(\overline{\mathrm{C} + \mathrm{D}}), \end{aligned}$$

существует на полуинтервале $[0,\, l)$ *в том и только в том случае, когда выполнены следующие условия:*
a) Из любой подпоследовательности последовательности $\{\{\exp(\frac{t}{n}\mathrm{C})\exp(\frac{t}{n}\mathrm{D})\}^{[ns]}h\}_{n\in\mathbb{N}}$, $s \in [0,\, l/t)$, *можно выбрать сходящуюся подподпоследовательность.*

b) Для любого $s \in [0, l/t)$ существует последовательность $\{f_n^s\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n^s \in \mathcal{D}(\mathrm{C}) \cap \mathcal{D}(\mathrm{D})$, такая, что существует предел $w\text{-}\lim_{n\to\infty} \{\exp(\frac{t}{n}\mathrm{C})\exp(\frac{t}{n}\mathrm{D})\}^{[ns]}f - f_n^s) = 0$ и из любой подпоследовательности последовательности $\{(\mathrm{C}+\mathrm{D})f_n^s\}_{n=1}^{\infty}$ можно выбрать слабо сходящуюся подподпоследовательность.

Более того, если условия (a)-(b) выполнены, то тогда выполняется равенство

$$f(s)f = \lim_{n\to\infty} \{\exp(\tfrac{s}{n}\mathrm{C})\exp(\tfrac{s}{n}\mathrm{D})\}^n f,\ s \in [0,\, l),$$

для каждого $f \in \mathrm{X}$.

В параграфе §3.2 доказываются необходимые и достаточные условия того, что замыкания операторов являются генераторами локально равностепенно непрерывных полугрупп, заданных на секвенциально полных локально выпуклых пространствах.

Теорема 12. *Пусть $\mathbf{X}$ — секвенциально полное локально выпуклое пространство и функция $\mathrm{F} \in \mathcal{F}_{\mathbf{X}}$. Предположим, что линейный оператор Z имеет область определения $\mathcal{D}(\mathrm{Z}) \subset \mathcal{D}(\mathrm{F}'(0))$ и*

$$\mathrm{Z}f = \mathrm{F}'(0)f,\ \ f \in \mathcal{D}(\mathrm{Z}).$$

Предположим также, что $\mathbf{A} \subset \mathcal{D}(\mathrm{Z})$ является плотным линейным подпространством $\mathbf{X}$ и существует фиксированное $l > 0$ такое, что существует локальное решение $f : [0,\, l) \mapsto \mathrm{X}$ системы

$$\begin{aligned} f'(s) &= \overline{\mathrm{Z}}f(s),\ \ s \in [0,\, l), \\ f(0) &= f_0 \end{aligned}$$

для всех $f_0 \in \mathbf{A}$. Тогда Z замыкаем и $\overline{\mathrm{Z}}$ является генератором lC_0-полугруппы S. Более того, выполнено следующее равенство:

$$\mathrm{S}(t)f = \lim_{n\to\infty} \mathrm{F}(t/n)^n f,\ t \geq 0,$$

для каждого $f \in \mathrm{X}$.

Выше приведенный результат является аналогом теоремы 2.27 из [2] для локально выпуклых пространств. Из теорем 9 и 12 получаем следующий результат:

Теорема 13. *Предположим, что Z — плотно определенный линейный оператор в секвенциально полном локальном выпуклом пространстве $\mathbf{X}$ и $t > 0$. Предположим также, что существует функция $\mathrm{F} \in \mathcal{F}_{\mathbf{X}}$ удовлетворяющая следующим условиям:*

i) $\mathrm{F} \in \mathcal{F}_{\mathbf{X}}$.
ii) $\mathcal{D}(\mathrm{F}'(0)) \supset \mathcal{D}(\mathrm{Z})$ *и* $\mathrm{F}'(0)f = \mathrm{Z}f,\ f \in \mathcal{D}(\mathrm{Z})$.
iii) $\mathcal{D}(\mathrm{F}^{*\prime}(0))$ **-плотно в* $\mathbf{X}^*$.
Тогда оператор Z *замыкаем и его замыкание является генератором* lC_0*-полугруппы тогда и только тогда, когда существует плотное линейное подпространство* $\mathbf{A} \subseteq \mathcal{D}(\mathrm{Z})$ *такое, что для любых* $f \in \mathbf{A}$ *и* $s \geq 0$ *существует последовательность* $\{f_n^s\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n^s \in \mathcal{D}(\mathrm{Z})$, *удовлетворяющая следующим условиям:*
a) $\lim\limits_{n\to\infty} \|\mathrm{F}^{[ns]}(\frac{t}{n})f - f_n^s\|_\phi = 0$ *для каждого* $\phi \in \mathbf{X}^*$.
b) Из любой подпоследовательности последовательности $\{\mathrm{Z}f_n^s\}$ *можно выбрать слабо сходящуюся подподпоследовательность.*
c) Из любой подпоследовательности последовательности $\{f_n^s\}$ *можно выбрать слабо сходящуюся подподпоследовательность.*

Используя теорему 13, получаем следующий результат:
Теорема 14. *Пусть* Z *— плотно определенный линейный оператор в секвенциально замкнутом локально выпуклом пространстве* $\mathbf{X}$ *и* $t > 0$. *Тогда* Z *замыкаем и его замыкание является генератором* lC_0*-полугруппы тогда и только тогда, когда существует функция* $\mathrm{F} \in \mathcal{F}_{\mathbf{X}}$ *такая, что выполняются следующие условия:*
i) $\mathcal{D}(\mathrm{F}'(0)) \supset \mathcal{D}(\mathrm{Z})$ *и* $\mathrm{F}'(0)f = \mathrm{Z}f,\ f \in \mathcal{D}(\mathrm{Z})$.
ii) $\mathcal{D}(\mathrm{F}^{*\prime}(0))$ **-плотно в* $\mathbf{X}^*$.
iii) Существует плотное линейное пространство $\mathbf{A} \subseteq \mathcal{D}(\mathrm{Z})$ *такое, что для каждых* $f \in \mathbf{A}$, $s \geq 0$ *существует последовательность* $\{f_n^s\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n^s \in \mathcal{D}(\mathrm{Z})$, *удовлетворяющая следующим условиям:*
a) $\lim\limits_{n\to\infty} \|\mathrm{F}^{[ns]}(\frac{t}{n})f - f_n^s\|_\phi = 0$ *для каждого* $\phi \in \mathbf{X}^*$.
b) Из любой подпоследовательности последовательности $\{\mathrm{Z}f_n^s\}_{n\in\mathbb{N}}$ *можно выбрать слабо сходящуюся подподпоследовательность.*
c) Из любой подпоследовательности последовательности $\{f_n^s\}_{n\in\mathbb{N}}$ *можно выбрать слабо сходящуюся подподпоследовательность.*
Более того, если условия (i)-(iii) выполнены, то тогда $\exp(t\overline{\mathrm{Z}})f = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{F}(t/n)^n f$.

Если заменить условие (b) теоремы 14 на условие, что из любой подпоследовательности последовательности $\{\mathrm{F}^{[ns/t]}(\frac{t}{n})f\}_{n\in\mathbb{N}}$ можно выбрать сходящуюся подподпоследовательность, то тогда, как следует из следующей теоремы, условие (ii) можно опустить.
Теорема 15. *Предположим, что* Z *— плотно определенный линейный оператор в секвенциально полном локальном выпуклом пространстве* $\mathbf{X}$ *и*

$t > 0$. *Предположим также, что существует функция* $\mathrm{F} \in \mathcal{F}_{\mathbf{X}}$ *такая, что* $\mathcal{D}(\mathrm{F}'(0)) \supset \mathcal{D}(\mathrm{Z})$ *и* $\mathrm{F}'(0)f = \mathrm{Z}f,\ f \in \mathcal{D}(\mathrm{Z})$. *Тогда оператор* Z *замыкаем и его замыкание является генератором* lC_0*-полугруппы тогда и только тогда, когда существует плотное линейное подпространство* $\mathbf{A} \subseteq \mathcal{D}(\mathrm{Z})$ *такое, что для любых* $f \in \mathbf{A}$ *и* $s \geq 0$ *существует последовательность* $\{f_n^s\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n^s \in \mathcal{D}(\mathrm{Z})$, *так, что выполняются следующие условия:*
a) $w\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} (\mathrm{F}^{[ns]}(\frac{t}{n})f - f_n^s) = 0$.
b) Из любой подпоследовательности последовательности $\{\mathrm{F}^{[ns/t]}(\frac{t}{n})f\}_{n\in\mathbb{N}}$ *можно выбрать сходящуюся подподпоследовательность.*
c) Из любой подпоследовательности последовательности $\{\mathrm{Z}f_n^s\}_{n=1}^{\infty}$ *можно выбрать слабо сходящуюся подподпоследовательность.*

Из теоремы 15 получаем следующий результат:

Следствие 9. *Пусть* $t > 0$. *Предположим, что* C *и* D *являются генераторами* lC_0*-полугрупп* $\exp(s\mathrm{C})$ *и* $\exp(s\mathrm{D})$ *в секвенциально полном локально выпуклом пространстве* $\mathbf{X}$. *Предположим также, что выполнены следующие условия:*
i) $\mathcal{D}(\mathrm{C}) \cap \mathcal{D}(\mathrm{D})$ *плотно в* $\mathbf{X}$.
ii) $\{[0, \infty) \ni s \mapsto \exp(s\mathrm{C})\exp(s\mathrm{D})\} \in \mathcal{E}_{\mathbf{X}}$.
Тогда сумма операторов C *и* D *является замыкаемым оператором и его замыкание будет генератором* lC_0*-полугруппы тогда и только тогда, когда существует плотное линейное подпространство* $\mathbf{A} \subseteq \mathcal{D}(\mathrm{C}) \cap \mathcal{D}(\mathrm{D})$ *такое, что для каждых* $f \in \mathbf{A}$ *и* $s \geq 0$ *существует последовательность* $\{f_n^s\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n^s \in \mathcal{D}(\mathrm{C}) \cap \mathcal{D}(\mathrm{D})$, *удовлетворяющая следующим условиям:*
a) $w\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} ((\exp(\frac{t}{n}\mathrm{C})\exp(\frac{t}{n}\mathrm{D}))^{[ns]}f - f_n^s) = 0$.
b) Из любой подпоследовательности последовательности $\{\mathrm{F}^{[ns/t]}(\frac{t}{n})f\}_{n\in\mathbb{N}}$ *можно выбрать сходящуюся подподпоследовательность.*
c) Из любой подпоследовательности последовательности $\{(\mathrm{C}+\mathrm{D})f_n^s\}_{n=1}^{\infty}$ *можно выбрать слабо сходящуюся подподпоследовательность.*
Более того, если условия (a)-(c) выполнены, то тогда выполняется равенство

$$\exp(s(\overline{\mathrm{C}+\mathrm{D}}))f = \lim_{n\to\infty} \{\exp(\tfrac{s}{n}\mathrm{C})\exp(\tfrac{s}{n}\mathrm{D})\}^n f,\ s > 0,$$

для каждого $f \in \mathrm{X}$.

В параграфе §3.3 выводятся некоторые следствия предыдущих результатов для случая, когда $\mathbf{X}$ является рефлексивным сепарабельным банаховым пространством или гильбертовым пространством. В этом случае многие предыдущие результаты существенно упрощаются и мы получаем следующие результаты:

Следствие 10. *Пусть* $\mathrm{Z} : \mathcal{B} \supset \mathcal{D}(\mathrm{Z}) \to \mathcal{B}$ *является линейным оператором,* $\mathcal{D}(\mathrm{Z})$ *плотно в* $\mathcal{B}$ *и* $t > 0$. *Тогда оператор* Z *замыкаем и его замыкание является генератором сильно непрерывной полугруппы тогда и только тогда, когда существует функция* $\mathrm{F} : [0, \infty) \mapsto \mathcal{L}(\mathcal{B})$ *удовлетворяющая следующим условиям:*
i) $\mathrm{F}(0) = \mathrm{I}$ *и существуют* $a \in \mathbb{R}$ *и* $M \geq 1$ *такие, что* $\|\mathrm{F}^m(\frac{s}{n})\| \leq M \exp(as\frac{m}{n})$ *для каждых* n, $m \in \mathbb{N}$ *и* $s \geq 0$.
ii) $\mathcal{D}(\mathrm{F}'(0)) \supset \mathcal{D}(\mathrm{Z})$ *и* $\mathrm{F}'(0)f = \mathrm{Z}f$, *для* $f \in \mathcal{D}(\mathrm{Z})$.
iii) $\mathcal{D}(\mathrm{F}^{*\prime}(0))$ **-плотно в* $\mathcal{B}^*$.
iv) Существует полное линейное подпространство $\mathbf{A} \subseteq \mathcal{D}(\mathrm{Z})$ *такое, что для каждых* $f \in \mathbf{A}$ *и* $s \geq 0$ *существует последовательность* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n \in \mathcal{D}(\mathrm{Z})$, *для которой, во-первых, существует предел*

$$w\text{-}\lim_{n\to\infty} (\mathrm{F}^{[ns]}(\tfrac{t}{n})f - f_n) = 0,$$

и, во-вторых, последовательность $\{\mathrm{Z}f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *является ограниченной.*
Более того, если условия (i)-(iv) выполнены, то тогда выполнено равенство $\exp(s\overline{\mathrm{Z}})f = \lim_{n\to\infty} \mathrm{F}(s/n)^n f$, $s > 0$, *для каждого* $f \in \mathcal{B}$.
Следствие 11. *Пусть* $\mathrm{Z} : \mathcal{B} \supset \mathcal{D}(\mathrm{Z}) \to \mathcal{B}$ *является линейным оператором,* $\mathcal{D}(\mathrm{Z})$ *плотно в* $\mathcal{B}$ *и* $t > 0$. *Предположим, что существует функция* $\mathrm{F} : [0, \infty) \mapsto \mathcal{L}(\mathcal{B})$ *для которой выполнены следующие условия:*
i) $\mathrm{F}(0) = \mathrm{I}$ *и существуют* $a \in \mathbb{R}$ *и* $M \geq 1$ *такие, что*

$$\|\mathrm{F}^m(\tfrac{s}{n})\| \leq M \exp(as\tfrac{m}{n})$$

для любых n, $m \in \mathbb{N}$ *и* $s \geq 0$.
ii) $\mathcal{D}(\mathrm{F}'(0)) \supset \mathcal{D}(\mathrm{Z})$ *и* $\mathrm{F}'(0)f = \mathrm{Z}f$, $f \in \mathcal{D}(\mathrm{Z})$.
iii) $\mathcal{D}(\mathrm{F}^{*\prime}(0))$ **-плотно в* $\mathbf{B}^*$.
Тогда оператор Z *замыкаем и его замыкание является генератором сильно непрерывной полугруппы тогда и только тогда, когда существует плотное линейное подпространство* $\mathbf{A} \subseteq \mathcal{D}(\mathrm{Z})$ *такое, что для любых* $f \in \mathbf{A}$ *и* $s \geq 0$ *существует последовательность* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n \in \mathcal{D}(\mathrm{Z})$, *удовлетворяющая равенству* $w\text{-}\lim_{n\to\infty} (\mathrm{F}^{[ns]}(\frac{t}{n})f - f_n) = 0$, *и для которой последовательность* $\{\mathrm{F}'(0)f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *является ограниченной.*
Следствие 12. *Пусть* $t > 0$. *Предположим, что операторы* C *и* D *являются генераторами сильно непрерывных полугрупп* $\exp(s\mathrm{C})$ *и* $\exp(s\mathrm{D})$ *в* $\mathcal{B}$ *и выполнены следующие условия:*
i) $\mathcal{D}(\mathrm{C}) \cap \mathcal{D}(\mathrm{D})$ *плотно в* $\mathcal{B}$.
ii) $\mathcal{D}(\mathrm{C}^*) \cap \mathcal{D}(\mathrm{D}^*)$ **-плотно в* $\mathcal{B}^*$.

iii) Существуют $a \in \mathbb{R}$ *и* $M \geq 1$ *такие, что выполняется неравенство*

$$\|\{\exp(\tfrac{s}{n}\mathrm{C})\exp(\tfrac{s}{n}\mathrm{D})\}^m\| \leq M\exp(as\tfrac{m}{n})$$

для любых $n,\, m \in \mathbb{N}$ *и* $s > 0$.
Тогда сумма операторов C *и* D *является замыкаемым оператором и его замыкание будет генератором сильно непрерывной полугруппы тогда и только тогда, когда существует плотное линейное подпространство* $\mathbf{A} \subseteq \mathcal{D}(\mathrm{C}) \cap \mathcal{D}(\mathrm{D})$ *такое, что для любых* $f \in \mathbf{A}$ *и* $s \geq 0$ *существует последовательность* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n \in \mathcal{D}(\mathrm{C}) \cap \mathcal{D}(\mathrm{D})$, *удовлетворяющая следующим условиям:*
a) $w\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}((\exp(\tfrac{t}{n}\mathrm{C})\exp(\tfrac{t}{n}\mathrm{D}))^{[ns]}f - f_n) = 0$.
b) $\{(\mathrm{C}+\mathrm{D})f_n\}_{n=0}^{\infty}$ *— ограниченная последовательность.*
Более того, если выполнены условия (a)-(b), то тогда имеет место равенство

$$\exp(s(\overline{\mathrm{C}+\mathrm{D}}))f = \lim_{n\to\infty}\{\exp(\tfrac{s}{n}\mathrm{C})\exp(\tfrac{s}{n}\mathrm{D})\}^n f,\ s > 0,$$

для каждого $f \in \mathcal{B}$.
Замечание 6. *Если операторы* iC *и* iD *являются самосопряженными, то тогда условия (ii), (iii) в следствии 12 можно опустить.*

В заключение я хочу выразить глубокую благодарность моему научному руководителю профессору Олегу Георгиевичу Смолянову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Список работ автора по теме диссертации

[1] А. Ю. Неклюдов, Обращение теоремы Чернова, Матем. заметки, 2008, 83:4, 581–589.
[2] А. Ю. Неклюдов, Обращение теоремы Чернова, Труды XXVIII конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова 2006 г., т.2, 156-158.
[3] А. Ю. Неклюдов, О критериях применимости теорем Чернова и Троттера. Тезисы международной конференции "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы", посвященная памяти И.Г. Петровского, 2007, 209-210.
[4] А. Ю. Неклюдов, Теоремы Чернова и Троттера-Като для локально выпуклых пространств; Моск. гос. ун-т. - Москва, 2008. - 55 с. - Библиогр.: 21 назв. - Рус. - Деп. в ВИНИТИ 03.07.08. № 574-В2008