

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 539.3

ОКУЛОВА Надежда Николаевна

**Численное решение задач нестационарного течения
вязкопластического материала**

Специальность: 01.02.04 — механика деформируемого твёрдого тела

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2008

Работа выполнена на кафедре механики композитов
механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

Научный руководитель: Доктор физико-математических наук
профессор Д.В. Георгиевский

Официальные оппоненты: Доктор физико-математических наук
профессор А.Г. Петров
Кандидат физико-математических наук
доцент А.В. Муравлёв

Ведущая организация: МГТУ "МАМИ"

Защита состоится 24 октября 2008 года в 16 часов на заседании специализированного совета Д 501.001.91 по механике при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова по адресу: 119992, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 1610.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж)

Автореферат разослан « 23 » сентября 2008 года.

Учёный секретарь
диссертационного совета Д 501.001.91
профессор

С.В. Шешенин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Объект исследования и актуальность темы

Наряду с материалами, проявляющими только одно фундаментальное механическое свойство (упругость, вязкость или пластичность), существует значительное количество материалов, обладающих свойствами пластичности и вязкости одновременно. Такими материалами являются, например, масляные краски, полимерные, глинистые и цементные растворы, некоторые металлы при высоких скоростях деформации, высокопарафинистые и смолистые нефти, селевые потоки, массы влажного снега, потоки бытовых отходов, измельчённые продукты пищевой промышленности, т.е. самые различные материалы (среды) искусственного и природного происхождения в достаточно широком диапазоне внешних условий.

Классические модели механики сплошной среды, такие как упругое тело Гука, вязкая ньютоновская жидкость и пластическое тело Сен-Венана не описывают характерных особенностей течения подобных сред. Для их учёта требуется привлечение более сложных математических моделей, имеющих существенные отличия от классических.

Одной из таких моделей является модель вязкопластической среды Бингама (Bingham plastic). Первичные представления о рассматриваемой модели связаны с экспериментальными исследованиями Е.К. Бингама (E.C. Bingham) и Ф.Н. Шведова в конце XIX века. Теоретические исследования были начаты Б. Сен-Венаном (B. Saint-Venant), М. Леви (M. Levy) и Р. Мизесом (R. Mises).

Значительный вклад в развитие вязкопластичности внесли отечественные учёные: А.А. Ильюшин, А.Ю. Ишлинский, Г.И. Баренблатт, П.М. Огибалов, А.Х. Мирзаджанзаде, В.П. Мясников, П.П. Мосолов, Б.Е. Победря, И.А. Кийко, Д.М. Климов, А.Г. Петров, Д.В. Георгиевский, И.М. Астрахан, А.И. Сафрончик, А.Д. Чернышёв, А.В. Гноевой, В.М. Чесноков, а также зарубежные специалисты П. Пэжина, I.R. Ionescu, T.C. Papanastasiou, R.V. Bird, E.J. Dean, R. Glowinski, A.N. Alexandrou, E. Mitsoulis и др.

Течение вязкопластической среды Бингама начинается только с того момента, когда максимальное касательное напряжение T в точках среды достигает некоторой определенной величины τ_0 , которая называется предельным напряжением сдвига или пределом текучести. При дальнейшем увеличении максимального касательного напряжения движение этих сред происходит аналогично движению вязкой ньютоновской жидкости. В процессе движения в вязкопластическом теле формируются области вязкопластического течения и области твёрдого ядра ($T < \tau_0$). Образование и эволюция границ

между областями зачастую представляют основной интерес в прикладных задачах.

Подобные задачи относят к многофазным задачам типа Стефана. На данный момент имеется небольшое количество точных аналитических решений подобного класса задач. Все они относятся к классу пространственно одномерных автомодельных решений.

Основное внимание исследователей сосредоточено на разработках численных и приближённых методов решения. Отметим методы: Слэзкина-Тарга (А.Х. Мирзаджанзаде, П.М. Огибалов, А.В. Гноевой и др.), Кармана-Польгаузена (А.Ю. Ишлинский, Г.И. Баренблатт), Колоднера (А.И. Сафрончик), конечных элементов и конечных объёмов (D. Frederic, P.-C. Gilles, Y. Wang и др.), регуляризации (M. Bercovier, M. Engelman, T.C. Papanastasiou и др.), вариационные (E. Mitsoulis, R. Glowinski и др.), адаптивных сеток (А.А. Самарский, Б.М. Будаков, А.Н. Гильманов и др.). Каждый из методов имеет свои преимущества и недостатки и свою сферу применения.

В настоящей диссертационной работе предложен эффективный численный метод решения задач одномерного нестационарного течения вязкопластической среды. Такие задачи моделируют многие природные явления и технологические процессы. Метод является простым в реализации и не требует больших вычислительных ресурсов.

Цель работы

1. Разработка метода решения начально-краевых нестационарных задач вязкопластического течения.
2. Программная реализация алгоритма предложенного метода.
3. Тестирование алгоритма на задачах, имеющих аналитическое решение, и численных решениях других авторов.
4. Численное решение конкретных задач. Исследование процесса образования и эволюции жёстких зон. Построение полей напряжения и скорости. Анализ полученных результатов.

Научная новизна

1. Разработан численный конечно-разностный метод решения нестационарных задач вязкопластического течения слоистого материала. Метод является оригинальной авторской разработкой, универсален для указанного класса задач, отличается точностью и высокой скоростью расчётов.
2. Метод реализован в виде программного продукта.
3. Решена серия задач, не имеющих автомодельных решений и ранее другими авторами не исследовавшихся, а именно, о течении вязкопластического материала в кольцевой области, о течении между двумя пластинами и о продольном течении в круглой движущейся цилиндрической трубе. Построены поля напряжений и скоростей, исследована эволюция границ разделов.
4. В задаче о продольном течении вязкопластического материала в трубе установлено существование режимов течения с двумя, а в задаче о течении в кольцевой области – с двумя и тремя, границами разделов областей течения и жёстких зон.
5. В задаче о диффузии вихревого слоя в вязкопластической полуплоскости получено аналитическое выражение нижней оценки координаты границы жёсткой зоны.
6. В задаче о стационарном течении вязкопластического материала над вращающейся плоскостью аналитически найдены характерные точки асимптотических границ жёстких зон.

Достоверность результатов обеспечивается строгостью постановок задач и математических методов их решения. Проведено тестирование метода путём сравнения результатов счёта и точных аналитических решений (задачи о течении вязкопластического материала между двумя плоскостями и в круглой трубе), а также путём сравнения с известными численными решениями. Сравнение показало высокую степень близости результатов. Установлена устойчивость результатов расчётов при изменении основных вычислительных параметров алгоритма (число узлов сетки, максимальные и минимальные размеры пространственных и временных шагов).

Используемые методы. В работе используются конечно-разностные численные методы, методы линейной алгебры, методы уравнений математической физики и методы теоретической механики.

Научная и практическая ценность работы

1. Создан метод, с помощью которого можно решать и исследовать новые, ранее не исследованные одномерные течения вязкопластических сред.
2. Метод может быть применён для решения пространственно одномерных двухфазных задач Стефана (задача о кристаллизации, промерзании и т.д.).
3. На основе разработанного алгоритма можно создать универсальный вычислительный комплекс для решения пространственно одномерных задач типа Стефана.
4. С помощью разработанного метода можно проводить расчёты конкретных, важных для практики задач, например, о вязкопластических течениях в каналах, трубах, о кристаллизации в слитках и т.д.

Личный вклад соискателя. Основные результаты работы получены автором самостоятельно. Работы [5 – 8] опубликованы без соавторов. Постановки решаемых в диссертационной работе задач выполнены совместно с научным руководителем автора д.ф.-м.н., проф. Д.В. Георгиевским. Разработка алгоритма предлагаемого метода, его программная реализация и тестирование, а также решение конкретных задач выполнены соискателем самостоятельно.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы докладывались автором и обсуждались на следующих конференциях:

- Научная конференция “Ломоносовские чтения”, секция механики, МГУ им. М.В. Ломоносова, 2006 – 2008 гг.
- Научная конференция “Ломоносов-2008”, секция механики, МГУ им. М.В. Ломоносова, 2008 г.
- Научная конференция “Проблемы нелинейной механики деформируемого твёрдого тела”, Институт механики сплошных сред УрО РАН. Пермь, 2008 г.

Кроме того, результаты докладывались и обсуждались на семинарах:

- Аспирантский семинар и научно-исследовательский семинар кафедры механики композитов механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством д.ф.-м.н., проф. Б.Е. Победри, 2003 – 2008 гг.
- Научно-исследовательский семинар “Актуальные проблемы геометрии и механики” на механико-математическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством д.ф.-м.н., проф. Д.В. Георгиевского, д.ф.-м.н. М.В. Шамолина, д.ф.-м.н., проф. С.А. Агафонова, 2008 г.
- Научно-исследовательский семинар кафедры теории упругости механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством д.ф.-м.н., проф. И.А. Кийко, 2008 г.
- Научно-исследовательский семинар кафедры волновой и газовой динамики механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством академика РАН проф. Е.И. Шемякина, 2008 г.
- Научно-методический семинар для студентов и аспирантов МГТУ им. Н.Э. Баумана под руководством д.ф.-м.н., проф. С.А. Агафонова, д.т.н., проф. В.И. Ванько, д.т.н., проф. В.В. Феоктистова, 2006 – 2008 гг.

Структура работы. Диссертационная работа состоит из введения, трёх глав, заключения, приложения и списка литературы из 130 наименований. Работа содержит 74 рисунка. Общий объём диссертации – 125 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** приводится общая характеристика работы, включающая в себя обоснование актуальности работы и её научной новизны. Излагается содержание диссертации.

В **первой главе** диссертации обсуждаются физико-механические свойства вязкопластического материала, определяющие соотношения (математические модели вязкопластической среды), постановка начально-краевой задачи, проведён обзор литературы по теме диссертации.

Также в первой главе рассматриваются две задачи о течении вязкопластической среды. В *задаче о течении вязкопластического материала над вращающейся плоскостью* (задача Кармана) исследуется стационарный осесимметричный режим. Аналитически найдены характерные точки асимптотических границ жёстких зон при стремлении безразмерного предела текучести к нулю. Исследование *задачи о диффузии вихревого слоя в вязкопластической полуплоскости* основано на сведении классической постановки к системе двух функциональных уравнений, решение которых может быть осуществлено численно. Получено аналитическое выражение нижней оценки координаты границы жёсткой зоны.

Во **второй главе** рассматривается *задача о течении вязкопластического материала в кольцевой области*. Одна из сторон кольца свободна от напряжений, на другой поддерживается некоторое изменяющееся во времени касательное напряжение. Градиент давления отсутствует, в начальный момент среда покоится.

Сформулируем основные результаты, полученные во второй главе.

Математическая постановка задачи. В процессе развития течения в кольце формируются области, в которых материал находится либо в состоянии вязкопластического течения (объединение таких областей обозначим $\Omega_f(t)$), либо движется как твёрдое тело (объединение таких областей обозначим $\Omega_r(t)$).

Требуется найти функции $v(r, t)$, $\sigma(r, t)$, $\varrho_n(t)$, $n = 1, 2, \dots, N$, удовлетворяющие:

– в областях вязкопластического течения – уравнению движения и определяющему соотношению

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial r} + 2\frac{\sigma}{r}, \quad |\sigma| = 1 + \left| r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) \right|, \quad r \in \Omega_f(t); \quad (1)$$

– в жёстких зонах – условию постоянства угловой скорости

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) = 0, \quad r \in \Omega_r(t); \quad (2)$$

– на границах кольца – краевым условиям

$$\sigma(R, t) = S(t), \quad \sigma(R + 1, t) = 0; \quad (3)$$

– на разделительных линиях – двум условиям сопряжения

$$\sigma(\varrho_n, t) = \lambda_n, \quad (4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{r=\varrho_n^+} = \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{r=\varrho_n^-}; \quad (5)$$

и начальным условиям

$$\Omega_f(t = 0) = \emptyset, \quad v(r, 0) = 0. \quad (6)$$

Переменная λ_n является характеристикой разделительной линии и может иметь два значения: $+1$ и -1 . Конкретное значение определяется в момент зарождения линии и далее остается постоянным до момента исчезновения линии. Условие (4) отражает тот факт, что на границах раздела модуль касательного напряжения равен единице, условие (5) отражает факт непрерывности ускорения на разделительных линиях. Используются обозначения: r – радиус ($r \in [R, R + 1]$), t – время, $v(r, t)$ – скорость, $\sigma(r, t)$ – напряжение, $\varrho_n(t)$ – положение разделительных линий. Все переменные и функции являются безразмерными.

Показано, что условие (5) можно записать в виде

$$\frac{\partial \sigma}{\partial r} \Big|_{r=\varrho_n} = \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} \Big|_{r=\varrho_n}, \quad (7)$$

где функция $\sigma_r(r, t)$ удовлетворяет в Ω_r уравнению

$$\frac{\partial^2 \sigma_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} - 4 \frac{\sigma_r}{r^2} = 0, \quad r \in \Omega_r. \quad (8)$$

Показано, что задача (1) – (6) сводится к нахождению напряжения, удовлетворяющего в области вязкопластического течения уравнению

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma}{\partial r} - 4 \frac{\sigma}{r^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial t}, \quad r \in \Omega_f, \quad (9)$$

условиям на разделительных линиях (4) и (7), краевым условиям (3); и границ раздела между областями.

С вычислительной точки зрения удобно рассматривать функции $\sigma(r, t)$ и $\sigma_r(r, t)$ как части единой функции, определённой при $r \in \Omega_f \cup \Omega_r$.

Из (8) и (9) видно, что при переходе из области Ω_f в Ω_r меняются не только коэффициенты уравнения (как в классической задаче Стефана), а меняется сам тип уравнения. В литературе такие задачи обычно называют задачами типа Стефана.

Если известны законы изменения границ $\varrho_{2l}(t)$ и $\varrho_{2l+1}(t)$ ($l = 0, 1, \dots [N/2]$) жёстких зон, входящих в объединение Ω_r , и напряжения на их границах $U_{2l}(t)$ и $U_{2l+1}(t)$, то решение уравнения (8) в каждой из таких зон можно выписать в аналитическом виде $\sigma_r(r, t) = \sigma_r(r; \varrho_{2l}(t), U_{2l}(t); \varrho_{2l+1}(t), U_{2l+1}(t))$.

Построение сетки. Область решения $D = \{(r, t) | r \in \Omega_r \cup \Omega_f, t \geq 0\}$ покрывается сеткой $\bigcup (r_i^j, t_j)$ по мере решения задачи, одновременно с построением решения. Сетка строится существенно неравномерная – временные шаги $\tau_j = t_j - t_{j-1}$ могут меняться при переходе от одного временного слоя к другому, пространственные шаги $h_i^j = r_i^j - r_{i-1}^j$ непостоянны как в пределе одного временного слоя, так и при переходе с одного временного слоя на другой. Границы кольца и все разделительные линии проходят через узлы.

Постановка на сетке. Дифференциальному уравнению, начальным и граничным условиям ставятся в соответствие их разностные аналоги. При этом дифференциальное уравнение в области вязкопластического течения аппроксимируется неявной схемой треугольников

$$\frac{2\sigma_{i+1}^j h_i^j + 2\sigma_{i-1}^j h_{i+1}^j - 2\sigma_i^j (h_i^j + h_{i+1}^j)}{h_i^j h_{i+1}^j (h_i^j + h_{i+1}^j)} + \frac{\sigma_{i+1}^j - \sigma_{i-1}^j}{(h_i^j + h_{i+1}^j) r_i^j} - 4 \frac{\sigma_i^j}{(r_i^j)^2} = \frac{\sigma_i^j - \sigma_i^{j-1}}{\tau_j},$$

$$k_{2l}^j < i < k_{2l-1}^j, \quad l = 1, \dots [N/2]; \quad (10)$$

каждому внутреннему узлу в жёстких зонах ставится в соответствие соотношение

$$\sigma_i^j = \sigma_r(r_i^j; \varrho_{2l}, \lambda_{2l}; \varrho_{2l+1}, \lambda_{2l+1}), \quad k_{2l+1}^j < i < k_{2l}^j, \quad l = 0, 1, \dots [N/2]. \quad (11)$$

В узлах, лежащих на внутренней границе вязкопластического кольца, задаются узловые значения

$$\sigma_0^j = S(t_j),$$

а в разделительных узлах – две группы условий сопряжения:

первая группа:

$$\sigma_{k_n^j}^j = \lambda_n, \quad n = 1, 2, \dots, N; \quad (12)$$

вторая группа:

$$\frac{\lambda_n - \sigma_{k_n^j-1}^j}{h_{k_n^j}^j} = \sigma_r'(r_{k_n^j}^j; r_{k_n^j}^j, \lambda_n; r_{k_{n-1}^j}^j, \lambda_{n-1}); \quad \text{если } n - \text{нечетное,}$$

$$\frac{\sigma_{k_n^j+1}^j - \lambda_n}{h_{k_n^j+1}^j} = \sigma_r'(r_{k_n^j}^j; r_{k_n^j}^j, \lambda_n; r_{k_{n+1}^j}^j, \lambda_{n+1}); \quad \text{если } n - \text{четное.} \quad (13)$$

Штрихом обозначена производная по первому аргументу.

Разностное уравнение (10) и первая группа условий сопряжения (12) записываются в виде единой неоднородной системы линейных алгебраических уравнений

$$A^{(m)}\Sigma^{(m)} = B^{(m)}, \quad (14)$$

где $\Sigma^{(m)} = (\sigma_1^m, \dots, \sigma_{k_1^m}^m)^T$ – вектор узловых значений напряжения в узлах m -го слоя. Матрица $A^{(m)} = (a_{ij})$ является блочной трехдиагональной. Неизвестными величинами на m -м шаге являются напряжения в узлах сетки и величины пространственных шагов (временные шаги задаются и, в случае необходимости, корректируются по заданному правилу). Необходимо найти такое решение системы (14), которое удовлетворяет второй группе условий сопряжения (13).

Важным *результатом диссертационной работы* является предлагаемый метод решения одномерных нестационарных задач вязкопластического течения. В методе используется понятие версии. Под версией понимается высказывание о номерах разделительных узлов на каждом временном шаге и векторе пространственных шагов. Рассматриваются только допустимые версии. Версия допустима, если номер разделительного узла при переходе со слоя на слой либо не изменился, либо изменился на 1 в большую или меньшую сторону, а вектор шагов $H^{(m)}$ входит в допустимое множество шагов $H_{\text{доп}}^{(m)}$, которое формируется следующим образом:

– для разделительной линий с нечетными номерами ($n = 1, 3, \dots$) полагаем

$$h_{k_n^m}^m = x_n \leq h_{k_n^m}^{m-1}, \quad h_{k_n^m+1}^m = h_{k_n^m+1}^{m-1} + h_{k_n^m}^{m-1} - x_n;$$

– для разделительной линий с четными номерами ($n = 2, 4, \dots$) полагаем

$$h_{k_n^m+1}^m = x_n \leq h_{k_n^m-1+1}^{m-1}, \quad h_{k_n^m}^m = h_{k_n^m+1}^{m-1} + h_{k_n^m}^{m-1} - x_n.$$

Остальные шаги берутся с предыдущего слоя.

На рисунке 1 представлена блок-схема алгоритма решения системы (14).

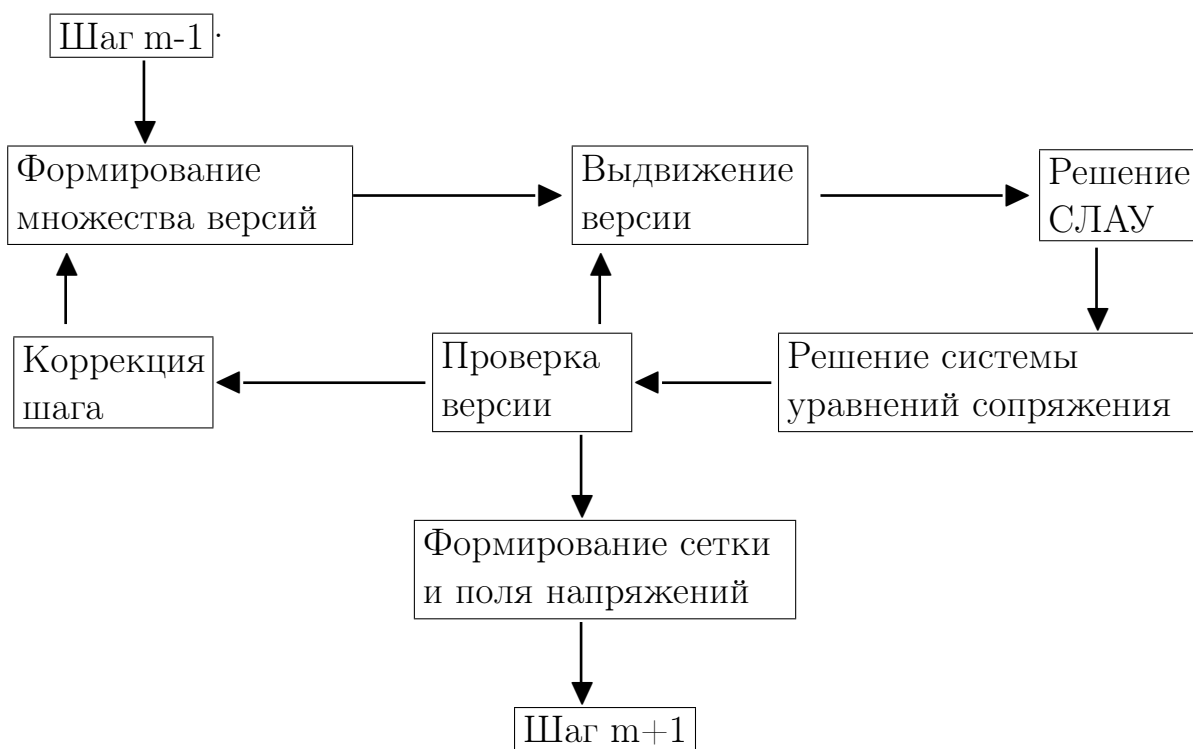


Рис. 1. Блок-схема алгоритма численного решения.

Алгоритм. Задаём временной шаг; выдвигаем версию. В рамках выдвинутой версии элементы матрицы $A^{(m)}$ и столбца $B^{(m)}$ выражаются через некоторые известные характеристики сетки и течения на предыдущем временном слое и неизвестные пространственные шаги, обозначенные через x_1, x_2, \dots, x_N . Поэтому, решив СЛАУ, получим решение как функцию этих переменных (многие системы символьной математики, например, MAPLE и Mathematica позволяют получать решение СЛАУ в аналитическом виде), т.е.

$$\sigma_i^{(m)} = \sigma_i^{(m)}(x_1, x_2, \dots, x_N), \quad i = 1, 2, \dots,$$

Подставляя эти функции в систему из вторых условий сопряжения (13) и решая ее, получаем конкретные значения $x_1^*, x_2^*, \dots, x_N^*$ пространственных шагов $h_{n_1}^m, h_{n_2}^m, \dots, h_{n_N}^m, \dots$. Если соответствующий вектор пространственных шагов принадлежит допустимому множеству, то версию признаём верной, а соответствующие напряжения – истинными напряжениями, если версия неверна – берём следующую. Если среди версий не обнаружено верной, то корректируем временной шаг в сторону уменьшения и переходим в начало алгоритма.

Метод апробирован. Приведены решения задач, в которых возникает одна, две и три линии раздела. Проанализирована динамика соответствующих полей скорости и напряжения. Исследованы вопросы перехода из одного режима течения в другой, а также зарождения, слияния и исчезновения линий раздела.

Рисунки 2 – 4 иллюстрируют одну из решённых задач, в которой на протяжении некоторого промежутка времени существуют три разделительные линии. Участки графиков напряжений на рисунке 3, которые располагаются в полосе $-1 < \sigma < 1$, соответствуют поведению вспомогательной функции $\sigma_r(r, t)$.

Помимо задачи о движении вязкопластического материала в кольце со свободной внешней границе, в *диссертационной работе решена задача со свободной внутренней границей*. Постановка этой задачи отличается от рассмотренной выше граничными условиями. Между свободной и напряженной границами имеются принципиальные различия. В частности, вблизи свободной границы материал всегда находится в твердом состоянии, а линии раздела зарождаются только на напряженной границе. Эти факты существенным образом используются в подробно описанном выше алгоритме. Поэтому использовать его для решения задачи со свободной внутренней границей, нельзя.

В диссертационной работе возникшее затруднение решается с помощью конформного отображение кольца на себя, при котором границы меняются местами. Проведено сравнение с задачей со свободной внешней границей. Рассмотрен случай, когда динамика разделительных линий существенно различна.

В третьей главе диссертации предлагаемым методом *решены две задачи: о течении между двумя пластинами*, одна из которых свободная, другая – напряженная, и *о продольном течении в круглой движущейся цилиндрической трубе*. В обеих задачах предполагаются ненулевые начальные условия и имеется градиент давления. Решено большое количество частных задач, отвечающих различному виду зависимости градиента давления от времени и различным начальным условиям.

Решение задач получено способом, аналогичным способу решения задачи о течении материала в кольцевом пространстве. Сначала приводится математическая постановка задачи. Затем выводится разностный аналог и формируется система уравнений. Программа для ЭВМ модифицирована с учётом изменений в постановке.

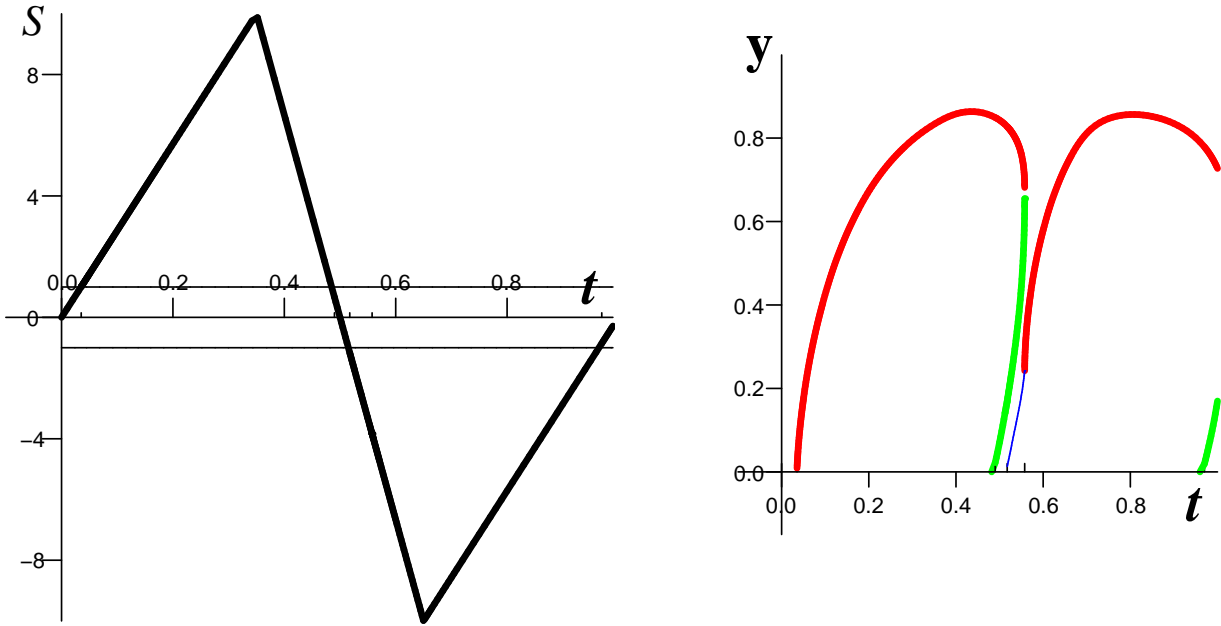
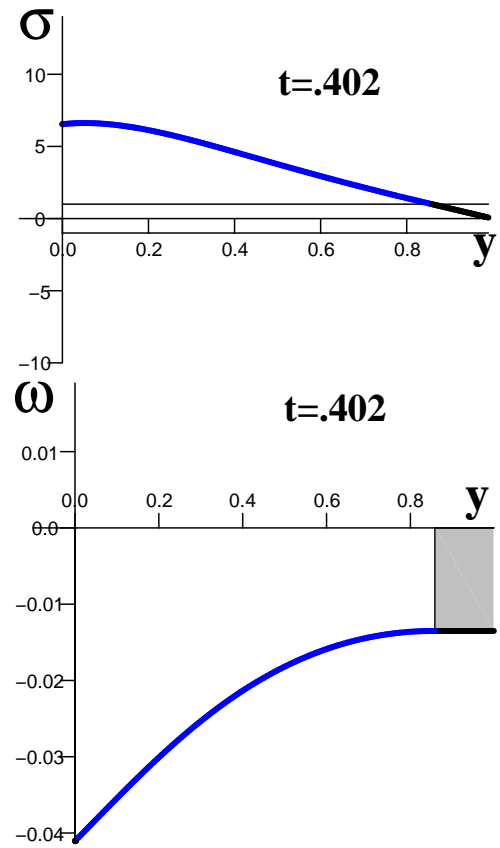
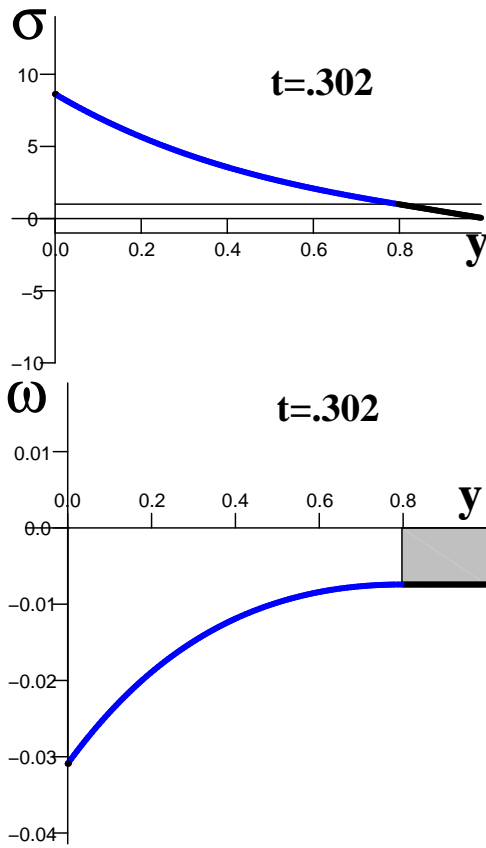
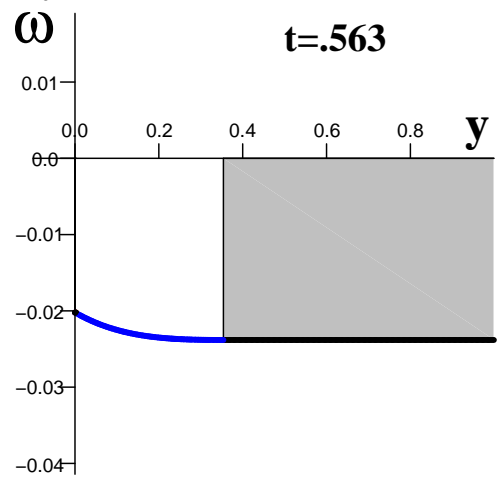
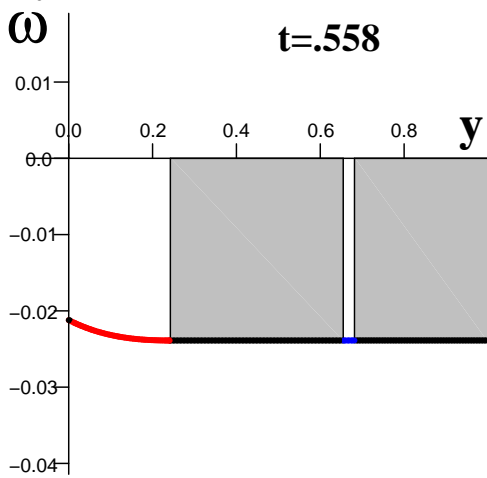
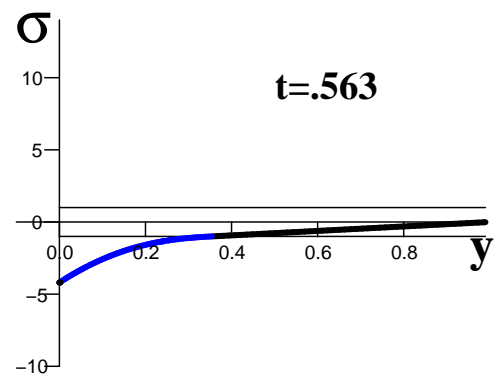
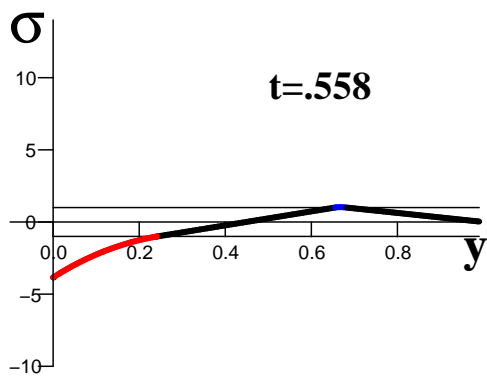
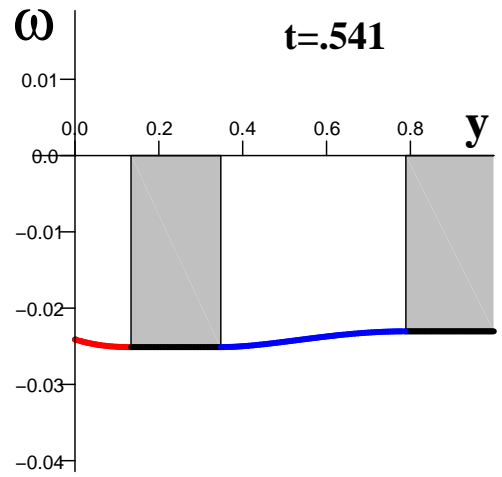
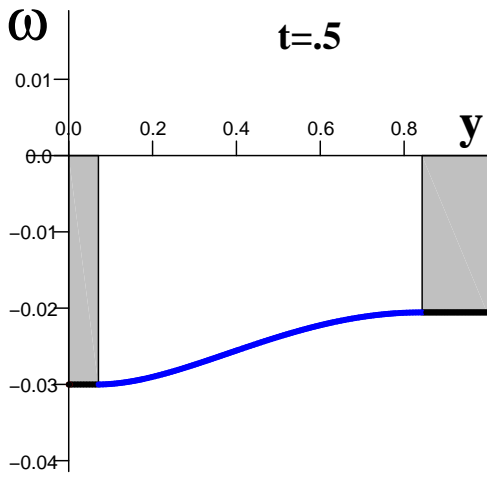
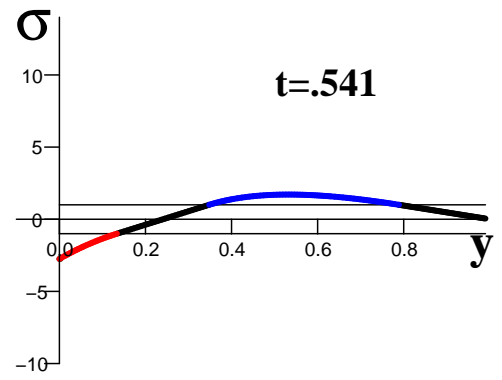
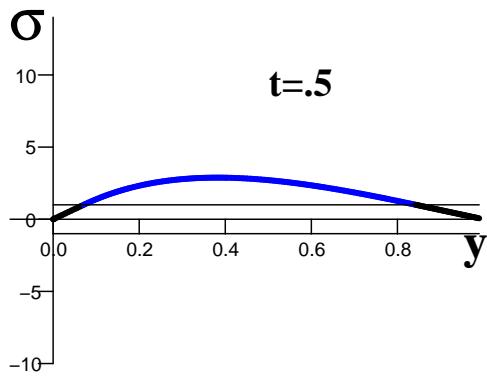


Рис. 2. Граничная функция $S(t)$ – ломаная, проведенная через точки с координатами $(0, 0)$, $(0.35, 10)$, $(0.65, -10)$ и $(1, 0)$, $R = 100$; динамика разделительных линий. Чёрная линия – первая разделительная линия, серая – вторая, тонкая – третья.





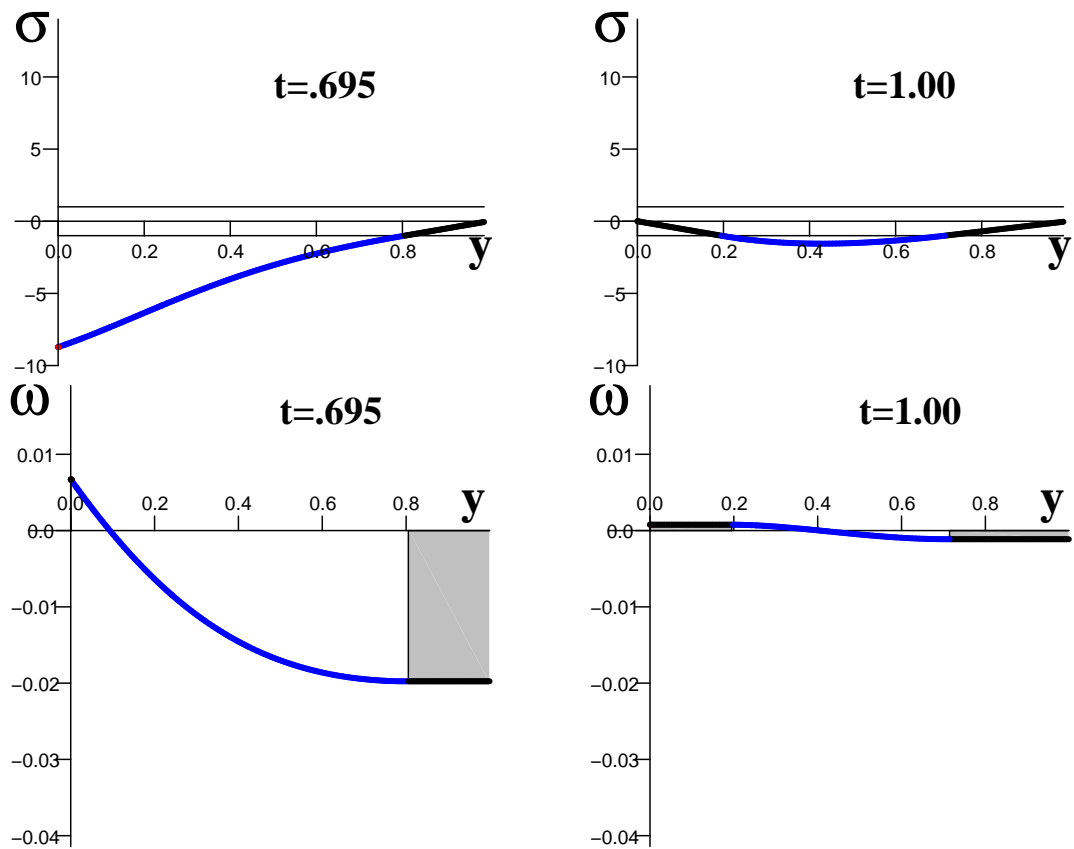


Рис. 3. Распределение напряжения и угловой скорости по сечению кольца. Серым цветом отмечены жесткие зоны.

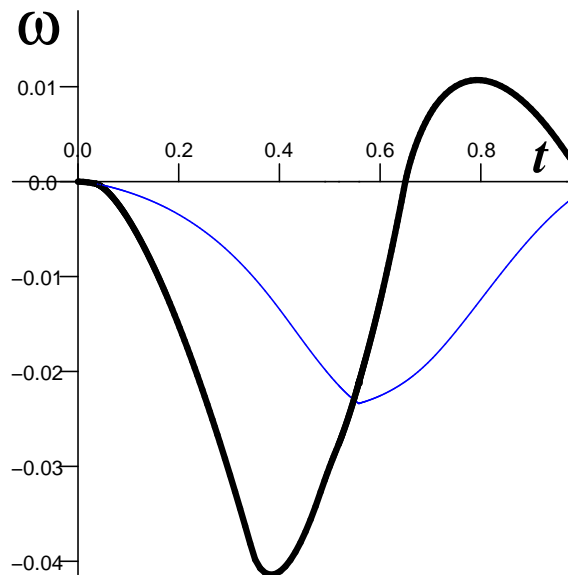


Рис. 4. Зависимость угловых скоростей границ от времени. Тонкая линия – внешняя граница, толстая – внутренняя.

Особо выделены случаи, в которых имеются точные автомодельные решения (в работах А.Г. Петрова получен и исследован широкий класс автомодельных решений в задачах о течении в неподвижной трубе и между двумя неподвижными пластинами; Г.Т. Гасанов и А.Х. Мирзаджанзаде получили автомодельное решение для движущейся трубы). Два из этих решений использованы в диссертации для тестирования метода.

Анализ численных решений тестовых задач показал, что расчётные зависимости размеров жёстких зон от времени с высокой степенью точности совпадают с теоретическими. Также хорошо совпадают теоретические и расчётные поля скоростей и напряжений и другие характеристики течений.

На рисунках 5 – 7 приведены начальное распределение напряжений и график градиента давления в аналитическом решении А.Г. Петрова (течение между неподвижными плоскостями), а так же расчётные (толстые линии) и теоретические зависимости (тонкие линии) размера и скорости ядра от времени, поля напряжения и скорости для некоторых моментов времени. Поскольку графики расчётов и соответствующих теоретических зависимостей визуально неразличимы, то для наглядности линии теоретических зависимостей продлены за границы расчётных линий.

Хорошее совпадение результатов расчётов тестовых задач с известными аналитическими решениями является основанием для использования метода в тех случаях, когда аналитическое решение неизвестно.

В задаче о торможении вязкопластического материала в круглой трубе дано сравнение с численными результатами других авторов, проведёнными с введением регуляризованной модели Папанистоса. Установлено хорошее совпадение результатов. Рассчитана эволюция границ жёстких зон и скорости течения для различных значений числа Бингама. Обнаружен и проинтерпретирован эффект образования двух разделительных линий.

Несколько примеров численного решения неавтомодельных задач течения между двумя неподвижными пластинами и продольного течения в круглой движущейся цилиндрической трубе завершают третью главу.

В приложении приведена программа расчета вязкопластического течения в кольцевой области, внешняя граница которой свободна от напряжений, а на нижней задается изменяющееся во времени напряжения. Программа написана на языке программирования системы Maple 10. Дан обширный комментарий к программе.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю, д.ф-м.н., проф. Дмитрию Владимировичу Георгиевскому за ценные советы, постоянное внимание к работе и поддержку при преодолении трудностей.

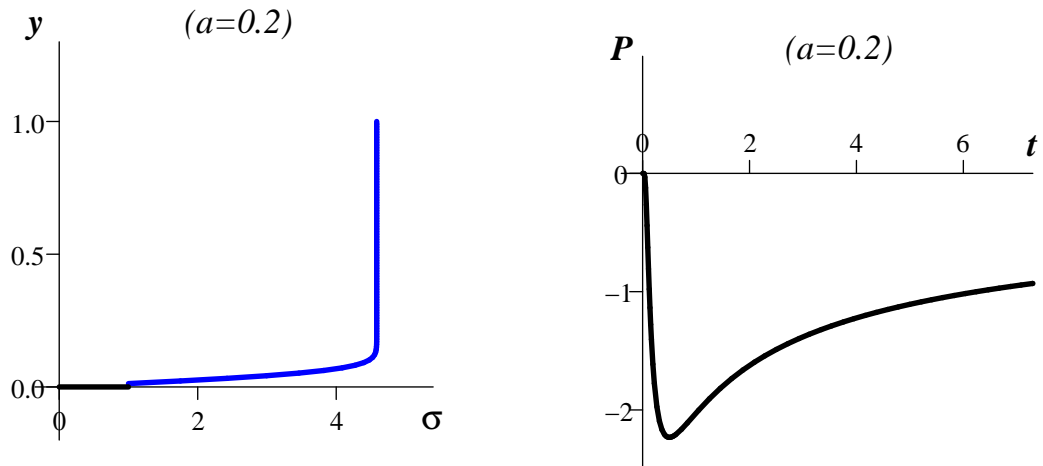


Рис. 5. Начальное распределение напряжения $\sigma(y, t_0)$ и градиент давления $P(t)$.

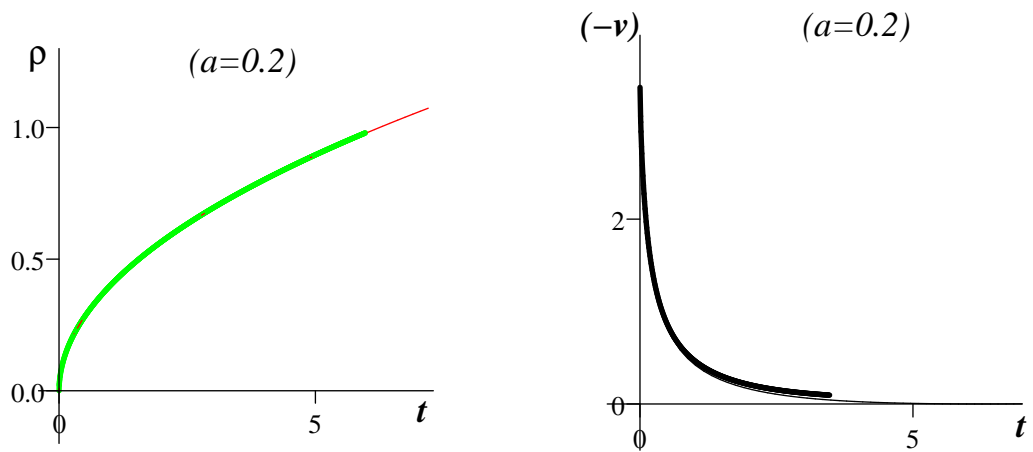


Рис. 6. Зависимости размера ядра и скорости ядра от времени.

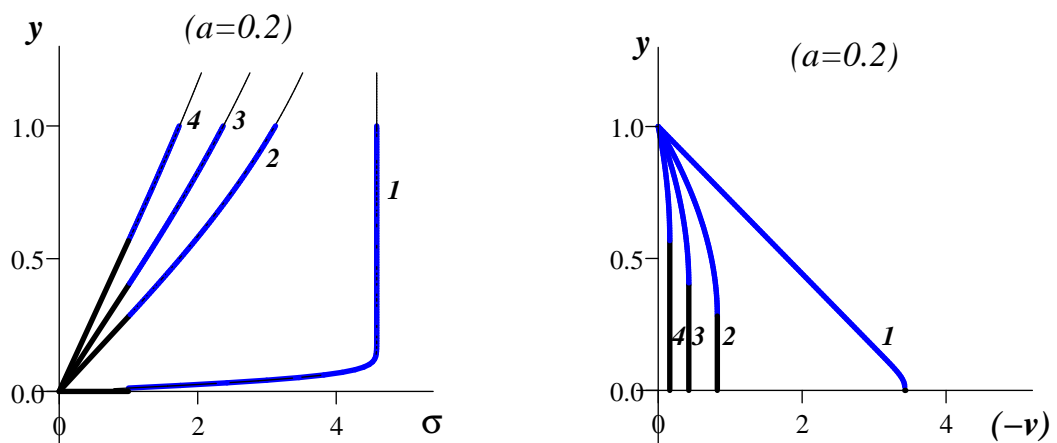


Рис. 7. Профили напряжения и скорости для моментов времени $t = 0.001, 0.5, 1.0, 2$ (кривые 1-4).

Основные результаты и выводы

1. Разработан численный конечно-разностный метод решения одномерных нестационарных задач вязкопластического течения. Метод является оригинальной авторской разработкой, универсален для указанного класса задач, отличается точностью и высокой скоростью расчётов. Метод реализован в виде программного продукта. Это позволяет производить расчёты конкретных задач. Программы для реализации решения той или иной задачи из общего класса имеют незначительные отличия.
2. Метод протестирован на задачах имеющих точные автомодельные решения (задача о течении вязкопластического материала между двумя плоскостями и в круглой трубе). Во всех случаях анализ численного решения показал высокую степень точности совпадения расчётных и теоретических характеристик решения.
3. Установлена устойчивость результатов расчётов при изменении основных вычислительных параметров алгоритма (число узлов сетки, максимальные и минимальные размеры пространственных и временных шагов).
4. Решена серия задач, не имеющих автомодельных решений и ранее другими авторами не исследовавшихся, а именно, о течении вязкопластического материала в кольцевой области, о течении между двумя пластинами и о продольном течении в движущейся цилиндрической трубе. Рассматривались различные профили начального напряжения и скорости, учитывался перепад давления. Построены поля напряжений и скоростей, исследована эволюция границ разделов.
5. В задаче о течении вязкопластического материала в кольцевом пространстве установлено существование режимов течения с двумя и тремя границами разделов областей течения и жёстких зон. Исследованы вопросы перехода из одного режима течения в другой, а также зарождения, слияния и исчезновения линий раздела.
6. В задаче о диффузии вихревого слоя в вязкопластической полуплоскости получено аналитическое выражение для нижней оценки координаты границы жёсткой зоны. В задаче о стационарном течении вязкопластического материала над вращающейся плоскостью аналитически найдены характерные точки асимптотических границ жёстких зон при стремлении безразмерного предела текучести к нулю.

По теме диссертации опубликованы следующие работы

1. Георгиевский Д.В., Окулова Н.Н. Диффузия разрыва касательного напряжения на границе полуплоскости// Тезисы докладов. Научная конференция "Ломоносовские чтения". Секция механики. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2006. С. 48.

Постановка задачи принадлежит Д.В. Георгиевскому. Решение задачи принадлежит Н.Н. Окуловой.

2. **Георгиевский Д.В., Окулова Н.Н. О вязкопластическом течении Кармана// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 2002. № 5. С. 45–49.**

Общая постановка задачи, постановка задачи первого приближения по пределу текучести и ключевые идеи исследования принадлежат Д.В. Георгиевскому. Часть работы, посвящённая задаче Кармана для вязкой жидкости, а также поиск характерных точек граничных поверхностей жёстких зон в вязкопластическом аналоге задачи Кармана выполнены совместно Д.В. Георгиевским и Н.Н. Окуловой.

3. Георгиевский Д.В., Окулова Н.Н. Численно-аналитическое исследование движения границ жёстких зон в нестационарных задачах вязкопластического течения// Тезисы докладов. Научная конференция "Ломоносовские чтения". Секция механики. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2008.

Постановка задачи выполнена Н.Н. Окуловой и Д.В. Георгиевским совместно. Остальная часть работы сделана Н.Н. Окуловой самостоятельно.

4. Георгиевский Д.В., Окулова Н.Н. Численно-аналитический метод решения одного из вариантов задачи Стефана, возникающей в нестационарной вязкопластичности// Тезисы докладов. Научная конференция "Ломоносовские чтения". Секция механика. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2007. С. 55–56.

Постановка задачи и аналитическое решение в жёсткой зоне выполнены Н.Н. Окуловой и Д.В. Георгиевским совместно. Остальная часть работы сделана Н.Н. Окуловой самостоятельно.

5. **Окулова Н.Н. Об одном методе решения задачи о диффузии вихревого слоя в вязкопластической полуплоскости// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 2007. № 4. С.62–67**

6. Окулова Н.Н. Тестовые примеры расчёта нестационарных вязкопластических течений// Тезисы докладов. Научная конференция "Ломоносов-2008". Секция механики. 2008.
7. **Окулова Н.Н. Численно-аналитическое исследование задачи о распределении напряжений в вязкопластической полосе// Вестн. Сам. ун-та. Естественнонаучная серия. 2007. № 6. С.78–84.**
8. Окулова Н.Н. Численный метод решения задач одномерного нестационарного течения вязкопластического материала// Тезисы докладов. Научная конференция "Проблемы нелинейной механики деформируемого твёрдого тела". Пермь. 2008.