Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 515.12

Кашуба Елена Викторовна

ПОЛУНОРМАЛЬНЫЕ ФУНКТОРЫ В КАТЕГОРИИ COMP И ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРЕМА КАТЕТОВА

01.01.04 — геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2008

Работа выполнена на кафедре геометрии и топологии ГОУ ВПО "Петрозаводский государственный университет"

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук,

профессор Александр Владимирович Иванов.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,

профессор Шапиро Леонид Борисович

(Академия труда и социальных отношений)

кандидат физико-математических наук,

профессор Елькин Александр Геннадьевич

(ГОУ ВПО МГТУ "Станкин")

Ведущая организация:

ГОУ ВПО "Томский государственный университет"

Защита диссертации состоится 31 октября 2008 г. в 16 ч. 40 мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова (главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 30 сентября 2008 г.

Ученый секретарь диссертационного

совета Д.501.001.84 при МГУ

доктор физ.-мат. наук, профессор

А. О. Иванов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В 1948 году М. Катетов[1] доказал, что из наследственной нормальности куба компакта следует его метризуемость. Вопросу обобщения теоремы Катетова о кубе посвящены многие работы в области общей топологии. Количество публикаций, связанных с данной темой, продолжает увеличиваться и в настоящее время.

В 1971 году Ф. Зенор[2] доказал, что если куб компакта X наследственно счетно паракомпактен, то X метриуем. Операция возведения в куб компакта X является нормальным функтором степени 3, поэтому следующая теорема В. В. Федорчука[3] 1989 года является обобщением теоремы Катетова о кубе: если для какого-нибудь нормального функтора $\mathcal{F}$ степени ≥ 3 компакт $\mathcal{F}(X)$ наследственно нормален, то X — метризуемый компакт. В 2000 году Т. Ф. Жураев[4] заметил, что требование наследственной нормальности $\mathcal{F}(X)$ в теореме Федорчука можно ослабить до требования наследственной нормальности $\mathcal{F}(X)\backslash X$ и по аналогии с теоремой Зенора заменил в теореме Федорчука наследственную нормальность пространства $\mathcal{F}(X)\backslash X$ на наследственную счетную паракомпактность $\mathcal{F}(X)\backslash X$. А. П. Комбаров [5] в 2004 году доказал следующую теорему: если для какого-нибудь нормального функтора $\mathcal{F}$ степени ≥ 3 пространство $\mathcal{F}(X)\backslash X$ наследственно $\mathcal{K}$-нормально, где $\mathcal{K}$ — класс σ-компактных пространств, то X — метризуемый компакт. Из теоремы Комбарова следуют одновременно и теорема Федорчука, и теорема Жураева. Для функтора суперрасширения λ (λ является полунормальным функтором) име-

[1]Katětov M. Complete normality of Cartesian products // Fund. Math. 1948. V. 35. P. 271-274.

[2]Zenor P. Countable paracompactness in product spaces // Proc. Amer. Math. Soc. 1971. V. 30. P. 199-201.

[3]Федорчук В. В. К теореме Катетова о кубе // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Матем. Механ. 1989. №4. С. 93-96.

[4]Жураев Т. Ф. Нормальные функторы и метризуемость бикомпактов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Матем. Механ. 2000. №4. С. 8-11.

[5]Комбаров А. П. К теореме Катетова—Федорчука о кубе // Вест. Моск. ун-та. Сер. 1, Матем. Механ. 2004. №5. С. 59-61.

ется следующий результат Т. Ф. Жураева[6] 1999 года: если пространство $\lambda_4(X)\backslash X$ наследственно нормально, то компакт X — метризуем. Индекс 4 — третий по величине элемент степенного спектра функтора λ. Степенной спектр $sp(\mathcal{F})$ функтора $\mathcal{F}$ — это множество степеней точек пространств вида $\mathcal{F}(X)$. А. В. Иванов[7] доказал, что если $\mathcal{F}$ — полунормальный функтор, удовлетворяющий некоторому комбинаторному условию (*), и $sp(\mathcal{F}) = \{1, k, n, \ldots\}$, то наследственная нормальность $\mathcal{F}_n(X) \setminus X$ влечет метризуемость X (здесь n — третий по величине элемент $sp(\mathcal{F})$). Условию (*) удовлетворяют такие известные в общей топологии функторы, как функтор экспоненты exp, функтор суперрасширения λ, функтор вероятностных мер P и все их конечные композиции[8].

В той же работе 1948 года М. Катетов поставил проблему о метризуемости компакта, квадрат которого наследственно нормален. Контрпример в предположении MA+¬CH был построен в 1977 году Никошем [9]. В 1993 году Грюнхаге[10] в предположении континуум-гипотезы CH построил пример неметризуемого компакта Y, для которого Y^2 наследственно сепарабельно, $Y^2\backslash\Delta$ совершенно нормально и Y^2 наследственно нормально. В 2002 году Ларсон и Тодорчевич[11] форсингом построили модель теории множеств, в которой справедлив положительный ответ на проблему Катетова, и тем самым доказали независимость проблемы Катетова от системы аксиом ZFC. Для полунормальных функторов проблема Катетова имеет следующий аналог: верно ли,

[6]Жураев Т. Ф. Функтор λ и метризуемость бикомпактов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Матем. Механ. 1999. №4. С. 54-56.

[7]Иванов А. В. Теорема Катетова о кубе и полунормальные функторы // http://topology.karelia.ru/arh.html.

[8]Иванов А. В. О степенных спектрах и композициях финитно строго эпиморфных функторов // Труды Петрозаводского университета. Серия "Математика". 2000. Вып. 7. С. 15-28.

[9]Nyikos P. A compact nonmetrizable space P such that P^2 is completely normal // Topology Proc. 1977. V. 2. P. 359-364.

[10]G. Gruenhage, P. Nyikos. Normality in X^2 for compact X // Trans. Amer. Math. Soc. 1993. V. 340. №2. P. 563-586.

[11]Larson P., Todorčević S. Katětov's problem // Trans. Amer. Math. Soc. 2002. V. 354. P. 1783-1791.

что из наследственной нормальности $\mathcal{F}_k(X)$, где k — второй по величине элемент степенного спектра полунормального функтора $\mathcal{F}$, следует метризуемость X? Заметим, что Т. Ф. Жураевым[12] было объявлено о "наивном" положительном решении этого вопроса для функтора суперрасширения λ.

Цель работы — изучение вопросов, связанных с обобщением теоремы и проблемы Катетова для полунормальных функторов.

Основные методы исследования. В качестве методов исследования используются различные методы общей топологии, в частности, техника вполне замкнутых отображений и обратных спектров В. В. Федорчука[13] и техника исследования полунормальных функторов конечной степени, предложенная В. Н. Басмановым[14].

Научная новизна. Все основные результаты являются новыми и состоят в следующем:

1. Доказано обобщение теоремы Катетова для полунормальных функторов и свойства наследственной $\mathcal{K}$-нормальности.

2. В предположении CH построен пример неметризуемого компакта X, обладающего следующими свойствам

   (a) X^n наследственно сепарабельно для любого $n \in \mathbb{N}$;

   (b) $X^n \setminus \Delta_n$ совершенно нормально для любого $n \in \mathbb{N}$ (Δ_n — обобщенная диагональ, которая определяется как множество точек пространства X^n, имеющих хотя бы две совпадающие координаты);

   (c) для любого сохраняющего вес полунормального функтора $\mathcal{F}$ и любого $n \in sp(\mathcal{F})$ $\mathcal{F}_n(X)$ наследственно сепарабельно и $\mathcal{F}_n(X) \setminus \mathcal{F}_{n-1}(X)$

[12] Жураев Т. Ф. Функтор λ и метризуемость бикомпактов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Матем. Механ. 1999. №4. С. 54-56.

[13] Федорчук В. В. Бикомпакт, все бесконечные замкнутые подмножества которого n-мерны // Матем. сб. 1975. 96(1). С. 41-62.

[14] Басманов В. Н. Ковариантные функторы, ретракты и размерность. // Доклады АН СССР. 1983. Т. 271. №5. С. 1033-1036.

совершенно нормально;

(d) для любого сохраняющего вес и точки взаимной однозначности полунормального функтора $\mathcal{F}$ со степенным спектром $sp(\mathcal{F}) = \{1, k, \ldots\}$ пространство $\mathcal{F}_k(X)$ наследственно нормально (в частности, наследственно нормальны X^2 и $\lambda_3 X$).

Практическая и теоретическая ценность. Результаты диссертационной работы носят теоретический характер и имеют научный интерес для специалистов в области топологии.

Апробация результатов. Основные результаты докладывались на студенческих научных конференциях Петрозаводского государственного университета (ПетрГУ) и научных семинарах кафедры геометрии и топологии ПетрГУ (2003 – 2008 гг.), на XXVI Конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова в 2004 году, на международной конференции "Александровские чтения"в 2007 году и на научно-исследовательском семинаре по общей топологии имени П. С. Александрова под руководством профессора В. В. Федорчука в 2008 году.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 5 работах автора, список которых приведен в конце автореферата. Одна из работ выполнена в соавторстве.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Объем диссертации составляет 46 страниц. Список литературы включает 34 наименования.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение. Приводится история вопроса, сформулированы цель работы и основные результаты. Описана структура диссертации.

Первая глава. В первой главе приведены сведения, необходимые для изложения основных результатов. Кроме того, рассматривается вопрос о строении носителей точек пространств вида $\mathcal{F}(X)$ для некоторых полунормальных функторов $\mathcal{F}$, в частности, для случая $\mathcal{F} = \lambda$. Для максимальных сцепленных систем носитель совпадает с замыканием объединения всех минимальных по включению элементов, причем доказано, что замыкание в общем случае опускать нельзя. Приведено построение примера максимальной сцепленной системы, у которой объединение всех минимальных по включению элементов не является замкнутым множеством.

Вторая глава посвящена следующей теореме, обобщающей теоремы Комбарова и Иванова.

Теорема 1 *Пусть X — компакт, $\mathcal{K}$ — класс σ-компактных пространств, $\mathcal{F}$ — полунормальный функтор, удовлетворяющий условию (*) и $sp(\mathcal{F}) = \{1, m, n, \ldots\}$. Если пространство $\mathcal{F}_n(X) \backslash X$ наследственно $\mathcal{K}$-нормально, то компакт X метризуем.*

Спектр $sp(\mathcal{F})$ функтора $\mathcal{F}$ — это множество степеней точек пространств вида $\mathcal{F}(X)$. Условие (*) определяется следующим образом. Пусть $sp(\mathcal{F}) = \{1, m, n, \ldots\}$ и $\varphi_{nm} : n \to m$ — сюръективное отображение конечных дискретных пространств $(n > m)$ с единственным нетривиальным прообразом. Функтор $\mathcal{F}$ удовлетворяет условию (*), если

$$\mathcal{F}(\varphi_{nm})(\mathcal{F}_{nn}(n)) \cap \mathcal{F}_{mm}(m) \neq \emptyset.$$

Этому условию удовлетворяют все нормальные функторы.

Следствие 1 *Пусть $\mathcal{F}$ — полунормальный функтор, $sp(\mathcal{F}) = \{1, m, n, \ldots\}$ и функтор $\mathcal{F}$ удовлетворяет условию (*). Если для компакта X пространство $\mathcal{F}_n(X) \backslash X$ наследственно счетно паракомпактно, то компакт X метризуем.*

Это следствие является обобщением теорем Зенора и Жураева.

Третья глава. В третьей главе приводится построение примера, усиливающего упомянутый выше пример Грюнхаге и дающий отрицательное решение обобщенной проблемы Катетова для достаточно широкого класса полунормальных функторов.

Теорема 2 (CH) *Существует неметризуемый компакт X такой, что*

1. *X^n наследственно сепарабельно для любого $n \in \mathbb{N}$;*
2. *если F – замкнутое подмножество X^n и $[F \setminus \Delta_n] = F$, то F — G_δ-множество в X;*
3. *$X^n \setminus \Delta_n$ совершенно нормально для любого $n \in \mathbb{N}$;*
4. *для любого сохраняющего вес полунормального функтора $\mathcal{F}$ и любого $n \in sp(\mathcal{F})$ $\mathcal{F}_n(X)$ наследственно сепарабельно и $\mathcal{F}_n(X) \setminus \mathcal{F}_{n-1}(X)$ совершенно нормально;*
5. *для любого сохраняющего вес и точки взаимной однозначности полунормального функтора $\mathcal{F}$ со степенным спектром $sp(\mathcal{F}) = \{1, k, \ldots\}$ пространство $\mathcal{F}_k(X)$ наследственно нормально (в частности, наследственно нормальны X^2 и $\lambda_3 X$).*

Отметим, что X является контрпримером к отмеченному выше утверждению Т. Ф. Жураева о функторе суперрасширения λ.

В главе 3 показано также, что условие сохранения функтором точек взаимной однозначности в пункте 5) теоремы 2 существенно (теорема 3).

Теорема 4 (CH) *Существует счетный набор неметризуемых компактов X_n, $n \in \mathbb{N}$, произведение которых $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ совершенно нормально и наследственно сепарабельно.*

В 1979 году М. Э. Рудин[15] было доказано в предположении принципа Йенсена $\diamondsuit$ существование двух неметризуемых компактов, произведение которых совершенно нормально. Из примера Грюнхаге следует существование таких компактов в предположении CH. В 1978 году А. В. Иванов[16] в предположении $\diamondsuit$ доказал существование счетного набора неметризуемых компактов, произведение которых совершенно нормально. Теорема 4 является одновременным усилением результатов Грюнхаге и Иванова.

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору, заведующему кафедрой геометрии и топологии Петрозаводского государственного университета Александру Владимировичу Иванову за постановку задачи. Автор благодарит заведующего кафедрой общей топологии и геометрии Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, доктора физико-математических наук, профессора Виталия Витальевича Федорчука и весь коллектив кафедры за обсуждение данной работы и неоценимую поддержку. Автор также выражает благодарность сотрудникам кафедры геометрии и топологии Петрозаводского государственного университета за помощь и доброжелательную атмосферу.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Иванов А. В., Кашуба Е. В. О наследственной нормальности пространства вида $\mathcal{F}(X)$ // Сибирский математический журнал, том 49, №4, 2008, С. 813-824.

2. Вакулова Е. В. О носителях максимальных сцепленных систем // Труды Петрозаводского государственного университета, Серия "Математика", Вып. 11, 2004, С. 3-8.

[15] Rudin M. E. Hereditary normality and Souslin lines // General Topology Appl. 1979. V. 10. P. 103-105.

[16] Иванов А. В. О бикомпактах, все конечные степени которых наследственно сепарабельны // Доклады АН СССР. 1978. Т. 243. №5. С. 1109-1112.

3. Вакулова Е. В. О носителях максимальных сцепленных систем // XXVI Конференция молодых ученых механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова. Тезисы докладов, Механико-математический факультет МГУ, 2004, С. 29-30.

4. Вакулова Е. В. О носителях максимальных сцепленных систем // Труды XXVI конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова, Том I, Механико-математический факультет МГУ, 2004, С. 47-52.

5. Кашуба Е. В. Обобщенная теорема Катетова для полунормальных функторов // Труды Петрозаводского государственного университета, Серия "Математика", Вып. 13, 2006, С. 82-89.

В работе [1] первому атору принадлежит концепция доказательства основного результата, второму автору — весьма сложная техническая реализация этой концепции.