Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 517.5

Бурмистрова Мария Дмитриевна

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ СУММИРОВАНИЯ РЯДОВ ФУРЬЕ-ЛАГЕРРА

01.01.01 – математический анализ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2008

Работа выполнена на кафедре высшей математики – 2 Московского государственного института электронной техники (технического университета)

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук, доцент С. Г. Кальней

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор М. И. Дьяченко, кандидат физико-математических наук, Р. С. Лариончиков

Ведущая организация: Московский технический университет связи и информатики

Защита диссертации состоится 31 октября 2008 года в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д.501.001.85 при Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 30 сентября 2008 года.

Ученый секретарь диссертационного
Совета Д.501.001.85 при МГУ,
доктор физико-математических
наук, профессор И. Н. Сергеев

Актуальность темы. Ортогональные многочлены и ряды Фурье по ним имеют широкое применение в различных областях математики, математической физики, в задачах обработки информации, при решении дифференциальных и интегральных уравнений и в других задачах. Одной из основных проблем теории рядов Фурье по ортогональным многочленам, как и в целом теории ортогональных рядов, является исследование условий их сходимости и суммируемости. Сходимость и суммируемость рядов Фурье изучаются как для произвольных систем ортогональных многочленов, так и для конкретных систем ортогональных многочленов. В частности, большое теоретическое и практическое значение имеет исследование вопросов суммируемости разложений Фурье по классическим ортогональным многочленам Якоби, Лагерра, Эрмита, тесно связанным с решением краевых задач математической физики.

Особый интерес представляют ряды по многочленам Лагерра и Эрмита, ортогональным на бесконечном промежутке. Неограниченность промежутка вносит существенные сложности в исследование указанных выше вопросов. В нашей работе изучается задача о суммировании рядов Фурье-Лагерра линейными методами.

Рядом Фурье-Лагерра называется разложение

$$f(x) \sim \sum_{m=0}^{\infty} \hat{a}_m \hat{L}_m^{\alpha}(x), \tag{1}$$

где $\hat{L}_m^{\alpha}(t)$, $\alpha > -1$, - ортонормированные многочлены Лагерра, $\hat{a}_m = \int\limits_0^{\infty} t^{\alpha} e^{-t} f(t) \hat{L}_m^{\alpha}(t)\, dt$ - коэффициенты Фурье-Лагерра.

Вопросам сходимости ряда (1) к разлагаемой функции посвящено много исследований. В них, в основном, изучалась сходимость рядов Фурье-Лагерра интегрируемых функций в весовых пространствах Лебега и поточечная сходимость в случае непрерывных и дифференцируемых функций. Наибольший вклад в исследование задачи о сходимости ряда (1) в среднем в пространствах интегрируемых с различными весами функций внесли Х. Поллард[1], Р. Аскей и С. Вейнгер[2], Б. Макенхоупт[3]. Ряд результатов о поточечной сходимости рядов Фурье-Лагерра изложены в монографиях Г. Сегё «Ортогональные многочлены», П. К. Суетина «Классические ортогональные многочлены». Приближение алгебраическим многочленами дифференцируемых функций на $[0, +\infty)$ с весом Лагерра $e^{-t}t^{\alpha}$ изучалось А.

---

[1] Pollard H. The mean convergence of orthogonal series II. Transactions of the American Mathematical Society, 1948, v. 63, p. 355-367.
[2] Askey R. and Wainger S. Mean convergence of expansions in Laguerre and Hermite series, Amer. J. Math., 1965, v. 87, p. 695-708.
[3] Muckenhoupt B. Mean convergence of Hermite and Laguerre series I,II. Trans. Amer. Math. Soc., 1970,v. 147, p. 419-460.

Х. Бабаевым, В. К. Лащеновым, М. К. Потаповым, С. К. Танкаевой, В.М. Федоровым и другими математиками.

Однако известно, что существуют непрерывные, и, более того, дифференцируемые функции, ряд Фурье-Лагерра которых расходится в заданной точке. Также существуют функции, ряд Фурье-Лагерра которых расходится по норме пространства интегрируемых с весом функций. Возникает вопрос о тех методах, которыми можно его суммировать. В диссертации рассматриваются линейные методы суммирования, задаваемые треугольными матрицами $\Lambda = \left\{ \lambda_m^{(n)} \right\}$ $\left(m = 0,1,\ldots;\, n = 0,1,\ldots;\right.$ $\left.\lambda_0^{(n)} = 1;\, \lambda_m^{(n)} = 0 \text{ при } m \geq n+1 \right)$. Каждая такая матрица определяет последовательность многочленов

$$\tau_n^\alpha\left(f, x, \Lambda\right) = \sum_{m=0}^{n} \lambda_m^{(n)} \hat{a}_m \hat{L}_m^\alpha\left(x\right), \qquad (2)$$

называемых линейными средними ряда Фурье-Лагерра.

Говорят, что ряд (1) суммируется в точке x_0 методом, задаваемым матрицей Λ, если $\tau_n^\alpha\left(f, x_0, \Lambda\right) \to f\left(x_0\right)$ при $n \to \infty$. Метод, задаваемый матрицей Λ, называется регулярным в точке x_0 на пространстве G функций, заданных на $\left[0, \infty\right)$, если для любой функции $f \in G$ ряд (1) суммируется к $f\left(x_0\right)$ этим методом в точке x_0.

Если G является подпространством пространства непрерывных на $\left[0, \infty\right)$ функций и для любой функции $f \in G$ линейные средние ряда (1) равномерно сходятся к f на $\left[0, \infty\right)$, то метод Λ будем называть равномерно регулярным на G (или просто регулярным).

Точка $t = 0$ называется точкой Лебега функции f, если существует число A такое, что

$$\int_0^h \left| f\left(t\right) - A \right| dt = o\left(h\right), \qquad h \to +0.$$

В диссертации рассматриваются следующие задачи.

1. При каких условиях на матрицу Λ соответствующий метод суммирования является регулярным в точке x_0 или равномерно регулярным на некотором подпространстве пространства непрерывных функций?

2. Пусть ряд $\sum_{m=0}^{\infty} a_m \hat{L}_m^{\alpha}(x)$ является рядом Фурье-Лагерра некоторой функции f и пусть его коэффициенты удовлетворяют условию монотонности или его обобщениям. При каких дополнительных условиях на коэффициенты этот ряд сходится к функции f в метрике пространств интегрируемых с весом функций?
3. Пусть $f \in \mathbf{L}_{\rho(\alpha)}(0,\infty) = \left\{ f : \|f\|_{\mathbf{L}_{\rho(\alpha)}} = \int_0^{\infty} \left| f(t) \right| e^{-t} t^{\alpha} dt < \infty \right\}$ и точка $x = 0$ есть точка Лебега функции f. При каких условиях на матрицу Λ и, если потребуется, дополнительных условиях на поведение функции f на бесконечности, $\tau_n^{\alpha}(f, 0, \Lambda) \to A$ при $n \to \infty$. Здесь A - число из определения точки Лебега.

Постановка данных задач берет начало в теории тригонометрических рядов Фурье, для которых эти задачи наиболее полно исследованы. Существенные результаты для тригонометрических рядов были получены А. Н. Колмогоровым, С. М. Никольским, С. Б. Стечкиным, А. В. Ефимовым, С. А. Теляковским. Для других ортонормированных систем указанные задачи изучены в меньшей мере, причем, из методов суммирования рассматривались, в основном, методы суммирования Чезаро. В частности, для рядов Фурье-Лагерра в работах Г.Сегё, Э. Г. Когбетлянца, К. Маркетта, А. Л. Поиани и других математиков были получены условия сходимости средних Чезаро в точке $x = 0$, а также в некоторых весовых пространствах Лебега. Для произвольных линейных методов суммирования значительные результаты были получены С. Г. Кальнеем в случае рядов Фурье-Якоби, Б.П. Осиленкером в случае рядов по ортонормированным с весом на конечном отрезке системам полиномиального вида. Для рядов Фурье-Лагерра произвольные линейные методы суммирования рассматривались в работе Дж. Гаспера и В. Требельса[4]. Ими была получена оценка снизу функции Лебега-Лагерра линейных средних.

Хорошо известно, что исследование сходимости и суммируемости линейных средних ортогонального ряда тесно связано с изучением задачи об ограниченности соответствующей функции Лебега. Постановка задачи о нахождении эффективных условий ограниченности функции Лебега метода суммирования берет начало от известной работы С. М. Никольского[5]. Далее С. Б. Стечкин, А. В. Ефимов, С. А. Теляковский и другие математики получили различные необходимые и достаточные условия ограниченности констант Лебега для тригонометрических рядов, выраженные через

[4] Gasper G., Trebels W. A lower estimate for the Lebesgue constants of linear means of Laguerre expansions. Res. Math. 1998, v. 34, p. 91-100.
[5] Никольский С. М. О линейных методах суммирования рядов Фурье, Изв. АН СССР, сер. матем., 1948, т. 12, с. 259-278.

коэффициенты матрицы Λ, их первые разности $\Delta\lambda_m^{(n)} = \lambda_m^{(n)} - \lambda_{m+1}^{(n)}$ и вторые $\Delta^2\lambda_m^{(n)} = \Delta\left(\Delta\lambda_m^{(n)}\right)$. В случае рядов по другим ортогональным системам задача об ограниченности функции Лебега также изучалась, хотя и в меньшей мере. Некоторые условия ограниченности функции Лебега в случае рядов Фурье по многочленам, ортогональным на конечном промежутке, могут быть получены из работ Б. П. Осиленкера[6]. Для суммирования рядов Фурье по многочленам Якоби $P_m^{(\alpha,\beta)}(x)$, С. Г. Кальнеем[7] была доказана теорема, аналогичная теореме С.М. Никольского. В нашей диссертации рассматривается задача об ограниченности функции $e^{-x/2}\int\limits_0^\infty \left|\sum\limits_{m=0}^n \lambda_m^{(n)} \hat{L}_m^\alpha(x)\hat{L}_m^\alpha(t)\right| e^{-t/2}t^\alpha dt$. Нами показано, что из условий ограниченности данной функции следуют достаточные условия регулярности линейных средних рядов Лагерра для некоторых классов непрерывных функций.

Задача о сходимости в метрике $\mathbf{L}$ тригонометрических рядов с коэффициентами, удовлетворяющими различным обобщениям условия монотонности исследовалась А. Н. Колмогоровым, Е. Хилле и Я. Д. Тамаркиным, С. А. Теляковским, Г. А. Фоминым и другими авторами. Ряд классических результатов отражен в монографиях А.Зигмунда «Тригонометрические ряды» и Н.К. Бари «Тригонометрические ряды». Для рядов Фурье-Якоби подобная задача рассматривалась С.Г. Кальнеем.

Задача о суммируемости в точках Лебега для тригонометрических рядов Фурье изучалась С. М. Никольским, А. В. Ефимовым и другими математиками. Для рядов Якоби данная задача для чезаровских средних рассматривалась в монографии Г. Сегё «Ортогональные многочлены», а для более широкого класса методов суммирования - в работах С. Г. Кальнея[8].

Цель работы. Целью диссертации является получение эффективных условий ограниченности функции Лебега-Лагерра и, на их основе, необходимых и достаточных условий сходимости линейных средних рядов Фурье-Лагерра, выраженных через коэффициенты матрицы Λ, изучение задачи о сходимости линейных средних (2) в точках Лебега, а также задачи о сходимости рядов Фурье-Лагерра с квазимонотонными коэффициентами.

---

[6] Осиленкер Б. П. Оценка роста функции Лебега линейных методов суммирования. Матем. Заметки. 1968 т. 6, № 3, с. 277-286.
Осиленкер Б. П. О сходимости и суммируемости разложений Фурье по ортонормированным полиномам, ассоциированным с разностными операторами второго порядка. Сиб. матем. ж., 1974, т. 15, № 4, с. 892-908.
[7] Кальней С. Г. О необходимых и достаточных условиях суммируемости рядов Якоби. Изв. ВУЗов, матем. 1991, т. 348, № 5, с. 75-78.
[8] Кальней С. Г. Суммируемость рядов Якоби треугольными матрицами. Матем. заметки. 1983, т. 34, с. 91-103.
Kal'nei S. G., On the summability of Jacobi series at Lebesgue points. Analysis Math, 2003, v. 29, p. 181-194.

Научная новизна. Все полученные результаты являются новыми и состоят в следующем:

1. Получены оценки сверху функции Лебега-Лагерра линейных средних, а также условия на матрицу Λ, необходимые и достаточные для регулярности соответствующего метода суммирования.
2. Доказаны теоремы о сходимости ряда Фурье-Лагерра в интегральной метрике при условии, что его коэффициенты образуют квазимонотонную последовательность. Причем сходимость рядов Фурье по стандартизованным многочленам Лагерра L_m^α установлена не только в пространстве функций интегрируемых с весом $e^{-x/2}x^\alpha$, но и в пространствах функций интегрируемых с весом $e^{-x/2}x^\gamma$, где $\gamma \neq \alpha$ удовлетворяет некоторым дополнительным условиям.
3. Получены достаточные условия сходимости линейных средних рядов Фурье-Лагерра в точке Лебега $t = 0$ функции f для более широкого класса матриц Λ, чем матрицы, определяющие методы суммирования Чезаро.

Методы исследования. В работе используются методы теории функций и функционального анализа исследования сходимости последовательностей линейных функционалов и операторов, методы теории сингулярных интегралов. Также в диссертации использованы некоторые из методов, разработанные в теории суммирования тригонометрических рядов Фурье и рядов по системам многочленов, ортогональных с весом на конечном промежутке, хотя, как уже отмечалось выше, с их применением в случае рядов Фурье-Лагерра возникают дополнительные сложности из-за бесконечности промежутка ортогональности.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Её результаты и методы могут быть использованы для дальнейших исследований в теории приближения и ортогональных рядов.

Апробация работы. Результаты диссертации неоднократно докладывались на научных семинарах по теории функций и ортогональных рядов под руководством акад. П. Л. Ульянова, проф. М. К. Потапова, проф. М.И. Дьяченко (мех.-мат. МГУ, 2005, 2006), на семинарах под руководством проф. С. А. Теляковского (МИРАН им. В. А. Стеклова, 2005, 2004), на 12-й и 13-й Саратовских зимних математических школах (Саратов, 2004, 2006), Воронежской зимней математической школе (Воронеж, 2005), III и VI международных симпозиумах «Ряды Фурье и их приложения» (Новороссийск, 2005, 2006).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 10 работах автора, список которых приведен в конце автореферата ([1]-[10]). Публикаций, сделанных в соавторстве, нет.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав, разбитых на параграфы и списка литературы. Объем работы 101 страница, библиография 62 названия.

Краткое содержание диссертации

Во **введении** даются постановки задач, делается краткий обзор полученных ранее другими авторами результатов по рассматриваемым вопросам и результатов диссертации.

В **первой главе** изучаются необходимые и достаточные условия регулярности методов суммирования.

В **§ 1.1** приведены доказательства базовых утверждений, необходимых для обоснования результатов первой главы.

Пусть $\hat{\tilde{N}}$ - пространство непрерывных на $[0,\infty)$ функций f, для которых $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)e^{-x/2}=0$, с нормой $\|f\|_{\hat{C}}=\sup\limits_{0\le x<\infty}|f(x)|e^{-x/2}$. В § 1.1 доказано, что это пространство является банаховым, показано, что любая функция $f\in\hat{C}$ разложима в ряд Фурье-Лагерра. Отметим, что множество алгебраических многочленов плотно в этом пространстве. Кроме того, в этом же параграфе показано, что преобразования $\tau_n^\alpha(f,x,\Lambda)$ - непрерывные линейные операторы из $\hat{C}$ в $\hat{C}$ с $\|\tau_n^\alpha\|_{[\hat{C}]}=\sup\limits_{x\ge0}\left(e^{-x/2}\mathrm{L}_n^\alpha(x,\Lambda)\right)$, а в случае фиксированного $x=x_0$ - непрерывные линейные функционалы на $\hat{\tilde{N}}$ с $\|\tau_n^\alpha\|=\mathrm{L}_n^\alpha(x_0,\Lambda)$, где $\mathrm{L}_n^\alpha(x,\Lambda)=\int\limits_0^\infty\left|\sum\limits_{m=0}^n\lambda_m^{(n)}\hat{L}_m^\alpha(x)\hat{L}_m^\alpha(t)\right|e^{-t/2}t^\alpha dt$ - функция Лебега-Лагерра. Таким образом, из теоремы Банаха-Штейнгауза следует, что ограниченность взвешенной функции Лебега-Лагерра при некоторых дополнительных условиях обеспечивает регулярность метода суммирования.

Во **втором параграфе главы 1** исследуется поведение функции Лебега-Лагерра $\mathrm{L}_n^\alpha(x,\Lambda)$ в точке $x=0$ и даются условия на коэффициенты матрицы Λ, необходимые и достаточные для регулярности метода суммирования Λ в этой точке.

Основными результатами главы являются следующие теоремы.

Теорема 1.2.1. Пусть $0 \le \alpha < \frac{1}{2}$. Тогда для функции Лебега-Лагерра линейных средних справедливо неравенство:

$$\mathrm{L}_n^\alpha(0,\Lambda) \le C \max_{0\le m\le n} \left|\lambda_m^{(n)}\right| + C\sum_{m=0}^{n-1}(m+1)\left(\frac{n-m}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}-\alpha} \left|\Delta^2\lambda_m^{(n)}\right|.$$

Эта оценка функции Лебега-Лагерра позволяет получить аналог известной теоремы С. М. Никольского[9] о сходимости линейных средних тригонометрических рядов и теоремы С. Г. Кальнея[10] о сходимости линейных средних рядов Фурье-Якоби.

Теорема 1.2.2. Пусть $0 \le \alpha < \frac{1}{2}$. Если $\Delta^2\lambda_m^{(n)} \ge 0 \ (\le 0)$ при всех $m = 0,1,\ldots,n-k$, где $k \ge 1$ - фиксированное число, не зависящее от n, то для ограниченности $\mathrm{L}_n^\alpha(0,\Lambda)$ необходимо и достаточно, чтобы:

$$\left|\lambda_m^{(n)}\right| \le C; \quad \sqrt{n}\sum_{m=0}^{n}\left|\lambda_m^{(n)}\right|(m+1)^\alpha(n+1-m)^{-3/2-\alpha} \le C.$$

Как следствие теоремы 1.2.2 и критерия регулярности метода суммирования в точке, доказанного в § 1.1 (утверждение 1.1.7) получаем теорему о регулярности в точке $x=0$ методов суммирования.

Теорема 1.2.3. Пусть $0 \le \alpha < \frac{1}{2}$. Если вторые разности $\Delta^2\lambda_m^{(n)} \ge 0$ (≤ 0) при всех $m = 0,1,\ldots,n-k$, где $k \ge 1$ - фиксированное число, не зависящее от n, то для регулярности в точке $x_0 = 0$ на пространстве $\hat{C}$ метода суммирования, задаваемого матрицей Λ, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

1) $\left|\lambda_m^{(n)}\right| \le C, \qquad n = 1,2,\ldots;$

2) $\sqrt{n}\sum_{m=0}^{n}\left|\lambda_m^{(n)}\right|(m+1)^\alpha(n+1-m)^{-3/2-\alpha} \le C, \quad n=1,2,\ldots;$

3) $\lambda_m^{(n)} \to 1$ при $n \to \infty$ для всякого фиксированного m.

Отметим, что из теоремы 1.2.3 следует регулярность в точке $x_0 = 0$ на $\hat{C}$ методов Чезаро (C,δ) при $\delta > \alpha + 1/2$, а также методов суммирования

---

[9] Никольский С. М. О линейных методах суммирования рядов Фурье. Изв. АН СССР, сер. матем., 1948, т. 12, с. 259-278.

[10] Кальней С. Г. О необходимых и достаточных условиях суммируемости рядов Якоби. Изв. ВУЗов, матем. 1991, т. 348, №5, с. 75-78.

Зигмунда, задаваемого матрицей $\lambda_m^{(n)} = 1 - \left(\frac{m}{n+1}\right)^{\delta}, \delta > 0$, и Рисса $\left(\lambda_m^{(n)} = \left(1 - \left(\frac{m}{n+1}\right)^2\right)^{\delta}, \delta > \alpha + \frac{1}{2}\right)$.

При доказательстве теоремы 1.2.1 важную роль играет полученная во втором параграфе первой главы оценка интеграла от ядер Валле Пуссена по многочленам Лагерра

$$V_{n,k}^{\alpha}(x,t) = \frac{1}{k+1} \sum_{m=n-k}^{n} D_m^{\alpha}(x,t), \quad (n,k = 0,1,...;k \le n),$$

где $D_m^{\alpha}(x,t)$ - ядро Дирихле по многочленам Лагерра.

Лемма 1.2.1. Пусть $n,k = 0,1,...;k \le n$. Тогда имеет место следующая оценка

$$\int_0^{\infty} \left|V_{n,k}^{\alpha}(0,t)\right| e^{-\frac{t}{2}} t^{\alpha} dt \le C \begin{cases} \left(\frac{n+1}{k+1}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}}, & 0 \le \alpha < \frac{1}{2}, \\ \frac{n+1}{k+1} \ln(k+2), & \alpha = \frac{1}{2}, \\ \frac{(n+1)^{\alpha+\frac{1}{2}}}{k+1}, & \alpha > \frac{1}{2}. \end{cases}.$$

В **третьем параграфе первой главы** показано, что условия теоремы 1.2.3 будут необходимыми и достаточными для равномерной регулярности метода суммирования. Этот факт является следствием того, что $\max\limits_{x \ge 0} \left(e^{-x/2} \mathrm{L}_n^{\alpha}(x,\Lambda)\right)$ достигается в точке $x = 0$ (утверждение 1.3.1). Частный случай этого результата для функции Лебега-Лагерра чезаровских средних ранее был установлен Е. Гёрлихом и К. Маркеттом[11].

Во **второй главе** изучается задача о сходимости рядов Фурье-Лагерра с квазимонотонными коэффициентами. Рассматривается ряд по стандартизованным многочленам Лагерра

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m L_m^{\alpha}(x), \tag{5}$$

[11] Gőrlich E. and Markett C. A convolution structure for Laguerre series. Indag. Math., 1982, v. 44, p. 161-171.

при этом предполагается, что он является рядом Фурье-Лагерра некоторой функции f, то есть что $a_m = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int\limits_0^\infty t^\alpha e^{-t} f(t) R_m^\alpha(t) dt$ $(m = 0,1,\ldots)$. Функция f предполагается принадлежащей пространству $\mathbf{L}_\gamma = \left\{ f : \|f\|_{\mathbf{L}_\gamma} = \int\limits_0^\infty |f(x)| e^{-x/2} x^\gamma dx < \infty \right\}, \gamma \le \alpha$.

Последовательность $\{c_m\}$ называется квазимонотонной с показателем $\mu \ge 0$, если последовательность $\left\{ \frac{c_m}{m^\mu} \right\}$ монотонно убывает к нулю

В **§ 2.1** доказаны теоремы.

Теорема 2.1.2. Пусть ряд (5) есть ряд Фурье по многочленам Лагерра L_m^α функции $f \in \mathbf{L}_\alpha(0,\infty)$ $(0 \le \alpha)$. Если последовательность $\{a_m\}$ квазимонотонна для некоторого $\mu \ge 0$, то для сходимости его к f в метрике $\mathbf{L}_\alpha(0,\infty)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$m^{\alpha+1/2} a_m \to 0 \qquad (m \to \infty).$$

Теорема 2.1.3. Пусть $\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4} < \gamma < \min\left(\alpha, \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}\right)$, $\alpha > -\frac{1}{2}$ и пусть ряд (5) есть ряд Фурье по многочленам Лагерра L_m^α функции $f \in \mathbf{L}_\gamma(0,\infty)$. Если последовательность $\{a_m\}$ квазимонотонна для некоторого $\mu \ge 0$, то для сходимости его к f в метрике $\mathbf{L}_\gamma(0,\infty)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$a_m m^{\gamma+1/2} \to 0 \qquad (m \to \infty).$$

Третья глава посвящена вопросу сходимости линейных средних в точке $x = 0$ при условии, что она является точкой Лебега f, принадлежащей пространству

$$\mathbf{L}_{\rho(\alpha)} = \left\{ f : \|f\|_{\mathbf{L}_{\rho(\alpha)}} = \int\limits_0^\infty |f(t)| e^{-t} t^\alpha dt < \infty \right\}$$

и удовлетворяющей некоторым дополнительным условиям на бесконечности.

В **§ 3.1** помещены предварительные сведения, необходимые для обоснования результатов третьей главы.

Во втором параграфе третьей главы доказана сингулярность ядра Дирихле-Лагерра и найдены условия на матрицу, при которых ядро метода суммирования будет сингулярным.

В **§ 3.3** строятся и исследуются монотонные мажоранты для ядер Фейера и Валле Пуссена. В первом случае доказывается интегрируемость этой мажоранты, а во втором случае даётся оценка для интеграла от построенной функции, которая в дальнейшем будет использована для доказательства основных результатов третьей главы.

В **четвертом параграфе третьей главы** доказана следующая теорема.

Теорема 3.4.1. Пусть $-1<\alpha<1/2$ и матрица Λ удовлетворяет следующим условиям:

1) $\lambda_m^{(n)}\to 1$ при $n\to\infty$ для всякого фиксированного m;

2) $\sum\limits_{m=0}^{n}(m+1)\left|\Delta^2\lambda_m^{(n)}\right|\le C$.

Тогда ряд Фурье-Лагерра функции $f\in \mathbf{L}(0,\infty)$, имеющей точку $x=0$ точкой Лебега, Λ-суммируем в этой точке.

В теореме 3.4.1 предполагается, что функция f интегрируема на бесконечности с единичным весом, что является сильным требованием. Желательно ослабить ограничение на интегрируемость функции на бесконечности. Это можно сделать, применяя теорему Д. К. Фаддеева о сходимости сингулярных интегралов в точках Лебега не на всём промежутке $(0,\infty)$, а на некотором отрезке, содержащем точку $x=0$ (точку Лебега), а на оставшемся промежутке применяя другие соображения. Этому и посвящен **пятый параграф главы 3**, в котором доказаны основные результаты главы о суммируемости в точке Лебега $x=0$ рядов Фурье-Лагерра.

Теорема 3.5.1. Пусть $-1/2<\alpha<1/2$ и матрица Λ, коэффициенты которой ограничены, удовлетворяет условиям:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_m^{(n)}=1$ для всякого фиксированного m;

2) $\sum\limits_{m=0}^{n-1}(m+1)\left(\dfrac{n-m}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}-\alpha}\left|\Delta^2\lambda_m^{(n)}\right|\le C$;

3) существует число $\delta<0$, такое, что

$$\sum_{m=0}^{n}(m+1)^{\alpha/2+3/4}\left|\Delta^2\lambda_m^{(n)}\right|\le Cn^{\delta}.$$

Если функция $f \in \mathbf{L}_{\rho(\alpha)}$ удовлетворяет условию

$$\int_1^\infty \left|f(t)\right| e^{-t/2} t^{\alpha/2+\delta-13/12} dt < \infty,$$

то ряд Лагерра функции f Λ - суммируем в точке Лебега $x = 0$.

Кроме теоремы 3.5.2, в § 3.5 получена ещё одна теорема о суммируемости рядов Фурье-Лагерра в точке Лебега $x = 0$.

Теорема 3.5.2. Пусть $-1/2 < \alpha < 1/2$ и ограниченная матрица Λ удовлетворяет условиям:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_m^{(n)} = 1$ для всякого фиксированного m;

2) $\sum\limits_{m=0}^{n-1} (m+1) \left(\dfrac{n-m}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}-\alpha} \left|\Delta^2 \lambda_m^{(n)}\right| \le C$;

и, кроме того, существует число $\delta < 0$, такое, что

3) $\sum\limits_{m=0}^{n} (m+1)^{\alpha/2+3/4} \left|\Delta^2 \lambda_m^{(n)}\right| \le C n^\delta$.

Тогда ряд Фурье-Лагерра функции $f \in \mathbf{L}_{\rho(\alpha)}(0,\infty)$ Λ - суммируем в точке Лебега $t = 0$, если существует число $z > 0$ такое, что

$$\int_z^\infty \left|f(t) e^{-t/2}\right|^p t^\alpha dt < \infty$$

для некоторого $p > 1$; причем в случае $1/6 < \alpha < 1/2$ и $\delta > 1/12 - \alpha/2$ предполагается, что p удовлетворяет дополнительному условию $p \le \dfrac{12\alpha + 12}{6\alpha - 1 + 12\delta}$.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю кандидату физико-математических наук, доценту Сергею Григорьевичу Кальнею за постановку задач и постоянное внимание ко всем этапам данной работы.

Работы автора по теме диссертации

1. Бурмистрова М. Д. О суммируемости рядов Лагерра линейными методами. Известия Саратовского университета. Серия Математика. Механика. Информатика. 2008, Вып. 1, с. 15-20.
2. Бурмистрова М.Д. О необходимых и достаточных условиях суммируемости в нуле рядов Фурье-Лагерра. Тезисы докладов 12-й Саратовской зимней математической школы. Саратов, 2004, с. 38-39.
3. Бурмистрова М.Д. О равномерной регулярности методов суммирования рядов Фурье-Лагерра. Тезисы докладов Воронежской зимней математической школы. Воронеж, 2005, с. 46-47.
4. Бурмистрова М.Д. О сходимости в метрике $L_{\alpha}\left(0,\infty\right)$ и $L_{\alpha/2}\left(0,\infty\right)$ рядов Фурье-Лагерра с квазимонотонными коэффициентами. Тезисы XIII Международной конференции «Математика. Экономика. Образование» и III Международного симпозиума «Ряды Фурье и их приложения», Ростов-на-Дону, 2005, с. 13-14.
5. Бурмистрова М.Д. О суммируемости рядов Лагерра в точках Лебега. Тезисы докладов 13-й Саратовской зимней математической школы. Саратов, 2006, с. 41.
6. Бурмистрова М.Д. О линейных методах суммирования рядов Лагерра для полуцелых α. Тезисы XIV Международной конференции «Математика. Экономика. Образование» и IV Международного симпозиума «Ряды Фурье и их приложения», Ростов-на-Дону, 2006, с. 18-19.
7. Бурмистрова М.Д. О сходимости в метриках пространств $L_{\alpha}\left(0,\infty\right)$ и $L_{\alpha/2}\left(0,\infty\right)$ рядов Фурье-Лагерра с квазимонотонными коэффициентами. Вестник Московского государственного университета печати, 2006, с. 7-14.
8. Бурмистрова М.Д. О сходимости в метрике пространств $L_{W(x)}\left(0,\infty\right)$ рядов Фурье-Лагерра с квазимонотонными коэффициентами. Труды XIII Международной конференции «Математика. Экономика. Образование» и III Международного симпозиума «Ряды Фурье и их приложения», Ростов-на-Дону, 2005, с. 5-9.
9. Burmistrova M. D. On necessary and sufficient conditions of the regularity of summation methods for Laguerre-Fourier series. Analysis Math., 2006, v. 32, № 4, p. 247-264.
10. Бурмистрова М.Д. О суммируемости рядов Лагерра в точках Лебега. Сборник научных трудов «Фундаментальные физико-математические проблемы и моделирование технико-технологических систем», вып. 9, М., Изд-во «Янус-К», 2006, с. 8-12.