Московский Государственный Университет им. М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 517.9

Архипов Александр Михайлович

СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ОБОБЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ КУРАМОТО-СИВАШИНСКОГО.

01.01.02 — дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Москва, 2008

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений Механико-математического факультета Московского Государственного Университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Ильяшенко Юлий Сергеевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук Фурсиков Андрей Владимирович доктор физико-математических наук Ильин Алексей Андреевич
Ведущая организация:	Институт проблем передачи информации РАН.

Защита состоится “ 31 ” октября 2008 г. в 16 час. 45 мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.85 в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, РФ, Москва, Ленинские горы, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомится в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан “ 30 ” сентября 2008 г.

Учёный секретарь диссертационного

совета Д.501.001.85 в МГУ,

доктор физико-математических наук,

профессор И. Н. Сергеев

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Настоящая диссертация посвящена исследованию поведения решений обобщенных уравнений Курамото-Сивашинского.

Исследование предельного поведения решений уравнений в частных производных представляет из себя не только сложную и красивую теоретическую, но и важную практическую задачу.

В частности, задачи о вычислении хаусдорфовой и энтропийной размерностей аттракторов занимают важное место при изучении уравнений в частных производных. В разное время в этом направлении работали А. В. Бабин, М.И.Вишик, О.А. Ладыженская, Ю.С. Ильяшенко, Р. Темам, В.В. Чепыжов и многие другие. Особую важность имеет при этом энтропийная размерность, поскольку для нее выполняется легкая теорема Уитни о взаимно–однозначном проектировании и, кроме того, при численном счете обычно вычисляется именно эта размерность.

Уравнение Курамото–Сивашинского, обобщения которого рассматриваются в диссертации, впервые возникло в работе Г. Сивашинского [1], посвященной волновым потокам жидкости, текущей по вертикальной плоскости, а также в работе И. Курамото [2], в которой изучался диффузионный хаос в системах реакции. Откуда и происходит название уравнение Курамото– Сивашинского. В дальнейшем, данное уравнение было интенсивно изучено, как численно, так и аналитически. В частности, было дока-

[1] G. Sivashinsky, D. M. Michelson. On irregular wavy flow of a liquid down a vertical plane. *Prog. Theor. Phys.*, **63** (1980), pp. 2112–2114.

[2] Y. Kuramoto. Diffusion–induced chaos in reactions systems. *Supp. Progr. Theor. Phys.*, **64** (1978), pp. 346–367.

зано существование аттрактора и оценена сверху его размерность [3]. Для этой цели применялись различные методы [4] и подходы [5].

Подход, который был предложен в работе Ю. С. Ильяшенко [6], использовал методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. В этом случае уравнение Курамото–Сивашинского рассматривается как динамическая система в бесконечномерном фазовом пространстве. Уравнение Курамото–Сивашинского задает векторное поле в бесконечномерном пространстве, а его траектории будут решениями уравнения. Одной из характеристик уравнения Курамото–Сивашинского является размерность его аттрактора. Впервые хаусдорфову размерность для изучения динамических систем была применена в 1976 году Ж. Мале–Паре [7]. Понятие к-сжимающей системы впервые появилось в 1982 году в работе Ю. С. Ильяшенко [8] при вычислении размерности аттракторов системы Навье–Стокса на двумерном плоском торе. При этом, кроме хаусдорфовой размерности рассматривалась также энтропийная размерность. Результаты, касающиеся к-сжимающих систем позже были применены при оценке аттракторов уравнения Курамото–Сивашинского в работе[3].

Кроме того, с помощью подхода использованного Ю. С. Ильяшенко,

[3] A. Cheskidov, C. Foias. On the non-homogeneous stationary Kuramoto–Sivashinsky equation. *Phys.D*, **154** (2001), no. 1-2 pp. 1–14.

[4] Piotr Zgliczynski, Konstantin Mischaikow. Rigorous numerics for partial differential equations: the Kuramoto–Sivashinsky equation. *Found. Comput. Math.*, **1** (2001), no. 3 pp. 255–288.

[5] Hu, Changbing [Hu,Chang Bing] ; Temam,Roger . Robust control of the Kuramoto-Sivashinsky equation. *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. B Appl. Algorithms*, **8** (2001), no. 3 pp. 315–338.

[6] Ю. С. Ильяшенко. Глобальный анализ фазового портрета нелинейного параболического эволюционного уравнения. *Математика и моделирование*, (1990), с. 5–32.

[7] J. Mallet–Paret. Negatively invariant sets of compact maps and an extension of a theorem of Cartwright. *J. Differential Equations*, **22:2** (1976), pp. 331–348.

[8] Ю. С. Ильяшенко. Слабо сжимающие системы и аттракторы галеркинских приближений уравнения Навье–Стокса на двумерном торе. *Успехи механики*, **том 5** (1982), с. 31–63.

при исследовании решений уравнения Курамото– Сивашинского был обнаружен так называемый эффект "перекачки энергии" от низких гармоник к высоким. Энергией в данном случае является квадрат любой соболевской нормы достаточно высокого порядка.

На эвристическом уровне явление перекачки энергии в уравнении Курамото–Сивашинского представляет собой следующее. Рассмотрим произвольный луч с вершиной 0 в пространстве начальных условий, лежащий в конечномерной плоскости "низших гармоник". Для любого начального условия φ на этом луче существует непрерывно зависящий от φ момент времени T_φ, обладающий следующим свойством. Пусть $u_\varphi(T_\varphi)$- значение решения уравнения Курамото–Сивашинского с начальным условием $u|_{t=0} = \varphi$ в момент времени T_φ, рассмотренное как элемент пространства $C^\infty(T^n)$. Тогда "энергия", сосредоточенная в "старших гармониках" функции $u_\varphi(T_\varphi)$ превосходит "энергию", сосредоточенную в ее "младших гармониках", если L_2 - норма φ достаточно велика. Более того, отношение этих "энергий" стремится к ∞, при $||\varphi|| \to \infty$.

В дальнейшем были предложены различные варианты обобщения обычного уравнения Курамото–Сивашинского: как для многомерного случая [9] [10], так и для одномерного. При этом для одномерного уравнения рассматривались различные вариации, как нелинейного члена [11], так и линейного [12].

[9] Huijiang Zhao, Shaoqiang Tang. Nonlinear stability and optimal decay rate for a multidimensional generalized Kuramoto-Sivashinsky system. *J. Math. Anal. Appl.*, **246**, (2001), no. 2 pp. 423–445.

[10] Fred C. Pinto. Nonlinear stability and dynamical properties for aKuramoto-Sivashinsky equation in space dimension two. *Discrete Contin. Dynam. Systems*, **5**, (1999), no. 1 pp. 117–136.

[11] Kai-Seng Chou. On a modifiedKuramoto-Sivashinsky equation. *Differential Integral Equations*, **15**, (2002), no. 7 pp. 863–874.

[12] А. М. Архипов Анализ фазового портрета обобщенного уравнения Курамото–Сивашинского *Диф-*

Представляемая диссертация содержит решение двух задач. Первая задача состоит в оценке размерностей аттракторов обобщенного уравнения Курамото– Сивашинского в одномерном случае и доказательстве существования глобально–поглощающей области для решений обобщенного уравнения. Вторая задача посвящена доказательству теоремы о перекачке энергии для многомерного уравнения Курамото– Сивашинского, заданного на многомерном торе с римановой метрикой. Метод решения этих задач основан на применении идей теории обыкновенных дифференциальных уравнений к бесконечномерным системам. Таким образом, тема диссертации представляется весьма актуальной.

Цель работы.

Целью настоящей работы является исследование следующих свойств обобщенных уравнений Курамото-Сивашинского: существование аттрактора и оценка сверху хаусдорофовой и энтропийной размерностей аттрактора в одномерном случае, теорема о перекачке энергии от низких гармоник к высоким в одномерном случае и в многомерном случае с римановой метрикой.

Научная новизна.

Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

- Доказано существование максимального аттрактора для обобщенного уравнения Курамото-Сивашинского в одномерном случае.

ференциальные уравнения, **29**, (1993), . 6 с. 990–998.

- Доказана оценка сверху для хаусдорфовой и энтропийной размерностей аттрактора обобщенного уравнения Курамото-Сивашинского в одномерном случае.

- Доказана теорема о перекачке энергии от низких гармоник к высоким для обобщенного уравнения Курамото-Сивашинского в одномерном случае и в многомерном случае на торе с римановой метрикой.

Методы исследования.

В работе используются методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, теории гамильтоновых систем, теории динамических систем, функционального анализа и дифференциальной геометрии. Для различного рода оценок применялся аппарат математического анализа.

Теоретическая и практическая ценность.

Работа носит теоретический характер. Результаты могут быть полезны при исследовании уравнений с частными производными и их аттракторов.

Апробация работы.

Основные результаты настоящей диссертации докладывались:

- на семинаре механико-математического факультета МГУ под руководством проф. Ю. С. Ильяшенко (неоднократно, 1993–2004 гг.),

- на семинаре по динамическим системам в Центре математических исследований в Гуанахуато (Мексика) под руководством проф. Х.Гомес-Монт (X. Gomez-Mont) (1995 гг.),

- на международной конференции по динамическим системам (Мексика), (Мехико, 1996 г.),
- на международной конференции молодых ученых, (Киев, 1994 г.),
- на летней школе-конференции "Динамические системы", (Ратмино, июль 2004 г.),

Публикации.

Основное содержание работы опубликовано; список из трех работ автора по теме диссертации приведен в конце автореферата.

Структура и объём диссертации.

Диссертация состоит из введения и двух глав, разделенных на параграфы. Список литературы содержит 25 наименований. Общий объём диссертации составляет 63 страницы.

Основное содержание диссертации

Настоящая диссертация посвящена исследованию поведения решений обобщенных уравнений Курамото–Сивашинского.

В первой главе рассматриваются решения уравнений Курамото– Сивашинского в одномерном случае с линейным дифференциальным оператором произвольного порядка. В этой главе исследуется вопрос существования аттрактора и поведения решений. Доказывается, что поведение решений во многом сходно с поведением решений обычного уравнения Курамото–Сивашинского. При этом для исследования поведения решений этого уравнения в частных производных используются методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Доказывается существование глобально-поглощающей области для решений обобщенного уравнения и оценка сверху для хаусдорфовой и энтропийной размерностей аттрактора. Также доказывается теорема о перекачке энергии от низких гармоник к высоким для решений обобщенного уравнения.

Вторая глава посвящена обобщенному уравнению Курамото– Сивашинского на многомерном торе с римановой метрикой. В этой главе доказывается теорема о перекачке энергии от низких гармоник к высоким.

Опишем сначала на эвристическом уровне механизм перекачки энергии. Вне шара достаточно большого радиуса в пространстве начальных условий нелинейный член правой части уравнения Курамото–Сивашинского начинает доминировать. Само решение уравнения Курамото–Сивашинского будет рассматриваться как малое возмущение уравнения Гамильтона-Якоби. Решения уравнения Гамильтона– Якоби могут быть написаны в явном виде и они существуют конечное, как в прошлом, так и в будущем, время. Потом решения "коллапсируют", т.е. рвутся производные старших порядков. Назовем время существования решения в прошлом и будущем с начальным условием φ моментами коллапса T_φ^-, T_φ^+, соответственно. При приближении к моменту коллапса L^2 норма старших производных начинает неограниченно расти. В то же время, C^1 норма решения уравнения Гамильтона– Якоби является первым интегралом уравнения. Эти соображения, сведенные вместе дают, что "старшие гармоники" начинают доминировать над "младшими" при приближении к моменту коллапса. Т.е. происходит перекачка энергии для уравнения Курамото–Сивашинского.

Замечание. В одномерном случае, первая соболевская норма будет первым интегралом уравнения Гамильтона–Якоби, в то же время для старших размерностей, первым интегралом будет лишь C^1 норма решения. Поэтому методы использованные для доказательства существования аттрактора в одномерном случае не могут быть использованы, без дополнительных исследований поведения C^1 нормы вдоль решений.

Рассмотрим физическую модель уравнения Гамильтона–Якоби, как описание движения свободных частиц. Заметим, что производная решения этого уравнения имеет вид - композиция начального условия с диффеоморфизмом области определения функции (начального условия). Этот диффеоморфизм зависит от времени и начальной функции, и задается траекториями движения свободных частиц. В евклидовом случае это будут прямые. При наличии метрики траектории движения будут геодезическими. В этом состоит отличие решений уравнения Гамильтона–Якоби на многообразии с метрикой от обычного евклидового уравнения Гамильтона–Якоби.

Определим обобщенное уравнения Курамото–Сивашинского в одномерном случае, которое рассматривается в первой главе. Напомним определение обычного уравнения Курамото–Сивашинского. Оно имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\left(P\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \Delta u + \nu\Delta^2 u\right), \nu \geq 0$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$. Его решения $u(t,x)$ рассматриваются на окружности , т.е.

$$u(t, x+2\pi) = u(t,x), u(t,x) \in \bar{C}^\infty(S^1 \times [0,\infty)),$$

где $\bar{C}$ означает центрированную функцию, т.е. среднее по окружности функции равно нулю. При этом $Pu = u - \bar{u}$, $\bar{u}$ – среднее функции u на окружности. Это уравнение возникает в ряде физических задач.

Определим обобщенное уравнение Курамото–Сивашинского. Пусть $A = A(\frac{\partial}{\partial x})$ – вещественный дифференциальный оператор конечного порядка, т.е. многочлен с постоянными коэффициентами от оператора дифференцирования. Наложим на него требования самосопряженности , т.е. будут входить производные только четного порядка, и, кроме того, если порядок оператора равен $2s$, то коэффициент при старшей производной должен быть положительным при четном s и отрицательным при нечетном s. Эти условия естественны для существования области диссипации. Далее везде будем считать, что $\frac{\partial u}{\partial t} = u_t$, $\frac{\partial^n u}{\partial x^n} = u_{x^n}$

Определение *Обобщенным уравнением Курамото– Сивашинского будем называть уравнение вида*

$$u_t = -(P(u_x^2) + Au) \qquad (GKS)$$

где оператор $A = \sum_{i=1}^{s} a_i \frac{\partial^{2i}}{\partial x^{2i}}$, *при этом* $a_s > 0$, *если* s *четное ,* $a_s < 0$ *в противном случае.*

Решения уравнения $u(t,x)$ рассматриваются на $[0,\infty) \times S^1$, т.е. $u(t,x) = u(t, x + 2\pi)$. Для формулировки результатов нам потребуются некоторые понятия и определения, которые представлены ниже.

Опишем область определения уравнения. Область определения – это бесконечно-дифференцируемые на S^1 функции. Среднее значение правой части отрицательно, если $u \neq const$. Разность между функцией и ее средним значением на окружности назовем центрированной функцией. Пусть $\bar{C}^\infty(S^1)$ – пространство бесконечно– дифференцируемых функций на S^1 с нулевым средним $\bar{u} = 0, \quad \bar{u} = \frac{1}{2\pi}\int_{S^1} u\ dx$. Определим P– оператор проектирования в $L^2(S^1)$ вдоль вектора $f = 1$ на ортогональную гиперплоскость. Результат проекции будет центрированной функцией. Тогда центрированным решением уравнения (GKS) будем называть центрированную функцию $u \in \bar{C}^\infty(S^1)$, удовлетворяющую уравнению $u_t = -(P(u_x^2) + Au),\ A$– оператор с описанными выше свойствами.

В первой главе доказываются следующие теоремы.

Пусть $\nu = |a_s|/K$, a_s – коэффициент при старшей производной правой части уравнения, K – сумма модулей коэффициентов при остальных линейных членах правой части уравнения. Обозначим как $n_s(u)$ - s-ю соболевскую норму функции u.

Тогда имеют место следующие теоремы.

Теорема 1 *(Оценка сверху размерности аттрактора) Рассмотрим L_2 метрику в пространстве $\bar{C}^\infty$. Хаусдорфова и энтропийная размерности аттрактора обобщенного уравнения Курамото–Сивашинского оцениваются сверху следующим образом*

$$dimA \leq \frac{2}{(2s-1)}\frac{1+2R}{\nu}$$

число R удовлетворяет следующему неравенству

$$R \leq C\nu^{\frac{(s^3+6,6s^2+3,96s+1,6)}{(s-1,6)}}$$

C – некоторая положительная константа.

Теорема 2 *(Существование глобально-поглощающей области) Обобщенное уравнение Курамото–Сивашинского определяет полупоток, который имеет обобщенную глобально-поглощающую область B, опреде-*

ленную неравенством $n_1 \leq R$, *где зависящее от* ν *число* R *оценивается следующим образом:*

$$R \leq C\nu^{\frac{(s^3+6,6s^2+3,96s+1,6)}{(s-1,6)}}$$

C *– некоторая положительная константа.*

Это теорема о существовании обобщенной глобально-поглощающей области. Из нее вытекает теорема 1 о верхней оценке хаусдорфовой и энтропийной размерностей аттрактора уравнения.

Пусть E_N– пространство тригонометрических многочленов степени не выше N с нулевым средним , P^N– оператор ортогонального проектирования $L^2(S^1) \to E_N$, $P_N^{\perp}$ – ортогональное проектирование на ортогональное дополнение к E_N.

Теорема 3 (О перекачке энергии) *Для любых* $\rho > 0, N \in \mathbb{R}$ *и* $\lambda \in (0,1)$ *существует такое* R *и для любой функции* $\varphi \in \bar{C}^{\infty}(S^1)$, *лежащей вне шара* $n_1 \leq R$ *в шаре* $Q = \{n_{s+1} \leq \rho||\varphi||_1\}$, *существует такой момент времени* $T_\varphi > 0$, *что решения уравнения* (GKS) *с начальным условием* φ *в момент* T_φ *принимают значение* ψ, *для которого* $\|P_N^{\perp}\psi\|_{s+1}^2 \geq \lambda\|\psi\|_{s+1}^2$. $2s$ *– порядок оператора* A.

Во второй главе рассматривается уравнение Курамото–Сивашинского на торе с переменной римановой метрикой. Оно имеет внешне такой же вид, как обычное уравнение Курамото– Сивашинского, см. работу[2], но операторы ∇, Δ и P понимаются в смысле римановой геометрии. А именно, ∇ - это ковариантная производная, согласованная с метрикой (g). В частности, ∇u - это ковариантная производная функции u, $(\nabla u, \nabla u)$ - скалярный квадрат производной.

Далее, Δ - это оператор Лапласа– Бельтрами в метрике g. Метрика (g)

задает меру μ на торе. Рассмотрим в пространстве L^2_μ на торе с этой мерой подпространство функций с нулевым средним. Пусть P - оператор ортогонального проектирования пространства L^2_μ на это подпространство. Итак, мы рассматриваем уравнение:

$$u_t = -(P(\nabla u, \nabla u) + \Delta u + \nu \Delta^2 u),$$

на торе T^n с римановой метрикой (g), правая часть которого определена выше.

Соответствующее уравнение Гамильтона– Якоби имеет вид:

$$u_t = -P(\nabla u, \nabla u),$$

а соответствующее линейное уравнение записывается в виде:

$$u_t = -\Delta u - \nu \Delta^2 u,$$

Во второй главе доказаны следующие результаты.

Пусть $T^n - n$ – мерный тор, (g) – метрический тензор, заданный на этом торе.

Определение *Многомерным уравнением Курамото–Сивашинского на торе T^n называется уравнение следующего вида:*

$$u_t = -(P(\nabla u, \nabla u) + \Delta u + \nu \Delta^2 u)$$

где $u \in \bar{C}^\infty(T^n), \Delta$ - оператор Лапласа–Бельтрами, $\nu > 0, \nabla$ - ковариантное дифференцирование, согласованное с метрикой. $\bar{C}^\infty(T^n)$ - пространство бесконечно-дифференцируемых функций с нулевым средним. Среднее функции u на торе T^n равно $\bar{u} = \frac{1}{volT^n}\int_{T^n} u \; d\mu$, где μ - форма *объема. P – ортогональный оператор проектирования, действующий в $C^\infty(T^n)$, следующим образом: $Pu = u - \bar{u}$.*

Пусть $u = \sum a_k \xi_k$ разложение Фурье функции u по собственным функциям оператора Лапласа–Бельтрами. Обозначим как P_N и $P_N^\perp$ операторы отбрасывания "старших" и, соответственно "младших" членов разложения Фурье (гармоник), т.е. $P_N u = \sum_1^N a_k \xi_k$, $P_N^\perp = u - P_N u$. Нормируем метрику так, чтобы наименьшее по модулю собственное значение оператора Лапласа–Бельтрами было равно единице. Тогда выполняется теорема о перекачке энергии.

Теорема 4 *Для любых $\rho > 0, N \in \mathbb{N}, s \geq n/2 + 5, \lambda \in (0,1)$ существует такое R, что для любой функции $\varphi \in \bar{C}^\infty(T^n)$ лежащей вне шара $n_{C^1} \leq R$ в шаре $Q = \{n_s \leq \rho ||\varphi||_{C^1}\}$, существует такое время $t \in (0, c)$, где c – некоторая универсальная константа, что $g^t_{KS}\varphi = \psi$ и $||P_N^\perp \psi||_s^2 \geq \lambda ||\psi||_s^2$. Здесь R – константа, зависящая от метрики (g).*

Автор выражает свою огромную благодарность своему научному руководителю – доктору физико-математических наук, профессору Ю. С. Ильяшенко за постановку задач и постоянное внимание к работе.

Список работ автора по теме диссертации

[1] А. М. Архипов, Анализ фазового портрета обобщенного уравнения Курамото-Сивашинского, *Дифференциальные уравнения*, **т.29**, 6, (1993), с. 990–998.

[2] A. M. Arkhipov, Yu. S. Il'yashenko, Jump of energy from low harmonics to high ones in the multidimensional Kuramoto-Sivashinsky

equation, *Selecta Mathematica formerly Sovietica*, **Vol. 13**, No 3 (1994), с. 183–196.

В работе [2] В. А. Ильяшенко принадлежит формулировка теоремы и идея доказательства, а А. М. Архипову принадлежит детальное проведение доказательства и формулировки технических лемм.

[3] А. М. Архипов Перекачка энергии в уравнении Курамото– Сивашинского на многомерном торе с римановой метрикой, *Современная математика и ее приложения*, 24 (2005), с. 3–13.