Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 514.113.5+514.772.35

Максимов Игорь Гаврилович

Комбинаторное строение и изгибания 1-параметрических многогранников

01.01.04 – геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва - 2008

Работа выполнена на кафедре дифференциальной геометрии и приложений Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Сабитов Иджад Хакович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Долбилин Николай Петрович (Математический институт имени В.А. Стеклова РАН)
	доктор физико-математических наук, профессор Смирнов Владимир Алексеевич (Московский педагогический государственный университет)
Ведущая организация:	Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Защита диссертации состоится 31 октября 2008 г. в 16 ч. 40 м. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж)

Автореферат разослан 30 сентября 2008 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор А.О. Иванов

Общая характеристика работы.

Актуальность темы.

Вопросы изгибаемости многогранников уже более двух веков считаются одним из главных и трудных направлений в метрической теории многогранников. После первого фундаментального результата Лежандра (1794) и Коши (1813) о неизгибаемости выпуклых многогранников прошло более 80 лет, прежде чем Брикар[1] показал существование изгибаемых многогранников. Но его многогранники – изгибаемые октаэдры – имели самопересечения и не были даже погруженными, и поэтому их нельзя было физически реализовать в виде движущихся моделей. Снова прошло около 80 лет, и Р. Коннелли построил примеры изгибаемых многогранников – сначала погруженных, с 14 вершинами[2], а затем и вложенных, с 26 вершинами[3]. После нескольких модификаций его пример был усовершенствован до 11 вершин, и, наконец, на совсем другой идее К. Штефен[4], построил пример изгибаемого вложенного многогранника всего с 9 вершинами (описание многогранника Штефена можно найти во многих статьях и книгах, см., например, [5]).

После открытия существования изгибаемых многогранников сразу же появилось много новых вопросов, часть из которых не решена до сих пор. Один из них – это вопрос о том, является ли пример Штефена изгибаемым многогранником с *минимальным* числом вершин, то есть, по-другому говоря, существуют ли изгибаемые погруженные или вложенные многогранники с числом вершин меньше 9? Второй вопрос касается степени изгибаемости многогранников, и его кратко можно сформулировать так: какое число параметров определяет многогранник однозначно

[1] Bricard R., *Mémoire sur la théorie de l'octaèdre articulé*, J. Math. Pures et Appl., v. 5 (1897), № 3, p .113 – 148.

[2] Connelly R., *An immersed polyhedral surface which flexes*, Indiana Univ. Math. J., v. 25 (1976), № 10, p. 965 – 972.

[3] Connelly R., *A counter example to the rigidity conjecture for polyhedra*, Publ. Math. I.H.E.S., v. 47 (1978), p. 333 – 338.

[4] Steffen Klaus, *A symmetric flexible Connelly sphere with only nine vertices*, A letter to I.H.E.S., Bures-sur-Yvette.

[5] Сабитов И. Х., *Локальная теория изгибаний*, Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, ВИНИТИ, т. 48 (1989), с. 196 – 270.

при любых значениях длин его ребер и при любой его конфигурации в пространстве? В диссертации даны частичные или полные ответы на эти и другие вопросы, но для более точной формулировки и вопросов, и ответов нужно ввести необходимые определения и терминологию.

Пусть K – двумерный геометрический симплициальный комплекс (то есть его симплексы – это точки, прямолинейные отрезки и плоские треугольники), тело которого гомеоморфно некоторому компактному двумерному многообразию M, или, что равносильно, K определяет некоторую триангуляцию многообразия M. *Многогранником с комбинаторным строением* K называется непрерывное в целом и линейное на каждом симплексе отображение $P : K \to R^3$. Образы в R^3 нульмерных, одномерных и двумерных симплексов комплекса K называются соответственно *вершинами*, *ребрами* и *гранями* многогранника P, который для наглядности можно себе представлять как его образ $P(K)$ в R^3. Тем самым мы всегда рассматриваем многогранники только с треугольными гранями.

Изгибанием многогранника P по некоторому параметру t называется непрерывное по параметру t семейство многогранников $P_t : K \to R^3$, такое что $P_0 = P$ и все $P_t(K)$ в R^3 изометричны между собой в индуцированной из R^3 метрике. Изгибание называется *тривиальным*, если оно сводится к движению $P(K)$ в R^3 как твердого тела. Многогранник называется *неизгибаемым*, если любое его изгибание тривиально, и *изгибаемым*, если для него существует хотя бы одно нетривиальное изгибание. Про неизгибаемые многогранники говорят, что они локально однозначно определены своей метрикой.

Для отображения P мы будем требовать, прежде всего, невырожденность – сохранение размерности каждого симплекса. Также будем рассматривать *погруженные* многогранники (отображение P является погружением, то есть локальным гомеоморфизмом на образ) и *вложенные* многогранники (отображение P является вложением, то есть гомеоморфизмом на образ).

Как уже было сказано выше, к 1978 г. были построены примеры изгибаемых вложенных многогранников с числом вершин 11 и 9. С тех пор вопрос о минимальном числе вершин изгибаемых многогранников остается открытым, и ясно, что любой результат в этом направлении представляется интересным. И вообще, любой пример изгибаемого многогранника является в своем роде уникальным, так как по теореме Глюка[6] почти все гомеоморфные сфере многогранники являются неизгибаемыми (это утверждение верно и для многогранников любого топологического рода[7]). Следовательно, можно считать, что первый вопрос, изучаемый в диссертации и посвященный изгибаемости многогранников с числом вершин меньше 9, безусловно, является актуальным в рассматриваемой теории многогранников.

Вторая задача связана с числом параметров, определяющих многогранник локально однозначным образом, и она восходит еще к Лежандру[8], показавшему, что число параметров, однозначно определяющих выпуклый многогранник с данным комбинаторным строением, равно числу его ребер. Мы уточняем и расширяем постановку проблемы, а именно, мы убираем условие выпуклости, но зато считаем известными длины ребер, и спрашиваем, длины скольких диагоналей надо считать известными, чтобы многогранник с такими данными и с известным комбинаторным строением был локально однозначно определенным. Это – новая постановка задачи в теории изгибаний, так как она в случае изгибаемости многогранника отвечает на вопрос о числе ограничений, которые необходимо и достаточно добавить, чтобы многогранник стал неизгибаемым; по-другому говоря, мы ставим задачу определения максимальной размерности пространства изгибаний реализаций данного симплициального комплекса при заданных значениях длин ребер.

Как показывают примеры, на изгибаемость многогранника влияют все три фактора: комбинаторная структура K, внешняя геометрия реализации $P(K)$ и свойства отображения P. Нас, в первую очередь, будет

[6]Gluck H., *Almost all simply connected closed surfaces are rigid*, Lecture Notes in Math., v. 438 (1975), p. 225 – 238. (Пер. на рус. яз. см. в сборнике *Исследования по метрической теории поверхностей*, М.: Мир, 1980, с. 148 – 163.)

[7]Сабитов И.Х., *Алгоритмическое решение проблемы изометрической реализации двумерных многогранных метрик*, Известия РАН, серия Математика, т. 66, № 2 (2002), с. 159 – 172.

[8]Legendre A., *Eléments de géométrie*, Paris, 1806.

интересовать комбинаторная часть проблемы, как первичная. Комбинаторное строение может быть как препятствием к наличию изгибаний, так и определять количество независимых параметров возможных изгибаний.

Для изучения этой части проблемы вводится понятие *комбинаторной p-параметричности*[9,10]. Ключевым моментом для исключения влияния двух других факторов изгибаемости является рассмотрение многогранников в общем положении. Но при корректной формулировке этого понятия нужно быть очень аккуратным, учитывая упомянутую выше теорему Глюка.

Описание комбинаторно 0-параметрических многогранников получено в работе Максимова И.Г., Сабитова И.Х. (2002), в диссертации описано комбинаторное строение 1-параметрических многогранников.

Пока более или менее подробно изучены лишь два комбинаторных типа многогранников – пирамиды и подвески[11] (бипирамиды). 1-параметрические многогранники образуют более широкий класс многогранников, включающий указанные в качестве частного случая.

В работе Р. Коннелли (1974) изучается изгибаемость подвесок, в ней, в частности, Р. Коннелли с использованием методов теории аналитических функций получает ряд необходимых и достаточных условия изгибаемости подвесок. Его важным результатом является доказательство равенства нулю обобщенного объема изгибаемой подвески. Это определяет важность задачи о соотношении погруженности и вложенности подвесок[12]. Часть результатов Р. Коннелли переносится на случай 1-параметрических многогранников. Общая теорема о постоянстве объема изгибаемого многогранника любого топологического типа при изгибании

[9]Maksimov I.G., Sabitov I.Kh., *On the definition of combinatorially p-parametric polyhedra*, Международная конференция "Геометрия и приложения". Тезисы докладов, Новосибирск, март 2000, с. 62 – 64.

[10]Максимов И.Г., Сабитов И.Х., *О понятии p-параметричности многогранников*, Сибирский математический журнал, т. 43(2002), №. 4, с. 823 – 839.

[11]Connelly R, *An attack on rigidity*, Preprint. Cornel Univ., 1974. (Пер. на рус. яз. в сборнике *Исследования по метрической теории поверхностей*, М.: Мир, 1980, с. 164 – 209.)

[12]Максимов И. Г., *Подвески: объемы, погруженность и неизгибаемость*, Мат. заметки, т. 56 (1994), № 6, с. 56 – 63.

доказана И.Х. Сабитовым[13].

При изучении комбинаторной стороны проблемы естественно использовать в качестве параметров возможных изгибаний длины диагоналей, что не ограничивает общности рассмотрения. Известны формулы для вычисления длин диагоналей и объемов многогранников в общем случае при известных длинах ребер. В диссертации предложены уточнения и обобщения этих формул на случай 1-параметрических многогранников. Для их исследования можно связать с изгибаемым многогранником риманову поверхность и использовать методы теории аналитических функций. Это позволяет получать довольно простые необходимые условия изгибаемости. Использование формул для объемов и факта сохранения объема многогранника при изгибании дает еще один способ изучения изгибаний, позволяет получить уравнения изгибаний в другой форме.

Еще одно важное направление исследования изгибаемости – построение алгоритмов для проверки изгибаемости конкретных многогранников $P(K)$. Так, И.Х. Сабитовым предложен численный алгоритм проверки изгибаемости подвесок[14] и вообще общих многогранников[15]. В силу теоремы Глюка критическим для численных алгоритмов является вопрос о точности вычислений. Для решения этой проблемы предлагается перейти к алгоритмам символьных вычислений с использованием полученных формул. При этом точность вычислений совпадает с точностью задания длин ребер.

Таким образом, все рассмотренные в диссертации вопросы посвящены или известным, но не решенным еще задачам, или же они открывают новую тематику исследований.

Цель работы.

Цель настоящей работы – описание комбинаторного строения 1-параметрических многогранников, исследование их изгибаний и, в частности,

[13] Сабитов И. Х., *Объем многогранника как функция его метрики*, Фундаментальная и прикладная математика, т.2 (1996), № 4 с. 1235 – 1246.

[14] Сабитов И. Х., *Алгоритмическая проверка изгибаемости подвесок*, Укр. геометр. сб., т. 30 (1987), с. 109 – 112.

[15] Сабитов И. Х., *Об одном алгоритме проверки изгибаемости многогранников*, Вестник МГУ, сер. 1 Математика. Механика, 1994, вып. 2, с. 56 – 61.

выделение неизгибаемых вложенных и погруженных многогранников с числом вершин до восьми (которые все оказываются 1-параметрическими многогранниками).

Научная новизна.

В диссертации решены следующие новые задачи:

1. Решена задача о соотношении погруженности и вложенности подвесок.

2. Доказана неизгибаемость погруженных многогранников, имеющих не более семи вершин. Также доказана неизгибаемость вложенных многогранников, имеющих не более восьми вершин, следующих типов: пирамиды, подвески (бипирамиды), многогранников, полученных из пирамиды или подвески операцией добавления одной или двух вершин индекса три, а также восьмивершинника определенного строения.

3. Введено понятие комбинаторной p-параметричности многогранников и описано строение 0- и 1-параметрических многогранников.

4. Предложены формулы, описывающие для 1-параметрических многогранников зависимости длин диагоналей и объемов от значений параметра изгибания.

5. Предложены уравнения изгибаемости и алгоритмы проверки изгибаемости. Показана связь исследования изгибаемости 1-параметрических многогранников с теорией римановых поверхностей.

Основные методы исследования.

В работе используются методы комбинаторной геометрии, линейной и компьютерной алгебры, теории аналитических функций

Теоретическая и практическая ценность работы.

Диссертация носит теоретический характер. Предложенные в диссертации методы и доказанные теоретические результаты представляют интерес для специалистов по комбинаторной и метрической теории многогранников и могут быть использованы в научной работе и для чтения геометрических спецкурсов. Полученные формулы для геометрических характеристик многогранников могут быть использованы в расчетах, связанных с вычислением длин диагоналей и объемов многогранников.

Апробация работы.

Результаты диссертации докладывались на следующих научно-исследовательских семинарах и научных конференциях:

- Семинар по геометрии в целом Московского Государственного Университета (руководители Э.Р. Розендорн и И.Х. Сабитов) – несколько раз, по мере получения результатов.

- Международный геометрический семинар памяти П.А. Широкова (Казань, февраль 1996 г.).

- Международная школа-семинар по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова (Абрау-Дюрсо, сентябрь 1998).

- Международная конференция „Геометрия и приложения“ (Новосибирск, март 2000 г.).

- Конференция по дискретной геометрии Международного математического конгресса (Пекин, август 2002 г., как часть доклада И.Х. Сабитова).

- Семинар кафедры дифференциальной геометрии и приложений Механико-математического факультета Московского Государственного Университета, руководитель академик А.Т. Фоменко (май 2008 г.).

- Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения Л.С. Понтрягина (Москва, июнь 2008 г.).

Публикации.

Основное содержание диссертации опубликовано в восьми работах, список которых приведен в конце автореферата [1] – [8].

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из введения и 3 глав.

Диссертационная работа изложена на 93 страницах и состоит из введения и трёх глав. Библиография включает 30 наименований.

Краткое содержание работы.

Во введении к диссертации излагается история рассматриваемой проблемы и формулируются основные результаты.

Содержание главы 1.

В главе 1 рассматриваются многогранники с числом вершин, меньшим 9, проводится их описание и доказательство неизгибаемости. В начале главы приводится простой критерий погруженности многогранников и дается описание комбинаторных типов многогранников, важных для дальнейшего, таких как пирамиды, подвески (бипирамиды) и восьмивершинник определенного комбинаторного строения.

Далее проводится комбинаторная классификация многогранников с числом вершин, меньшим 9. Доказывается, что эти многогранники могут иметь комбинаторное строение только одного из следующих типов: пирамиды, подвески, многогранники, полученные из пирамиды или подвески операцией добавления одной или двух вершин индекса три, а также восьмивершинник определенного комбинаторного строения.

Далее последовательно изучаются свойства погруженных и вложенных многогранников перечисленных комбинаторных типов с целью доказательства их неизгибаемости. Для подвесок устанавливается соотношение погруженности и вложенности.

Теорема 2 *Если число вершин погруженной подвески не превосходит семи, то такая погруженная подвеска является вложенной.*

При числе вершин восемь или более теорема уже неверна. Показано, как в таком случае устроено самопересечение для погруженной, но не вложенной подвески.

Теорема 3 *Если погруженная подвеска имеет не более 8 вершин, то она неизгибаема.*

Для изучения изгибаемости восьмивершинника определенного комбинаторного строения используется метод исследования, связанный с теорией аналитических функций. Получены формулы для зависимости длин диагоналей и объема многогранника от параметра изгибаний. При этом используется понятие обобщенного объема, пригодное и для погруженных многогранников.

Используемый метод позволяет получить уравнение изгибаемости и связать с изгибаемым многогранником указанного типа риманову поверхность. Исследованы свойства полученных зависимостей как аналитических функций на римановой поверхности. Доказано, что объем изгибаемого многогранника рассматриваемого комбинаторного типа равен нулю, что доказывает неизгибаемость вложенного многогранника этого типа.

Результатом являются теоремы о неизгибаемости.

Теорема 5 *Погруженный многогранник, имеющий не более семи вершин неизгибаем.*

Теорема 6 *Если погруженный многогранник с восемью вершинами удовлетворяет одному из следующих условий: а) является пирамидой, б) является подвеской, в) получен из подвески с шестью вершинами операцией добавления двух вершин индекса три, г) получен из пирамиды с семью вершинами операцией добавления вершины индекса три, д) является восьмивершинником определенного комбинаторного строения и при этом является вложенным, то он неизгибаем.*

Содержание главы 2.

В главе 2 вводится понятие p-параметрических многогранников и обсуждается зависимость числа параметров возможных изгибаний от комбинаторного типа многогранника.

В начале главы дается определение понятие общего положения для многогранников и дается аналитическая запись условия общего положения. Далее дается определение комбинаторно p-параметрических многогранников и приводятся важные примеры. Затем вводится понятие алгоритмически p-параметрических многогранников, усиливающее предыдущее определение и доступное для практической проверки.

В заключительной части главы дается описание комбинаторной структуры алгоритмически 1-параметрических многогранников типа сферы. Напомним, что *пустым* 3-циклом называется замкнутый контур из трех ребер, не являющийся границей грани.

Теорема 8 *Гомеоморфный сфере многогранник является алгоритмически* 1*-параметрическим в том и только в том случае, когда он имеет следующее комбинаторное строение: 1) является тетраэдром, 2) является подвеской, 3) может быть получен с помощью некоторой специальной последовательности склеек подвесок, 4) при наличии пустых* 3*-циклов его последовательное разложение путем разрезания по всем пустым* 3*-циклам дает в конечном счете не более одного многогранника типа 2) или 3) и любое количество тетраэдров.*

Содержание главы 3.

В главе 3 выполнено исследование изгибаемости алгоритмически 1-параметрических многогранников. Для этого получены формулы для зависимости диагоналей и частичных объемов этих многогранников от параметра изгибаний. Исследованы свойства полученных зависимостей.

Доказано (теорема 9), что зависимости выражаются аналитическими алгебраическими функциями. Их возможные точки ветвления – это корни многочленов, представляющих квадраты объемов тетраэдров, составляющих многогранник, возможные полюса – корни многочленов, представляющих квадраты площадей граней указанных тетраэдров. В бесконечно удаленной точке функции имеют конечное значение независимо от выбранного листа римановой поверхности.

В заключительной части главы показано как получить уравнения изгибаемости для алгоритмически 1-параметрических многогранников и приводится схема одного из возможных алгоритмов проверки изгибаемости таких многогранников типа сферы в общем положении с помощью систем компьютерной алгебры.

Благодарности.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору И.Х. Сабитову за постановки задач и постоянное внимание.

Автор также благодарен всему коллективу кафедры дифференциальной геометрии и приложений механико-математического МГУ за поддержку и внимание.

Список публикаций по теме диссертации.

[1] Максимов И. Г., *Исследование изгибаемости многогранников с малым числом вершин*, Всесоюзная конференция по геометрии "в целом": Тезисы докладов, Новосибирск, сентябрь 1987 г., Новосибирск, 1987, с. 75.

[2] Максимов И. Г., *Подвески: объемы, погруженность и неизгибаемость*, Математические заметки, т. 56 (1994), № 6, с. 56 – 63.

[3] Максимов И. Г., *Изгибаемые многогранники и римановы поверхности*, Успехи математических наук, т. 50 (1995), № 4, с. 163 – 164.

[4] Максимов И. Г., Сабитов И. Х., *Понятие комбинаторной p-параметричности многогранников при исследовании их изгибаемости*, Международная школа-семинар по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова, Абрау-Дюрсо, 5-11 сентября 1998, с. 48 – 49.

В данной работе Максимову И.Г. принадлежат конкретная формулировка определения понятия p-параметричности и аргументация выбора определения. Сабитову И.Х. принадлежит общая идея введения понятия p-параметричности.

[5] Maksimov I. G., Sabitov I.Kh., *On the definition of combinatorially p-parametric polyhedra*, Международная конференция "Геометрия и приложения": Тезисы докладов, Новосибирск, март 2000, с. 62 – 64.

В данной работе Максимову И.Г. принадлежат конкретная формулировка определения понятия комбинаторной p-параметричности и аргументация выбора определения. Сабитову И.Х. принадлежит общая идея введения понятия комбинаторной p-параметричности.

[6] *О понятии p-параметричности многогранников*, Сибирский математический журнал, т. 43 (2002), № 4, с. 823–839.

В данной работе Максимову И.Г. принадлежат конкретные формулировки нескольких определений понятия p-параметричности, примеры и контрпримеры, аргументация выбора определений. Сабитову И.Х. принадлежит общая идея введения понятия p-параметричности, идея использования алгоритма с базой и идея доказательства строения 0-параметрических многогранников.

[7] Максимов И. Г., *Неизгибаемые многогранники с малым числом вершин*, Фундаментальная и прикладная математика, т. 12 (2006), № 1, с. 143 – 165.

[8] Максимов И. Г., *Описание строения алгоритмически 1-параметрических многогранников и исследование их изгибаемости*, Депонировано в ВИНИТИ РАН, 2008, 518-В 2008, 13 с.