МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 517.5

Ахмедов Руслан Эльдар оглы

Асимптотические свойства полуклассических совместно-ортогональных многочленов Бесселя

Специальность 01.01.01 – математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2008 г.

Работа выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа механико–математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор А. И. Аптекарев
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор В. А. Калягин кандидат физико-математических наук, В. Г. Лысов
Ведущая организация:	Математический институт имени В. А. Стеклова Российской академии наук

Защита диссертации состоится «___» _______________ 2008 г. в ______ часов ___ мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.85 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, Главное здание МГУ, механико–математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико–математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан «___» _______________ 2008 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д.501.001.85 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор И. Н. Сергеев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Теория ортогональных многочленов тесно переплетается со многими областями анализа и теории функций, такими как аппроксимации аналитических функций, непрерывные дроби, диофантовы приближения, спектральная теория операторов, проблема моментов и др.

Одним из наиболее важных направлений в исследовании ортогональных многочленов, в первую очередь, с точки зрения рациональных аппроксимаций и диофантовых приближений, является нахождение различных видов асимптотических формул, а также развитие методов получения асимптотик. В связи с большим количеством задач, касающихся совместных аппроксимаций и приложений, неизменно возрастает интерес к изучению совместно-ортогональных (полиортогональных) многочленов:

$$\begin{gathered} Q_{\vec{n}}(x): \int\limits_{\Gamma_j} Q_{\vec{n}}(x)x^{\nu}w_j(x)dx = 0,\ \nu = 0,\ldots,n_j-1,\ j=1,\ldots,r, \\ \deg Q_{\vec{n}}(x) \leqslant |\vec{n}| := \sum_{j=1}^{r} n_j, \end{gathered} \tag{1}$$

где $\vec{n} = (n_1,\ldots,n_r)$ — r-мерный мультииндекс, а $w_j(x)$ — весовые функции на контурах $\Gamma_j \subset \mathbb{C}$. Многочлены (1) служат знаменателями совместных аппроксимаций (Эрмита-Паде) $\frac{P_{n,j}(x)}{Q_{\vec{n}}(x)}$ для набора функций

$$\hat{w}_j(x) = \int\limits_{\Gamma_j} \frac{w_j(\xi)d\xi}{\xi - x},\ j = 1,\ldots,r$$

или формальных степенных рядов[1]. Исследования многочленов вида (1), а также многочленов, ортогональных на системе контуров, проведенные Дж. Натоллом и С. Сингхом[2] [3], позволили обнаружить связь с алгебраическими римановыми поверхностями и получать аналитические свойства

[1] A.I.Aptekarev, *Multiple orthogonal polynomials,* J.Comput.Appl.Math., **99**(1998), 423-447

[2] J.Nuttall, *Asymptotics of diagonal Hermite-Pade approximants,* J.Approx.Theory, **42**(1984), 299-386

[3] J.Nuttall, S.Singh, *Orthogonal polynomials and Pade approximants associated with a system of arcs,* J.Approx.Theory, **21** (1977), 1-42

ортогональных многочленов в терминах этих поверхностей. Полное описание римановых поверхностей для многочленов с произвольными весами и носителями мер (весов) является сложной задачей с обширным содержанием.

Идеи Натолла, получившие дальнейшее развитие в работах других авторов[4], наряду с методами краевых задач Римана-Гильберта[5] [6], активно используются в настоящее время как непосредственно для нахождения асимптотик[7] [8], так и в приложениях, например, в теории случайных матриц.

Отметим связь с задачами о равновесном распределении зарядов на компактах в $\mathbb{C}$. Метод задачи теории потенциала, предложенный А. А. Гончаром и Е. А. Рахмановым[9] [10], стал ключевым инструментом в доказательстве теорем сходимости рациональных аппроксимаций и получения асимптотик.

Рассматриваемые в диссертации многочлены вида (1) с весовой функцией w ($w_j = w, j = 1, \ldots, n$), удовлетворяющей уравнению Пирсона

$$(\Phi w)' + \Psi w = 0, \tag{2}$$

(Φ и Ψ – многочлены x степени не выше $s+2$ и $s+1$ соответственно, $s \geqslant 1$), являются естественным обобщением классических ортогональных многочленов и обладают рядом свойств, аналогичных свойствам последних.

[4] А. И. Аптекарев, *Асимптотика многочленов совместной ортогональности в случае Анджелеско,* Матем.сб., 1988,т.136,№1,54-86

[5] P.Deift,X.Zhou,*A steepest descent method for oscillatory Riemann-Hilbert problem.Asymptotics for the mKdV equations,* Ann. of Math., **137**(1993),295-370

[6] P.Deift,*Orthogonal polynomials and a random matrices: a Riemann-Hilbert approach,* Reprint of the 1998 original,AMS,Providence RI 2000

[7] С. П. Суетин,*О равномерной сходимости диагональных аппроксимаций Паде для гиперэллиптических функций,* Матем.сб., 2000, т.191 №9, с.81-114

[8] А. И. Аптекарев, *Точные константы рациональных аппроксимаций аналитических функций* Матем.сб., 2002,т.193,№1,3-72

[9] А. А. Гончар,Е. А. Рахманов *Равновесная мера и распределение нулей экстремальных многочленов* Матем.сб., 1984,т.125(167),с.117-127

[10] А. А. Гончар,Е. А. Рахманов *О сходимости совместных аппроксимаций Паде для системы функций марковского типа,* Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, т.157(1981),с. 31-48

Они, в частности, служат решениями дифференциальных уравнений с полиномиальными коэффициентами[11]. Вместе с тем, в связи с многочленами (1),(2) возникают новые классы специальных функций[12 13],встречающиеся в задачах математической физики. Алгебраические свойства совместно-ортогональных многочленов с классическими весами, удовлетворяющими уравнению Пирсона, изучались А. И. Аптекаревым и др.[14]

Цель работы. Целью настоящей работы является получение явных асимптотических формул многочленов (1),(2) двух типов (полуклассических многочленов типа Бесселя-Бесселя и Бесселя-Лагерра), а также описание равновесных мер распределения нулей этих многочленов.

Методы исследования. В диссертации используются методы теории функций и функционального анализа. Для доказательства сильной асимптотики многочленов Бесселя-Бесселя мы пользуемся методом Дарбу, применявшемся в работе В. А. Калягина к исследованию обобщенных многочленов Якоби[15]. Для решения второй задачи (многочлены Бесселя-Лагерра) применяется метод перевала. Для описания распределения нулей многочленов обоих типов удобно рассматривать масштабированные многочлены $Q_n(n^\alpha x)$, с тем, чтобы предельное распределение нулей было сосредоточено на компакте.

Научная новизна. Результаты работы являются новыми и состоят в следующем:

1) рассмотрены многочлены совместной ортогональности с весовой функцией $\exp\{\frac{\gamma_1}{x^2}+\frac{\gamma_2}{x}\}$, удовлетворяющей (2) (многочлены Бесселя-Бесселя),

[11] A. I. Aptekarev, F. Marcellan, I. A. Rocha, *Semiclassical multiple orthogonal polynomials and the properties of Jacobi-Bessel polynomials,*J.Approx.Theory **v.90**(1997)№1,117-146

[12] В. Н. Сорокин,*Обобщение классических ортогональных многочленов и сходимость совместных аппроксимаций Паде,*Труды сем. им. И. Г. Петровского, 1986,вып. 11, с.125-165

[13] В. Н. Сорокин,*Асимптотическое поведение линейных форм с полиномиальными коэффициентами для некоторых функций стилтьесовского типа,*Сиб.матем.журн., (1986) №1,157-169

[14] A. I. Aptekarev, A.Branquinho, W. Van Assche,*Multiple orthogonal polynomials for the classical weights,*Trans.AMS **355**(2003), 3887-3914

[15] В. А. Калягин,*Об одном классе полиномов, определяемых двумя соотношениями ортогональности,*Матем.сб.,1979 т.110(152) №4, с.609-627

изучена производящая функция этих многочленов;

2) получены на основе метода Дарбу формулы сильной асимптотики для многочленов и функций второго рода;

3) проведено исследование многочленов Бесселя-Лагерра с весовой функцией $\exp\{\beta x + \frac{\alpha}{x}\}$, найдены формулы сильной асимптотики;

4) показано, что для обоих типов многочленов (Бесселя-Бесселя и Бесселя-Лагерра) предельное распределение нулей задается равновесной мерой с подходящим внешним полем.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты диссертации носят теоретический характер. Они относятся к теории аппроксимации функций комплексного переменного и к теории потенциала. В дальнейшем эти результаты могут быть использованы специалистами по теории функций и комплексному анализу.

Апробация диссертации. Результаты диссертации неоднократно докладывались и обсуждались на следующих научно-исследовательских семинарах:

- на семинаре "Современные проблемы теории функций" кафедры теории функций и функционального анализа механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова под руководством проф. А. И. Аптекарева, проф. В. Н. Сорокина и доц. В. С. Буярова в 2000–2003 и 2006–2008 гг.;

- на семинаре по комплексному анализу Математического института имени В. А. Стеклова РАН под руководством ак. РАН А. А. Гончара, чл.-корр. РАН Е. М. Чирки и проф. А. И. Аптекарева в 2000–2003 и 2006–2008 гг.;

- на семинаре по комплексному анализу отделения математики института ИНСА в г. Руан (Франция) под руководством проф. А. Дро и проф. А. И. Аптекарева в 2002–2003 гг.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в двух работах автора, приведенных в конце автореферата.

Структура работы. Диссертация изложена на 77 страницах, состоит из введения, двух глав и списка литературы, включающего 63 наименования.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении изложена история вопроса, проведен обзор результатов, связанных с тематикой исследования, сформулированы основные результаты.

В 1-ой главе вводятся основные определения, проводится сравнительный анализ различных обобщений классических многочленов, на основе теории полуклассических функционалов, дается классификация. Затем рассматриваются многочлены Бесселя-Бесселя

$$Q_{2n}(x),\ \deg Q_{2n} = 2n,$$

соответствующие весовой функции $\exp\{\frac{\gamma_1}{x^2} + \frac{\gamma_2}{x}\}$, $\gamma_1 \neq 0$, совместно-ортогональные на двух контурах Γ_j в $\mathbb{C}$, выходящих из 0. Не ограничивая общности, можем рассматривать весовую функцию $w(x) = e^{1/x^2}$.

Для изучения асимптотики рассмотрим производящую функцию:

$$F_\star(z;x) = \sum_{n=0}^{\infty} Q^\star_{2n}(x)\frac{1}{z^{n+1}}, \tag{3}$$

многочленов $Q^\star_{2n}(x) = Q_{2n}(\frac{x}{\sqrt{n}})$, нормированных так что старший коэффициент многочлена $Q^\star_{2n}(x)$ равен $k_{2n,2n} = \binom{3n}{n}$.

Теорема 1 *Особые точки $\{z_j\}$, $z_j = z_j(x)$ производящей функции $F_\star(z;x)$ (3), расположенные в комплексной Z-плоскости, удовлетворяют следую-*

щей системе соотношений :

$$\begin{cases} z_j(x) = (3t_j^2(x) - 2)e^{1/t_j^2(x) - 1/x^2} \\ t_j(x) = \frac{x}{2} + u_j(x) + v_j(x) \\ u_j(x) = \left(\frac{x^3}{8} - \frac{x}{4} - \frac{i}{\sqrt{432}}\sqrt{54x^4 + 9x^2 + 16}\right)^{\frac{1}{3}} \\ v_j(x) = \left(\frac{x^3}{8} - \frac{x}{4} + \frac{i}{\sqrt{432}}\sqrt{54x^4 + 9x^2 + 16}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad j = 1, 2, 3; \end{cases} \tag{4}$$

в последних двух равенствах выбирается та ветвь функции $\sqrt{\zeta}$, для которой $\sqrt{\zeta} > 0$ при $\zeta > 0$ и ветви кубического корня такие, что

$$u_j(x)v_j(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3}.$$

Далее изучаем характер особенностей (4). Исследуем многозначную аналитическую функцию $z(x)$, ветви которой $z_j(x)$ определяются формулами (4). Пусть $x_\pm, \overline{x_\pm}$ — нули дискриминанта

$$D = 54x^4 + 9x^2 + 16,$$

$\gamma_\pm$ — жордановы $\mathbb{R}$-симметричные дуги в правой и левой полуплоскости соответственно, соединяющие точки ветвления (пары точек$(x_+, \overline{x_+})$, $(x_-, \overline{x_-})$),

$$\gamma_\pm \subset \ \Gamma := \{x : |z_j(x)| = |z_k(x)|\} \ \ (j \neq k).$$

Производя склейку 3-х римановых листов

$$\mathcal{R}_1 = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{\gamma_+ \cup \gamma_-\}, \ \mathcal{R}_\pm = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{\gamma_\pm\}$$

(склеиваем крест-накрест $\mathcal{R}_1$ с $\mathcal{R}_+$ вдоль γ_+ и $\mathcal{R}_1$ с $\mathcal{R}_-$ вдоль γ_-), получим риманову поверхность рода 0. Функция $z(x)$ однозначна на этой поверхности и имеет следующий дивизор: полюс второго порядка в бесконечности на листе $\mathcal{R}_1$ и простые нули в бесконечности на остальных листах. Нормировка $z(x)$ задается условием

$$z_1(x) = \frac{27}{4}x^2 + \cdots, x \to \infty.$$

Вследствие симметрии задачи для других ветвей имеем (делаем переобозначения в соответствии с (4)):

$$z_+(x) := z_2(x),\ z_-(x) := z_3(x);$$
$$z_\pm(-x) = z_\mp(x), x \in G := \overline{\mathbb{C}} \setminus \{\gamma_+ \cup \gamma_- \cup \{0\}\}.$$

Можно показать, что для каждого $x \in G$, производящая функция $F_\star(z;x)$ имеет ветвление второго порядка в точке $z_1(x)$:

$$F_\star(z;x) = A_1(x)\Big(1 - \frac{z_1(x)}{z}\Big)^{-\frac{1}{2}} + A_0(x) + \cdots,\ x \in \mathring{U}_\varepsilon(z_1);$$

точки $z_\pm(x)$ не являются для нее особыми точками.

Теорема 2 *1.Равномерно по x на компактах области G*

$$Q^\star_{2n}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}(z_1(x))^n\{A_1(x) + O(\frac{1}{\sqrt{n}})\}, n \to \infty.$$

2.Равномерно по x на компактных подмножествах $\gamma_\pm$

$$Q^\star_{2n}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}\{A_1(x)(z_1(x))^n + A_\pm(x)(z_\pm(x))^n\}(1 + O(\frac{1}{\sqrt{n}})), n \to \infty.$$

Здесь $A_1(x)$ — коэффициент при $(1 - z_1(x)/z)^{-\frac{1}{2}}$ в разложении производящей функции $F_\star(z;x)$ в проколотой окрестности точки $z_1(x)$; функции $A_\pm(x)$ определяются аналогичным образом для точек $z_\pm(x)$.

Для функций второго рода многочленов $Q_{2n}(x)$:

$$R^{(j)}_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_j} \frac{Q_{2n}(t)w(t)}{t-x}dt,\ \ j = 1, 2 \tag{5}$$

вводим $\hat{z}_l(x) = z_l(x)e^{1/x^2}$, $l \in \{1, +, -\}$, где $z_l(x)$ определены выше. Далее проводим масштабирование, т.е. рассматриваем функции

$$R_n^{(j)}(\frac{x}{\sqrt{n}}) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_j} \frac{Q_{2n}^{\star}(t)w(\frac{t}{\sqrt{n}})}{t-x}dt. \tag{5*}$$

Теорема 3 *Для функций (5*) имеет место асимптотическая формула*

$$R_n^{(1)}(\frac{x}{\sqrt{n}}) = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}(\hat{z}_+(x))^n \tilde{B}_1(x)(1 + O(\frac{1}{\sqrt{n}})),\ n \to \infty,$$

равномерно по x на компактах области G, $\tilde{B}_1(x)$ — некоторая голоморфная функция.

Аналогичные формулы имеют место для $R_n^{(2)}(\frac{x}{\sqrt{n}})$.

Для описания предельного распределения нулей рассмотрим многочлены

$$Q^{\star}_{2n,+}(x) = \prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant 2n \\ \Re(x_{j,2n})>0}} (x - x_{j,2n}),\ \ Q^{\star}_{2n,-}(x) = \prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant 2n \\ \Re(x_{j,2n})<0}} (x - x_{j,2n}), \tag{6}$$

где $\{x_{j,2n}\}_{j=1}^{2n}$ — нули $Q^{\star}_{2n}(x)$.

Следствие 1 *Последовательности мер $\nu_{n,\pm}(x)$, считающих нули многочленов (6), имеют слабые пределы $\nu_{\pm}(x)$. Меры $\nu_{\pm}(x)$ являются равновесными мерами во внешнем поле зарядов $\ln|z_{\pm}(x)|$, (на компактах $\gamma_{\pm}$). При этом дуги $\gamma_{\pm}$ обладают S-свойством симметрии:*

$$\tfrac{\partial}{\partial n_1}(V_{\nu_{\pm}}(x) + \ln|z_{\pm}(x)|) = \tfrac{\partial}{\partial n_2}(V_{\nu_{\pm}}(x) + \ln|z_{\pm}(x)|),$$
$$x \in \gamma_{\pm},$$

где $\dfrac{\partial}{\partial n_1}$ и $\dfrac{\partial}{\partial n_2}$ — нормальные производные справа и слева от кривых $\gamma_{\pm}$, а $V_{\mu}(x)$ — логарифмический потенциал меры μ.

Во второй главе изучаются многочлены $Q_{2n}(x), \deg Q_{2n} = 2n$, с весовой функцией $e^{\alpha/x}e^{\beta x}$ $(\alpha > 0, \beta > 0)$, при этом один из контуров ортогональности ограничен, а другой неограничен. Для их детального описания удобно рассматривать масштабированные многочлены

$$Q^{\star}_{2n}(x) = Q_{2n}(nx) \tag{7a}$$

и

$$\tilde{Q}_{2n}(x) = Q_{2n}(\frac{x}{n}). \tag{7b}$$

Выбираем следующую нормировку для многочленов (7a),(7b):

$$Q^{\star}_{2n}(x) = e^{\frac{-\alpha}{nx}} e^{-\beta nx} \tfrac{1}{n!} \tfrac{d^n}{dx^n} [x^{2n} e^{\frac{\alpha}{nx}} e^{\beta nx}],$$

$$\tilde{Q}_{2n}(x) = e^{-\frac{\alpha n}{x}} e^{-\beta x/n} \tfrac{1}{n!} \tfrac{d^n}{dx^n} [x^{2n} e^{\frac{\alpha n}{x}} e^{\beta x/n}].$$

Введем также функции

$$p_{\beta}(t) = \log \frac{t-x}{t^2 e^{\beta(t-x)}}, \quad p_{\alpha}(t) = \log \frac{t-x}{t^2 e^{\alpha/t - \alpha/x}}.$$

и положим

$$t_j = t_j(x) = \frac{\beta x - 1}{2\beta} \pm \frac{1}{2\beta} \sqrt{\beta^2 x^2 + 6\beta x + 1}, \quad j = 1, 2, \tag{8}$$

т.е. t_j – нули производной $p'_{\beta}(t)$.

Теорема 4 *Пусть* $\Delta := [\frac{-3-\sqrt{8}}{\beta}, \frac{-3+\sqrt{8}}{\beta}], \beta > 0$. *Для многочленов (7a) справедливы асимптотические формулы*

1.

$$Q^{\star}_{2n}(x) = \frac{1}{(2\beta)^n \sqrt{\pi n}} A_1(t_1)(\beta^2 x^2 + 4\beta x - 1 + (\beta x + 1)\sqrt{D})^n \cdot$$

$$\cdot \exp\{(\frac{-\beta x - 1 + \sqrt{D}}{2})n\} \left(1 + O(\frac{1}{\sqrt{n}})\right), \; n \to \infty, \tag{9}$$

равномерно по x *на компактных подмножествах области* $G = \mathbb{C} \setminus (\Delta \cup \{0\})$.

2.

$$Q^{\star}_{2n}(x) = \frac{1}{(2\beta)^n\sqrt{\pi n}}\Big(A_1(t_1)(\beta^2x^2+4\beta x-1+(\beta x+1)\sqrt{D})^n\cdot$$

$$\cdot\exp\{(\frac{-\beta x-1+\sqrt{D}}{2})n\}+A_1(t_2)(\beta^2x^2+4\beta x-1-(\beta x+1)\sqrt{D})^n\cdot$$

$$\cdot\exp\{(\frac{-\beta x-1-\sqrt{D}}{2})n\}\Big)\cdot\left(1+O(\frac{1}{\sqrt{n}})\right),\ n\to\infty, \qquad (10)$$

равномерно по x на компактных подмножествах Δ.

Здесь $D=\beta^2x^2+6\beta x+1$; t_j определены в (8), $A_1(t)$ — функция, аналитическая в окрестности точки t_j, и везде в формулах (9),(10) выбрана главная ветвь функции $\sqrt{D}$.

Рассмотрим дугу $\tilde{L}$, имеющую параметрическое представление:

$$\tilde{L}=\{x:\alpha^2=4x^2(\delta^2-1),\ \frac{(\delta\operatorname{sh}\delta-\operatorname{ch}\delta)^2}{1-\delta^2}=\ \theta\in[0,1];\Re(x)>0\}. \qquad (11)$$

Имеем $\tilde{L}\subset\{x:\Re\{p_\alpha(\tilde{t}_1)\}=\Re\{p_\alpha(\tilde{t}_2)\}\}$, $p'_\alpha(\tilde{t}_j)=0$ $(j=1,2)$.

Теорема 5 *Для многочленов (7b) справедливы следующие асимптотические формулы*

1.

$$\tilde{Q}_{2n}(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi n}}B_1(\tilde{t}_1)(2x+\sqrt{\alpha^2+4x^2})^n\exp\{(\frac{(2x-\alpha-\sqrt{\alpha^2+4x^2}}{2x})n\}\cdot$$

$$\cdot\left\{1+O(\frac{1}{\sqrt{n}})\right\},\ n\to\infty, \qquad (12)$$

равномерно по x на компактных подмножествах области $\tilde{G}=\mathbb{C}\setminus\tilde{L}$.

2.

$$\tilde{Q}_{2n}(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\Big\{B_1(\tilde{t}_1)(2x+\sqrt{\alpha^2+4x^2})^n\exp\{(\frac{2x-\alpha-\sqrt{\alpha^2+4x^2}}{2x})n\}+$$

$$+B_1(\tilde{t}_2)(2x-\sqrt{\alpha^2+4x^2})^n \exp\{(\frac{2x-\alpha+\sqrt{\alpha^2+4x^2}}{2x})n\}\Big\}\cdot$$

$$\cdot\left\{1+O(\frac{1}{\sqrt{n}})\right\},\ n\to\infty, \qquad (13)$$

равномерно по x на компактных подмножествах кривой $\tilde{L}$. Здесь $\tilde{t}_j$ — нули производной $p'_\alpha(t)$, $B_1(t)$ — функция, аналитическая в окрестности точки $\tilde{t}_j$, $\tilde{L}$ задана параметризацией (11), и везде в формулах (12),(13) выбраны главные ветви многозначных функций.

Таким образом, главный член асимптотического разложения задается двузначной аналитической функцией (имеем полюс второго порядка в бесконечности для главной ветви в случае (7a) и простой полюс в бесконечности в случае (7b)). Нули соответствующих многочленов распределены в пределе на компактах Δ и $\tilde{L}$. Предельные меры распределения нулей являются равновесными мерами во внешнем поле заряда (единичного заряда, сосредоточенного в нуле и поля $\Re(-\beta x)$ в случае (7a), и поля $\Re(-\frac{\alpha}{x})$ в случае (7b)).

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю, профессору А. И. Аптекареву за постановку задачи, а также профессору В. Н. Сорокину за полезные обсуждения в ходе работы над диссертацией.

Работы автора по теме диссертации

[1] Р. Э. Ахмедов, Асимптотическое поведение полуклассических совместно-ортогональных многочленов типа Бесселя-Лагерра //*Матем.заметки, 2008, т.83, №3, с.461–464*

[2] Р. Э. Ахмедов, Об асимптотическом поведении полуклассических полиномов совместной ортогональности типа Бесселя// *Матем.заметки, 2008, т.84, №4, с.483–495*