Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 517.984.5

Прибыль Марина Александровна

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРА ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ СТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЯЗКОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

01.01.02 - дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2008

Работа выполнена на кафедре общих проблем управления Механико-математического факультета Московского Государственного Университета им. М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук профессор А.В. Фурсиков.
Оффициальные оппоненты:	доктор физико-математических наук профессор М.С. Агранович,
	доктор физико-математических наук профессор А.А. Шкаликов.
Ведущая организация:	Московский энергетический институт.

Защита состоится 14 ноября 2008 года в 16 часов 40 минут на заседании диссертационного совета Д.501.001.85 в Московском Государственном Университете им. М.В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП - 1, РФ, Москва, Ленинские горы, МГУ, Механико - математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико - математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан "14"октября 2008 года.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д.501.001.85 в МГУ
доктор физико-математических наук
профессор И.Н. Сергеев

Общая характеристика работы.

Актуальность темы. Изучению математических вопросов, касающихся уравнений вязкой сжимаемой жидкости, посвящено много работ как российских, так и зарубежных авторов. Одной из первых в этой области была работа Я.И. Канеля [1], в которой исследовалась задача Коши для одномерного нестационарного движения вязкого сжимаемого газа в переменных Лагранжа:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p(v)}{\partial x} = \mu \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{v}\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

где u – скорость, v – удельный объем, $p = p(v)$ – давление, $\mu = const > 0$ – вязкость среды, t – время. В указанной работе доказаны корректность задачи "в целом" по времени и сходимость решения при $t \to \infty$ к стационарному решению.

В дальнейшем появляются работы, в которых рассматривается более общая постановка задачи для одномерного движения. А именно, предполагается, что газ теплопроводен, т.е. удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(e + \frac{1}{2}u^2\right) - \frac{\partial(\sigma u)}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \tag{3}$$

с граничными условиями:

$$q(t,0) = q(t,1) = 0,\ \sigma(t,0) = \sigma(t,1) = 0, \tag{4}$$

либо уравнения (1)–(3) рассматриваются на всей прямой. Здесь $e = e(v,\theta)$ – внутренняя энергия, $\sigma = -p(v,\theta) + \mu(v)u_x$ – тензор напряжения, $q = q(v,\theta,\theta_x)$ – тепловой поток, θ – абсолютная температура, p – давление, $\mu(v)$ – вязкость.

[1] Канель Я.И. Об одной модельной системе уравнений одномерного движения газа//Диф. уравнения – 1968. –т. 4, №4, с. 374-380.

А.В. Кажихов [2,3], А.А. Amosov [4], C.M. Dafermos [5], T. Nagasawa [6] доказали глобальное существование сильных решений задачи (1)–(3) с начальными условиями при различных предположениях на функции e, σ, q.

Изучению поведения решения при $t \to \infty$ системы (1)–(3) также посвящено много работ. С.Н. Антонцев [7], E. Feireisl [8] и S. Jiang [9] исследовали поведение при больших временах сильного решения задачи Коши и начально-краевой задачи для системы (1)–(3) с граничными условиями (4). В случае граничных условий

$$q(t,0) = q(t,1) = 0,\ \sigma(t,0) = \sigma(t,1) = -R(t) < 0,$$

где $R(t)$ – заданная функция, поведение решения при больших временах изучал B. Ducomet [10].

Глобальное существование слабого решения и его поведение при больших временах исследовались также для многомерных уравнений вязкой сжимаемой жидкости. Однако вопросы существования глобального сильного решения в случае теплопроводного газа и единственность слабого решения при больших начальных данных остаются открытыми.

В случае достаточно малых начальных данных существование глобального сильного и слабого решений и сходимость к соответствующему стаци-

[2]Кажихов А.В. Теория начально-краевых задач для уравнений одномерного нестационарного движения вязкого теплопроводного газа//Краев. задачи для уравн. гидродинамики, Дин. сплош. среды. – 1981. – т. 50, с. 37-62.

[3]Кажихов А.В., Шелухин В.В. Однозначная разрешимость "в целом"по времени начально-краевых задач для одномерных уравнений вязкого газа//Прикл. матем. и механика. – 1977. – т. 41, с. 282-291.

[4]Amosov A.A. The existence of global generalized solutions of the equations of one-dimensional motion of real viscous gas with discontinuous data//Diff. Eqs. – 2000. – V. 36, pp. 540-558.

[5]Dafermos C.M. Global smooth solutions to the initial-boudary value problem for the equations of one-dimensional nonlinear thermoviscoelasticity//SIAM J. Math. Anal. – 1982. – V. 13, pp. 397-408.

[6]Nagasawa T. On the one-dimensional motion of the polytropic ideal gas no-fixed on the boundary//J. Diff. Eqs. – 1986. – V. 65, pp. 49-67.

[7]Antontsev S.N., Kazhihov A.V. and Monakhov V.N. Boundary Value Problems in Machanics of Nonhomogeneous Fluids// North-Holland, Amsterdam, New York. – 1990.

[8]Feireisl E. and Petzeltova H. Unconditional stability of stationary flows of compressible heat-conducting fluids by large external forces//J. Math. Fluid Mech. – 1999. – V. 1, pp. 168-186.

[9]Jiang S. Large-time behavior of solutions to the equations of a one-dimensional viscous polytropic ideal gas in unbounded domains//Comm. Math. Phys. – 1999. – V. 200, pp. 181-193.

[10]Ducomet B. Asymptotic behaviour for a non-monotone fluid in one dimension: The positive temperature case//Math. Meth. Appl. Sci. – 2001. – V. 24, pp. 543-559.

онарному решению при $t \to \infty$ доказаны, например, в работах D. Hoff [11] и A. Matsumura, T. Nishida [12]. В случае больших начальных данных ситуация значительно сложнее. Тем не менее P.-L. Lions [13] установил глобальное существование слабого решения для системы уравнений, описывающих движение адиабатической жидкости:

$$\partial_t \rho + \mathrm{div}(\rho u) = 0,$$

$$\partial_t(\rho u) + \mathrm{div}(\rho u \otimes u) + a \bigtriangledown (\rho^\gamma) = \mu \Delta u + (\zeta + \mu) \bigtriangledown \mathrm{div} u,$$

при $\gamma \geq \frac{3d}{d+2}$ и размерности $d = 2, 3$. Здесь $a > 0$ – число, ζ – второй коэффициент вязкости. E.Feireisl и H. Petzeltova [14] обобщили результат P.-L. Lions на случай $\gamma > \frac{d}{2}$, $d = 2, 3$. Поведение при больших временах глобального слабого решения этой системы исследовалось, например, в работах B. Ducomet [15], J. Neustupa [16].

Изучение поведения при больших временах решения нелинейных уравнений вязкой сжимаемой жидкости, в частности, изучение их устойчивости, может быть сведено к исследованию спектральных свойств оператора, описываемого линеаризованными стационарными уравнениями. Во всех работах, упомянутых выше, линеаризация проводилась на постоянном решении (u_0, ρ_0), не зависящем от x, что приводит к стационарным дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами. Спектральная задача для таких уравнений с помощью преобразования Фурье сводится к исследованию спектра матрицы, см. M.R. Levitin [17], M. Nunez [18]. В диссер-

---

[11] Hoff D. Strong convergence to global solutions for multidimensional flows of compressible, viscous fluids with polytropic equations of state and discontinuous initial data//Arch. Rat. Mech. Anal. – 1995. – V. 132, pp. 1-14.

[12] Matsumura A., Nishida T. The initial value problem for the equations of motion of viscous and heat-conductive gases//J. Math. Kyoto Univ. – 1980. – V. 20, pp. 67-104.

[13] Lions P.-L. Mathematical Topics in Fluid Mechanics, Vol. 2 – Oxford Science Public., Clarendon Press.: Oxford, 1998.

[14] Feireisl E. and Petzeltova H. Unconditional stability of stationary flows of compressible heat-conducting fluids by large external forces//J. Math. Fluid Mech. – 1999. – V.1, pp. 168-186.

[15] Ducomet B. Hydrodynamical models of gaseous stars//Rev. Math. Phys. – 1996. – V.8, pp. 957-1000.

[16] Neustupa J. Selected Topics in the Theory of Stability, Vol.3 – CTU Reports, Czech technical university in Prague: Praha, 1999.

[17] Levitin M.R. Vibrations of viscous compressible fluid in bounded domains: spectral properties and asymptotics//Asimptotic Analysis. – 1993. – V.7, pp. 15-34.

[18] Nunez M. Spectral analysis of viscous static compressible fluid equilibria//J. Phys. A: Math. Gen. –

тации исследуется спектр стационарных модельных уравнений, связанных с описанием течения вязкой сжимаемой жидкости, но с переменными коэффициентами.

Спектральные задачи для уравнений в частных производных с переменными коэффициентами – это обширная область математической физики, которая уже стала классической. Подробный исторический обзор этой области, по нашему мнению, приводить нецелесообразно, так как многие ее разделы (теория самосопряженных эллиптических операторов, ассимптотика спектральной функции и другие) не имеют прямого отношения к диссертации. Однако, мы не можем не отметить работу М.В. Келдыша [19], из которой выросла вся современная теория несамосопряженных дифференциальных операторов (см., например, И.Ц. Гохберг, М.Г. Крейн [20], М.С. Агранович [21]). В диссертации основным аппаратом для исследования спектральной задачи является метод псевдодифференциальных операторов. Поэтому мы должны отметить, что теория псевдодифференциальных операторов широко использовалась при исследовании спектра самосопряженных и несамосопряженных операторов (см., например, Л. Хермандер [22], М.С. Агранович [21], М.А. Шубин [23]).

В диссертации рассматриваются стационарные модельные уравнения, связанные с описанием течения вязкой сжимаемой жидкости, заданные в $\mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, с периодическими краевыми условиями. Берется линеаризация этих уравнений на заданном стационарном решении $(\overline{u}(x), \overline{\rho}(x))$, зависящем от x. Она приводит к системе уравнений с переменными коэффициентами. Исследуется структура спектра оператора, описываемого полученными уравнениями с переменными коэффициентами. Доказано, что спектр

2001. – V. 34, pp. 4341-4352.

[19]Келдыш М.В. Собственные значения и собственные функции для некоторых классов несамосопряженных уравнений//ДАН СССР. – 1951. – т. 77 № 1, с. 11-14.

[20]Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1965.

[21]Агранович М.С. Эллиптические операторы на замкнутых многообразиях. Дифференциальные уравнения с частными производными. Итоги науки и техники. т. 63. – М.: ВИНИТИ, 1990, с. 5-129.

[22]Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными, Том 3: Псевдодифференциальные операторы. – М.: Мир, 1987.

[23]Шубин М.А. Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. – М.: Добросвет, 2003.

оператора лежит в дополнении к некоторому сектору S, т.е. в $\mathbb{C}\backslash S$. Кроме того, установлена дискретность спектра в области $\mathbb{C}\backslash S$ всюду, кроме отрезка, на котором спектральная задача теряет свойство эллиптичности по Дуглису-Ниренбергу. Также установлена оценка резольвенты, когда спектральный параметр лежит в секторе S. Исследование спектра подобного оператора с переменными коэффициентами и доказательство оценки резольвенты ранее не проводились.

Цель работы. Целью диссертации является исследование спектра оператора, описываемого модельными стационарными линеаризованными уравнениями вязкой сжимаемой жидкости, и доказательство секториальности оператора.

Основные методы исследования. В диссертации используется аппарат псевдодифференциальных операторов, общая теория несамосопряженных линейных операторов.

Научная новизна. Основные результаты работы являются новыми и состоят в следующем:

- доказано, что спектр оператора, описываемого модельными линеаризованными стационарными уравнениями вязкой сжимаемой жидкости с переменными коэффициентами, лежит в дополнении к некоторому сектору S, т.е. в $\mathbb{C}\backslash S$, причем в области $(\mathbb{C}\backslash S)\backslash[a, b]$ спектр дискретен, где $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$;
- получена оценка резольвенты оператора, описываемого модельными линеаризованными стационарными уравнениями вязкой сжимаемой жидкости с переменными коэффициентами, когда спектральный параметр принадлежит сектору S.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы для исследования поведения решений при $t \to \infty$ соответствующих нестационарных уравнений, а также в вопросах стабилизации этих уравнений.

Апробация. Основные результаты диссертации докладывались неоднократно на семинарах в МГУ под руководством профессора А.В. Фурсикова (2004 –2008) и в Институте Вычислительной Математики РАН(2006); на семинаре под руководством профессора Е.В. Радкевича в МГУ(2007); на семинаре под руководством профессора Ю.А. Дубинского в Московском Энергетическом Институте (2007), на Международной конференции "Mathematical Hydrodynamics" МИАН (июнь 2006), на Всероссийской конференции "XXVIII Конференция молодых ученых механико - математического факультета МГУ" (апрель 2006), на Всероссийской конференции "Ломоносов -2006" (апрель 2006), на Международной конференции "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы" , посвящённой И.Г. Петровскому, МГУ (май 2007); на Всероссийской конференции "Современные методы теории функций и смежные проблемы" , Воронеж (февраль 2007); в Крымской осенней математической школе-симпозиуме, Крым (сентябрь 2007); в Школе-семинаре "Нелинейный анализ и экстремальные задачи" , Иркутск (июнь 2008).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 8 печатных работ [1 – 8]. Публикаций написанных в соавторстве нет.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из трех глав, разбитых на параграфы, и списка литературы. Полный объем диссертации – 97 страниц, библиография включает 57 наименований.

Краткое содержание диссертации.

Рассматривается стационарная модельная задача, связанная с описанием течения вязкой сжимаемой жидкости:

$$\frac{\mu}{\rho(x)}\Delta u(x) - \frac{1}{\rho(x)} \bigtriangledown p(\rho(x)) = f(x), \tag{5}$$

$$-\rho(x)\mathrm{div} u = 0, \tag{6}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, $\mu > 0$ – коэффициент вязкости,

$$\Delta = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}, \ \bigtriangledown = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_d}\right),$$

неизвестными функциями являются скорость жидкости $u(x) = (u_1(x), \ldots, u_d(x))$ и плотность $\rho(x) > 0$, а заданными функциями является сила $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_d(x))$ и давление $p(\rho) \in C^1(0, \infty)$, причем $p'(\rho)$ либо строго положительна, либо строго отрицательна. Все функции в (5), (6) удовлетворяют периодическим краевым условиям по x_j с периодом 2π. Это эквивалентно предположению, что $x = (x_1, \ldots, x_d)$ пробегает тор $T^d = \mathbb{R}^d/2\pi\mathbb{Z}^d$.

Для простоты положим $\mu = 1$. Пусть $(\overline{u}(x), \overline{\rho}(x))$ – произвольное решение системы (5), (6). Линеаризуем эту систему на указанном решении и рассмотрим следующую спектральную задачу:

$$\frac{1}{\overline{\rho}(x)}\Delta u(x) + b(x) \bigtriangledown \rho(x) + c(x)\rho(x) = \lambda u(x), \tag{7}$$

$$-\overline{\rho}(x)\mathrm{div}\, u(x) = \lambda\rho(x), \tag{8}$$

где

$$b(x) = -\frac{1}{\overline{\rho}(x)}p'(\overline{\rho}(x)),\ c(x) = -\frac{\bigtriangledown p'(\overline{\rho}(x))}{\overline{\rho}(x)} + \frac{\bigtriangledown p(\overline{\rho}(x))}{\overline{\rho}^2(x)} - \frac{\Delta\overline{u}(x)}{\overline{\rho}^2(x)}. \tag{9}$$

Здесь $\lambda \in \mathbb{C}$ – спектральный параметр. Отбросим члены левой части системы (7), (8), содержащие $\rho(x)$, которые являются членами низшего порядка в смысле эллиптичности по Дуглису-Ниренбергу, и рассмотрим сначала спектральную задачу:

$$\frac{1}{\overline{\rho}(x)}\Delta u(x) + b(x) \bigtriangledown \rho(x) = \lambda u(x), \tag{10}$$

$$-\overline{\rho}(x)\mathrm{div}\, u(x) = \lambda\rho(x). \tag{11}$$

В **главе 1** исследуется структура спектра оператора, описываемого левой частью уравнений (10), (11), заданными на торе T^d. Параграф 1 посвящен постановке задачи.

Введем пространство $H = \underbrace{L_2(T^d) \times \ldots \times L_2(T^d)}_{d} \times H^1(T^d)$ с нормой

$$\|y\|_H^2 = \sum_{j=1}^{d} \|y_j\|_{L_2}^2 + \|y_{d+1}\|_{H^1}^2,$$

а также пространство $J = \underbrace{H^2(T^d) \times \ldots \times H^2(T^d)}_{d} \times H^1(T^d)$ с нормой

$$\|y\|_J^2 = \sum_{j=1}^{d} \|y_j\|_{H^2}^2 + \|y_{d+1}\|_{H^1}^2,$$

где $H^k(T^d)$, $k = 1, 2,$ – пространства Соболева. Обозначим через $A(x, D) = \{a_{nm}(x, D)\}_{n,m=1}^{d+1}$ дифференциальный оператор, который задается левой частью системы (10),(11). Область определения $\mathbf{D}(A(x, D))$ и область значений $\mathbf{R}(A(x, D))$ оператора $A(x, D)$ удовлетворяют соотношениям

$$\mathbf{D}(A(x, D)) = J, \ \mathbf{R}(A(x, D)) \subset H.$$

Перепишем задачу (10),(11) в виде

$$(A(x, D) - \lambda E)U(x) = 0, \tag{12}$$

где $U(x) = (u(x), \rho(x))$– вектор размерности $d+1$, $d = 2, 3$, E – единичный оператор.

Определение 1. *Точка $\lambda \in \mathbb{C}$ называется регулярной точкой оператора $A(x, D) : J \to H$, если определен ограниченный обратный оператор $(A(x, D) - \lambda E)^{-1} : H \to J$. Множество всех регулярных точек называется резольвентным множеством оператора $A(x, D)$. Это множество обозначим $r(A(x, D))$.*

Определение 2. *Множество $\sigma(A(x, D)) = \mathbb{C} \setminus r(A(x, D))$ называется спектром оператора $A(x, D)$.*

Определение 3. *Замкнутый оператор $A(x, D) : H \to H$ называется секториальным, если существуют $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, $a_0 \in \mathbb{R}$ и $M > 0$ такие, что сектор $S_{a_0,\varphi} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda - a_0)| \leq \varphi, \ \lambda \neq a_0\}$ лежит в $r(A(x, D))$ и $\|(A(x, D) - \lambda E)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda - a_0|}$ для любого $\lambda \in S_{a_0,\varphi}$.*

Близкие определения даны в книгах Т. Като[24] и Д. Хенри[25].

Параграф 2 посвящен проверке эллиптичности оператора $B(x, D)$, который описывается левой частью системы (7),(8). Установлено, что указанный оператор эллиптичен по Дуглису-Ниренбергу. Однако, у оператора

[24] Като Т. Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1972.

[25] Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. – М.: Мир, 1985.

$B(x,D)-\lambda E$ эллиптичность по Дуглису-Ниренбергу теряется при некоторых λ для некоторых x. Это происходит из-за того, что слагаемое $-\lambda$ в компонентах оператора $B(x,D)-\lambda E$, порожденных уравнением (8), входит в старшие члены.

В параграфе 3 предполагается, что оператор $A(x,D)$, порожденный левой частью системы (10), (11), имеет постоянные коэффициенты, т.е. $A(x,D)=A(D)$ не зависит от x. Для него рассматривается спектральная задача:

$$(A(D)-\lambda E)U(x)=0.$$

С помощью теории рядов Фурье найдены собственные значения и соответствующие им собственные векторы оператора $A(D)$. Число

$$\lambda_1(\xi)=-\frac{|\xi|^2}{\overline{\rho}},\ \xi\in\mathbb{Z}^d,\ d=2,3, \tag{13}$$

– является собственным значением кратностью $d-1$, а

$$\lambda_{2,3}(\xi)=-\frac{|\xi|^2}{2\overline{\rho}}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{|\xi|^4}{\overline{\rho}^2}+4b\overline{\rho}|\xi|^2},\ \xi\in\mathbb{Z}^d,\ d=2,3, \tag{14}$$

– являются простыми собственными значениями. Заметим, что

$$\lambda_3(\xi)=-\frac{|\xi|^2}{2\overline{\rho}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{|\xi|^4}{\overline{\rho}^2}+4b\overline{\rho}|\xi|^2}\to b\overline{\rho}^2,\ |\xi|\to\infty.$$

Следовательно, $\hat{\lambda}=b\overline{\rho}^2$ – точка накопления собственных значений $\lambda_3(\xi)$ при $|\xi|\to\infty$. Именно в точке $\lambda=b\overline{\rho}^2$ теряется эллиптичность по Дуглису-Ниренбергу оператора $A(x,D)-\lambda E$. В диссертации доказаны следующие леммы:

Лемма 1.3.1. *Пусть $d=2$. При любом $\xi\in\mathbb{Z}^2\backslash\{0\}$ существуют 3 взаимоортогональных собственных вектора. Собственный вектор*

$$FU(\xi)e^{i(x,\xi)}=(\xi_2,-\xi_1,0)e^{i(x,\xi)} \tag{15}$$

соответствует собственному значению (13), а собственные векторы

$$FU(\xi)e^{i(x,\xi)}=\left(ib\overline{\rho}\xi_1,ib\overline{\rho}\xi_2,\frac{|\xi|^2}{\overline{\rho}}+\lambda_{2,3}(\xi)\right)e^{i(x,\xi)} \tag{16}$$

соответствуют собственным значениям (14).

Лемма 1.3.2. *Пусть $d = 3$. При любом $\xi \in \mathbb{Z}^3 \backslash \{0\}$ существуют 4 взаимоортогональных собственных вектора. Два из них, соответствующие собственному значению (13), определяются следующим образом:*
для $\xi_1^2 + \xi_3^2 \neq 0$

$$(-\xi_3, 0, \xi_1, 0) e^{i(x,\xi)},$$
$$\left(\frac{\xi_1^2 \xi_2}{\xi_1^2 + \xi_3^2}, -\xi_1, \frac{\xi_1 \xi_2 \xi_3}{\xi_1^2 + \xi_3^2}, 0 \right) e^{i(x,\xi)};$$

для $\xi_1^2 + \xi_2^2 \neq 0$

$$(-\xi_2, \xi_1, 0, 0) e^{i(x,\xi)},$$
$$\left(-\frac{\xi_1 \xi_2 \xi_3}{\xi_1^2 + \xi_2^2}, -\frac{\xi_2^2 \xi_3}{\xi_1^2 + \xi_2^2}, \xi_2, 0 \right) e^{i(x,\xi)}.$$

А два других собственных вектора, соответствующие собственным значениям (14), определяются формулой

$$\left(ib\xi_1, ib\xi_2, ib\xi_3, \frac{|\xi|^2}{\overline{\rho}} + \lambda_{2,3}(\xi) \right) e^{i(x,\xi)}.$$

Рассмотрим множество

$$M = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \lambda = \lambda(\xi) \text{ определены в } (13), (14) \text{ при } \xi \in \mathbb{Z}^d, \ d = 2, 3\}. \quad (17)$$

В следующей лемме будет доказано, что $\sigma(A(D)) \subset M \cup \{b\overline{\rho}^2\}$.

Лемма 1.3.3. *Пусть $\lambda \notin M$ и $\lambda \neq b\overline{\rho}^2$. Тогда оператор $(A(D) - \lambda E)^{-1} : H \to J$ определен и непрерывен, т.е. $\lambda \in r(A(D))$.*

Следствие 1.3.1. *Справедливо равенство $M \cup \{b\overline{\rho}^2\} = \sigma(A(D))$.*

Лемма 1.3.4. *Для предельной точки $\hat{\lambda} = b\overline{\rho}^2$ собственного значения $\lambda_3(\xi)$, образ оператор $(A(D) - \hat{\lambda} E) : J \to H$ не замкнут в H.*

В следующей лемме достаточно точно описано подмножество комплексной плоскости, содержащее спектр оператора $A(D)$.

Лемма 1.3.5. *Существуют константы $C_0, C_1, C_2 > 0$ такие, что* *множество $M \cup \{b\overline{\rho}^2\}$ содержится в множестве*

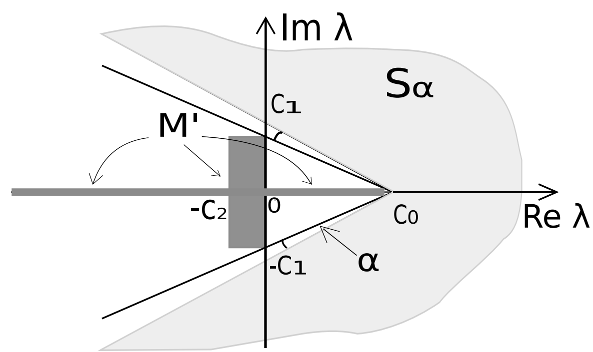
$$M' = \{\lambda \in \mathbb{C}: \ \mathrm{Im}\,\lambda = 0, \ \mathrm{Re}\,\lambda \in (-\infty, -C_2) \cup (0, C_0]\} \cup \\ \cup \{\lambda \in \mathbb{C}: \ \mathrm{Re}\,\lambda \in [-C_2, 0], \ \mathrm{Im}\,\lambda \in [-C_1, C_1]\}. \quad (18)$$

Эта лемма необходима при доказательстве секториальности операторов $A(D)$ и $A(x, D)$, а также для исследования структуры спектра оператора $A(x, D)$.

Для достаточно малого $\alpha > 0$ рассмотрим сектор

$$S_\alpha = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 \leq |\arg(\lambda - C_0)| < \pi - \frac{C_1}{C_0} - \alpha, \ \lambda \neq C_0\}, \qquad (19)$$

где $C_0, C_1 > 0$ – числа из (18). Заметим, что $S_\alpha \cap M' = \emptyset$.



Теорема 1.3.1. *Спектр $\sigma(A(D))$ оператора $A(D)$, состоящий из дискретного множества точек и одной точки накопления $\{b\overline{\rho}^2\}$, лежит в $\mathbb{C} \backslash S_\alpha$. При этом $\sigma(A(D)) \subset M'$.*

В параграфах 4–8 исследуется спектр оператора $A(x, D)$ с переменными коэффициентами. Рассмотрим оператор $A(x, D)$ с коэффициентами, “замороженными“ в некоторой точке x_0, т.е. оператор с постоянными коэффициентами $A(x_0, D)$. Подставляя в формулы (13),(14) $\overline{\rho} = \overline{\rho}(x_0)$, $b = b(x_0)$, получим выражения для $\lambda_j(\xi) = \lambda_j(x_0, \xi)$, $j = 1, 2, 3$. Определим множество

$$M(x_0) = \{\lambda(x) = \lambda_j(x_0, \xi), \ \text{где } \lambda_j(x_0, \xi) \text{ определены в } (13), (14) \\ \text{при } \overline{\rho} = \overline{\rho}(x_0), \ b = b(x_0), \ \xi \in \mathbb{Z}^d, \ d = 2, 3\}. \quad (20)$$

При $\lambda_j(x_0, \xi) = \lambda_j(\xi)$ множество $M(x_0)$ совпадает с множеством M, определенным в (17). В силу леммы 1.3.5 множество $M \cup \{b\overline{\rho}^2\}$ содержится в множестве M'. Поэтому множество $M(x_0) \cup \{b(x_0)\overline{\rho}^2(x_0)\}$ содержится в множестве $M'(x_0)$, где $M'(x_0)$ определено в (18) при $C_0 = C_0(x_0)$, $C_1 = C_1(x_0)$, $C_2 = C_2(x_0)$. Введем следующие константы: $N_0 = \max\limits_{x_0 \in T^d} C_0(x_0)$, $N_1 = \max\limits_{x_0 \in T^d} C_1(x_0)$, $N_2 = \max\limits_{x_0 \in T^d} C_2(x_0)$. Тогда объединение $\bigcup\limits_{x_0 \in T^d} (M(x_0) \cup \{b(x_0)\overline{\rho}^2(x_0)\})$ содержится в множестве

$$M_1 = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \operatorname{Im} \lambda = 0, \ \operatorname{Re} \lambda \in (-\infty, -N_2) \cup (0, N_0]\} \cup \\ \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \operatorname{Re} \lambda \in [-N_2, 0], \ \operatorname{Im} \lambda \in [-N_1, N_1]\}. \quad (21)$$

Для достаточно малого $\beta > 0$ определим сектор

$$S_\beta = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 \leq |\arg(\lambda - N_0)| < \pi - \operatorname{arctg} \frac{N_1}{N_0} - \beta, \lambda \neq N_0\}. \quad (22)$$

Очевидно, сектор S_β не содержит множества M_1. Рассмотрим корень $\lambda_3(x, \xi)$, определенный в (14) (со знаком плюс перед квадратным корнем) при $\overline{\rho} = \overline{\rho}(x)$, $b = b(x)$. Заметим, что для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta_\varepsilon > 0$ такое, что для всех $\xi \in \mathbb{Z}^d : \ |\xi| > \delta_\varepsilon$ выполнено неравенство

$$\sup_{x \in T^d} |\lambda_3(x, \xi) - b(x)\overline{\rho}^2(x)| < \varepsilon.$$

Отрезок $[a, b] = \bigcup\limits_{x \in T^d} b(x)\overline{\rho}^2(x)$ лежит на вещественной прямой $\mathbb{R}$ и не содержит нуля. Рассмотрим следующую комплексную окрестность O_ε отрезка $[a, b]$:

$$O_\varepsilon = \{\lambda \in \mathbb{C} : \min_{x \in T^d} |\lambda - [a, b]| < \varepsilon\}. \quad (23)$$

Для $h \in H$ рассмотрим уравнение

$$(A(x, D) - \lambda E)U(x) = h(x), \ x \in T^d. \quad (24)$$

Определим операторы

$$\tilde{R}^1_\lambda(x, D)h(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^d, |\xi| > \delta_0} (A(x, \xi) - \lambda I)^{-1}(I - Q(x, \xi, \lambda))(Fh)(\xi)e^{i(x, \xi)} \quad (25)$$

и

$$\tilde{R}^2_\lambda(x, D)h(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^d, |\xi| \leq \delta_0} (A(x, \xi) - \lambda I)^{-1}(I - Q(x, \xi, \lambda))(Fh)(\xi)e^{i(x, \xi)}, \quad (26)$$

где I – единичная матрица, элементы матрицы $Q(x,\xi,\lambda)$ – это некоторые элементы, возникающие при действии оператора $(A(x,D)-\lambda E)$ на матрицу $(A(x,\xi)-\lambda E)^{-1}e^{i(x,\xi)}$. Правый параметрикс к оператору $A(x,D)-\lambda E$ будем искать по формуле:

$$\tilde{R}_{\lambda,\gamma,\varepsilon}(x,D)=\begin{cases}\tilde{R}^1_\lambda(x,D)+\tilde{R}^2_\lambda(x,D), & |\lambda|\geq\gamma,\ \lambda\in S_\beta\\ \tilde{R}^1_\lambda(x,D)+\tilde{R}^2_\gamma(x,D), & |\lambda|<\gamma,\ \lambda\notin O_\varepsilon.\end{cases} \tag{27}$$

Отметим, что в равенстве (27) при $|\lambda|<\gamma$ оператор $\tilde{R}^2_\gamma(x,D)$ есть оператор $\tilde{R}^2_\lambda(x,D)$ при $\lambda=\gamma$. Матрица $(A(x,\xi)-\lambda I)^{-1}$ в (25), (26) является обратной к символу псевдодифференциального оператора $(A(x,D)-\lambda E)$, и при каждом $x\in T^d$ имеет собственные значения $\lambda_j(x,\xi)$, $j=1,2,3$ и точку накопления $\hat{\lambda}=b(x)\overline{\rho}^2(x)$. Собственные значения и спектральный параметр λ из окрестности точки накопления при каждом $x\in T^d$ исключаются в (27). Для этого в равенстве (27) выбираем число γ по формуле

$$\gamma=\max\{N_0+\varepsilon,\sqrt{N_1^2+N_2^2}\}, \tag{28}$$

где ε – число из (23), N_0,N_1,N_2 – числа из (21)[26]. В равенствах (25), (26) выбираем число $\delta_0=\delta_0(\gamma)$ достаточно большим. Структура матрицы $Q(x,\xi,\lambda)$ в (25), (26) выбрана так, чтобы при подстановке $R_{\lambda,\gamma,\varepsilon}(x,D)h(x)$ в равенство (24) вместо $U(x)$ получить сумму единичного оператора и компактного для случая $|\lambda|<\gamma$, $\lambda\in O_\varepsilon$, а в случае $|\lambda|\geq\gamma$, $\lambda\in S_\beta$, получить сумму единичного оператора и оператора с малой нормой. Делая эту подстановку при $|\lambda|\geq\gamma$, $\lambda\in S_\beta$, получим

$$(A(x,D)-\lambda E)\tilde{R}_{\lambda,\gamma,\varepsilon}(x,D)h(x)=\\ =(E+K_\gamma(x,D,\lambda))h(x)=h(x),\ |\lambda|\geq\gamma,\ \lambda\in S_\beta, \tag{29}$$

где $K_\gamma(x,D,\lambda):H\to H$ – некоторый оператор, для которого верна следующая теорема:

Теорема 1.5.1. *Пусть $\lambda\in S_\beta$. Существует $\lambda_0\in\mathbb{R}:\lambda_0>N_0+\varepsilon$, $\lambda_0>\sqrt{N_1^2+N_2^2}$ такое, что для любого $|\lambda|\geq\lambda_0$ выполнена оценка*

$$\|K_\gamma(x,D,\lambda)\|<1.$$

[26]Число γ выбирается по формуле (28) лишь на первом этапе. В дальнейшем мы будем увеличивать это значение.

Подставляя $\tilde{R}_{\lambda,\gamma,\varepsilon}(x,D)h(x)$ в уравнение (24) вместо $U(x)$ в случае $|\lambda| < \gamma$, $\lambda \notin O_\varepsilon$, получим

$$(A(x,D) - \lambda E)\tilde{R}_{\lambda,\gamma,\varepsilon}(x,D)h(x) = \\ = (E + T_{\gamma,\varepsilon}(x,D,\lambda))h(x) = h(x),\ |\lambda| < \gamma,\ \lambda \notin O_\varepsilon, \quad (30)$$

где $T_{\gamma,\varepsilon}(x,D,\lambda) : H \to H$ – оператор, для которого доказана следующая теорема:

Теорема 1.5.2. *Оператор $T_{\gamma,\varepsilon}(x,D,\lambda) : H \to H$ компактен при любом $\lambda \notin O_\varepsilon$, $|\lambda| < \gamma$.*

Определим сектор

$$S_1 = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda - \sqrt{2\gamma_0})| \leq \frac{3\pi}{4}\}, \quad (31)$$

где $\gamma_0 > \gamma$ – некоторое число. Из выбора числа γ_0 следует, что $S_1 \subset S_\beta$. Из теорем 1.5.1, 1.5.2 получен следующий результат.

Теорема 1.6.1. *Оператор $R_{\lambda,\varepsilon}(x,D)$, являющийся правым обратным к оператору $A(x,D) - \lambda E$, определен для всех $\lambda \in S_1$. Кроме того, при любом $\varepsilon > 0$ в области $(\mathbb{C} \backslash S_1)\backslash O_\varepsilon$ оператор $R_{\lambda,\varepsilon}(x,D)$ определен для всех λ, за исключением дискретного множества точек.*

Взяв вместо окрестности O_ε, определенной в (23), окрестность O_{ε_j} и устремляя ε_j к нулю, получим теорему:

Теорема 1.6.2. *Оператор $A(x,D) - \lambda E$ при всех $\lambda \in S_1$ имеет правый обратный $R_\lambda(x,D)$. Кроме того, при $\lambda \in (\mathbb{C}\backslash S_1)\backslash[a,b]$ правый обратный оператор $R_\lambda(x,D)$ определен всюду, за исключением дискретного множества точек.*

Для доказательства соотношения $\mathrm{Ker}(A(x,D) - \lambda E) = 0$ установлено, что $\mathrm{Im}(A^*(x,D) - \overline{\lambda}E) = J^*$, где $(A^*(x,D) - \overline{\lambda}E) : H^* \to J^*$ – оператор, сопряженный к $(A(x,D) - \lambda E) : J \to H$, а пространства H^*, J^* сопряжены соответственно пространствам H, J. Это делается в параграфе 7 с помощью конструкции, аналогичной конструкции, приведенной в параграфе 6. Объединяя результаты параграфов 6 и 7, получена основная теорема первой главы:

Теорема 1.8.1. *Спектр оператора $A(x,D)$ лежит в дополнении к сектору S_1, т.е. в $\mathbb{C} \setminus S_1$. Кроме того, в области $(\mathbb{C} \setminus S_1) \setminus [a,b]$ спектр* *состоит из собственных значений конечной кратности.*

Замечания 1.8.1. *Спектральные свойства оператора $A(x, D)$ при $\lambda \in [a, b]$ в случае переменных коэффициентов не изучены. Напомним, что в случае постоянных коэффициентов показано, что этот отрезок вырождается в точку, причем эта точка является точкой накопления собственных значений.*

Во **второй главе** диссертации доказывается оценка резольвенты оператора $A(x, D)$, элементы которого заданы в (10), (11), когда спектральный параметр лежит в некотором секторе, содержащемся в S_1.

В параграфе 1 главы 2 рассматривается оператор с постоянными коэффициентами $A(D)$, элементы которого определены в (10), (11) при постоянных функциях $\overline{\rho}(x)$ и $b(x)$, и для этого оператора доказывается следующая лемма:

Лемма 2.1.1. *Справедлива оценка*

$$\|(A(D) - \lambda E)^{-1}\| \leq \frac{m}{|\lambda - C_0|}, \quad \lambda \in S_\alpha,$$

где S_α определен в (19), $m > 0$ не зависит $\lambda \in S_\alpha$.

Из теоремы 1.3.1 и леммы 2.1.1 следует главный результат для оператора с постоянными коэффициентами $A(D)$, определенного на торе T^d.

Теорема 2.1.1. *Справедливы следующие утверждения:*

1. *Оператор $A(D)$ секториален, причем его спектр лежит в $\mathbb{C} \backslash S_\alpha$.*

2. *Спектр оператора $A(D)$ состоит из собственных значений конечной кратности и одной точки накопления $b\overline{\rho}^2$.*

Во втором параграфе главы 2 доказывается оценка нормы резольвенты оператора $A(x, D)$ с переменными коэффициентами, элементы которого задаются левой частью уравнений (10),(11). Для этого достаточно доказать оценку нормы правого обратного оператора $R_\lambda(x, D)$ к оператору $(A(x, D) - \lambda E)$, так как из результатов параграфа 8 главы 1 следует, что он является резольвентой.

Определим для малого $\zeta > 0$ сектор S_ζ следующим образом:

$$S_\zeta = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda - \sqrt{2\gamma_0})| \le \frac{3\pi}{4} - \zeta\}.$$

Теорема 2.2.1. *Существует число $F > 0$ такое, что для $\lambda \in S_\zeta$*

$$\|R_\lambda(x, D)\| \le \frac{F}{|\lambda - \sqrt{2\gamma_0}|}.$$

Из теорем 1.8.1 и 2.2.1 получен следующий основной результат о спектральных свойствах оператора $A(x, D)$.

Теорема 2.2.2. *Справедливы следующие утверждения:*

1. *Оператор $A(x, D)$ секториален, причем его спектр лежит в $\mathbb{C}\backslash S_\zeta$.*

2. *В области $(\mathbb{C}\backslash S_\zeta)\backslash[a, b]$ спектр оператора $A(x, D)$ состоит из собственных значений конечной кратности.*

Теорема 2.2.2 доказана для оператора $A(x, D)$, который получен линеаризацией модельных стационарных нелинейных уравнений вязкой сжимаемой жидкости и отбрасыванием членов низшего порядка.

В **третьей главе** доказывается аналогичная теорема для оператора, содержащего члены низшего порядка, а именно для оператора $B(x, D)$, который определяется левой частью уравнений (7), (8). Следующая теорема описывает главный результат работы.

Теорема 3.0.3. *Существует сектор S комплексной плоскости $\mathbb{C}$, такой, что для оператора $B(x, D)$, описываемого модельными стационарными линеаризованными уравнениями вязкой сжимаемой жидкости (7), (8), верны следующие утверждения:*

1. *Оператор $B(x, D)$ секториален, причем его спектр лежит в $\mathbb{C}\backslash S$.*

2. *В области $(\mathbb{C}\backslash S)\backslash[a, b]$ спектр оператора $B(x, D)$ состоит из собственных значений конечной кратности.*

Автор выражает благодарность научному руководителю – профессору, доктору физико-математических наук Андрею Владимировичу Фурсикову за постоянное внимание к работе и многочисленные обсуждения.

Список работ автора по теме диссертации.

[1] Прибыль М.А. Спектральный анализ линеаризованных стационарных уравнений вязкой сжимаемой жидкости//Матем. Сб. – 2007. – т. 198 № 10. – с. 119-140.

[2] Прибыль М.А. Спектральный анализ линеаризованных стационарных уравнений вязкой сжимаемой жидкости, заданных в $\mathbb{R}^3$ с периодическими краевыми условиями//Алгебра и анализ – 2008. – т. 20 № 2. – с. 149-177.

[3] Прибыль М.А. О спектре линеаризованных стационарных уравнений вязкой сжимаемой жидкости//Труды конф. «Ломоносов-2006». Подсекция «Математика». – Москва, 2006. – с. 67-68.

[4] Прибыль М.А. Секториальность оператора линеаризованных стационарных уравнений вязкой сжимаемой жидкости//Труды XXVIII конф. молод. ученых мех.-матем. факультета МГУ. – Москва, 2006. – с. 158-161.

[5] Прибыль М.А. Спектральные свойства оператора, описываемого линеаризованными стационарными уравнениями вязкой сжимаемой жидкости//Материалы Воронежской зимней матем. школы «Современные методы теории функций и смежные проблемы». – Воронеж, 2007. – с. 185-186.

[6] Прибыль М.А. Спектральные свойства оператора, описываемого линеаризованными стационарными уравнениями вязкой сжимаемой жидкости//Тезисы Школы-семинара «Нелинейный анализ и экстремальные задачи». – Иркутск. 2008, с. 52.

[7] Pribyl' M.A. Spectral properties of the linear steady-state equations for viscous compressible fluid//Int. conf. «Mathematical Hydrodynamics». – Moscow, 2006. – p. 61.

[8] Pribyl' M.A. Spectral properties of the linear steady-state equations for viscous compressible fluid: the three-dimensional case//International conference «Differential Equations and Related Topics», dedicated to I.G.Petrovskii. – Moscow, 2007. – p. 251.