

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В. Ломоносова  
Механико-математический факультет

На правах рукописи

Михалев Алексей Александрович  
Поведение механизмов с особенностями.

Специальность: 01.02.01 – Теоретическая механика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Москва 2008

Работа выполнена на кафедре теоретической механики и  
мехатроники механико-математического факультета  
МГУ им. М.В. Ломоносова.

- Научный руководитель:** доктор физико-математических наук,  
профессор В.А.Самсонов
- Официальные оппоненты:** доктор физико-математических наук, профессор,  
академик РАН В.Ф.Журавлев
- кандидат физико-математических наук,  
доцент В.В.Филиппов
- Ведущая организация:** Институт машиноведения им. А.А.Благонравова  
Российской академии наук

Защита состоится 14 ноября 2008 года в 16 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.22 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, Ленинские горы, Главное Здание МГУ, механико-математический факультет, ауд. 16-10.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ.

Автореферат разослан 14 октября 2008 года.

Ученый секретарь  
диссертационного совета,  
доцент

В.А.Прошкин

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** Существование механизмов с особыми положениями, в которых конфигурационное многообразие обладает самопересечением при некоторых - критических - значениях параметров связей, известно со времен П.Л.Чебышева. Проблема «особых положений» периодически затрагивается в работах по исследованию кинематики роботов, манипуляторов и машин, в области синтеза машин и механизмов, проектирования и построения механизмов с переменной структурой. Наибольшую актуальность она приобрела в последние десятилетия в связи с развитием ЭВМ и разработкой программ по параметрическому синтезу механизмов.

Аналитический подход к исследованию критических и близких к ним – околочитических – механизмов, основанный на понятиях и методах теоретической механики, проиллюстрировал В.А.Самсонов<sup>1</sup>. Настоящая диссертация продолжает начатые им исследования, расширяет полученные результаты и область их применения.

**Цель работы.** Диссертация посвящена описанию механизмов с особенностями связей, зависящих от параметров. Для околочитических механизмов исследованы три основные задачи:

1. перестройка конфигурационного многообразия;
2. наличие положений равновесия в окрестности особого положения и их бифуркация;
3. оценка реакций связей в окрестности особого положения.

---

<sup>1</sup> Самсонов В.А. Перестройка конфигурационного многообразия и критические системы. // М. ПММ, т.63. Вып.5, 1999, с770-774.

Также рассмотрены особенности задачи равновесия плоской кинематической цепи.

**Научная новизна.** Все основные результаты, полученные в работе, являются новыми, ранее неизвестными. Впервые описана типичная перестройка конфигурационного многообразия и бифуркация положений равновесия околоскритических механизмов с двумя и более степенями свободы, проведена оценка реакций связей в окрестности особого положения.

**Достоверность результатов.** Все результаты диссертационной работы строго обоснованы, они базируются на утверждениях теоретической механики.

**Используемые методы.** В работе используются методы аналитической механики, математического анализа, теории особенностей гладких функций, которые прилагаются к рассматриваемым механизмам.

**Теоретическая и практическая ценность.** Работа носит теоретический характер, полученные в ней результаты могут быть применены для параметрического синтеза и анализа механизмов, проектирования роботов, манипуляторов, механизмов с переменной структурой.

**Апробация работы.** Результаты, представленные в диссертации, докладывались автором и обсуждались на следующих научных семинарах и конференциях:

– Научная конференция Ломоносовские чтения МГУ им. М.В.Ломоносова, 2008 г.

– Совещание-семинар заведующих кафедрами теоретической механики Южного федерального округа, 2008 г.

– Заседание Президиума Научно-методического совета по теоретической механике Министерства образования РФ 22.05.2008.

– Научная конференция, посвященная 70-летию Института машиноведения им. А.А. Благонравова «Проблемы машиноведения», 2008г.

– Семинар по динамике относительного движения кафедры теоретической механики и мехатроники МГУ под руководством чл.-корр. РАН В.В.Белецкого, проф. Ю.Ф.Голубева, доц. К.Е.Якимовой, доц. Е.В.Мелкумовой, 2008 г.

**Публикации.** Основные результаты диссертационной работы изложены в четырех печатных работах, одна из которых опубликована в журнале, входящем в перечень ВАК. Список работ приведен в конце автореферата.

**Структура работы.** Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы из 64 наименований. Общий объем диссертации - 111 страниц.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** описана предметная область и цель настоящей диссертации, дан краткий обзор работ, связанных с исследованием и построением механизмов с особенностями связей, также приведено краткое содержание диссертации.

В **первой главе** дается постановка задачи. Рассматривается механическая система с наложенными на нее голономными стационарными идеальными связями, зависящими от параметров. Вводятся понятия особенностей первого и второго типов.

Под механизмами *с особенностью первого типа* понимаются механизмы, ранг матрицы Якоби системы связей которых уменьшается на единицу в одной или нескольких изолированных точках конфигурационного многообразия при определенном – критическом – значении одного из параметров связей. Осуществляется переход к «избыточным» обобщенным координатам  $q_1, \dots, q_{n+1}$ , в которых совокупность связей становится эквивалентной одному уравнению. С помощью леммы Морса и нормирования параметра  $l$  уравнение связи в обобщенных координатах приводится в некоторой окрестности особой точки к каноническому виду:

$$\varphi(\mathbf{q}, l) = q_1^2 + \dots + q_m^2 - q_{m+1}^2 \dots - q_{n+1}^2 - l = 0$$

Показано, что перестройка конфигурационного многообразия механизма в окрестности особой точки пространства обобщенных координат при прохождении параметром критического значения, представляющая с точки зрения теории машин и механизмов «переход» с одной сборки механизма на другую, топологически описывается перестройками Морса.

В связи с неопределенностью движения критической системы из состояния покоя в особом положении, проводится исследование возмущенных – околочитических – систем на наличие и характер положений равновесия. Показано, что особая точка является «притягивающей» положения равновесия околочитических систем.

**Утверждение:** Для консервативных околочитических механизмов с потенциальной энергией вида

$$P(\mathbf{q}) = P(q_1, \dots, q_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i q_i + O(\|\mathbf{q}\|^2), \text{ при } \|\mathbf{q}\| \rightarrow 0,$$

верно следующее: пусть  $A = a_1^2 + \dots + a_m^2 - a_{m+1}^2 \dots - a_{n+1}^2$ ,  $l$  – нормированный параметр связи, тогда:

а) В случае  $Al > 0$  в окрестности особой точки механизм имеет два симметричных положения равновесия, стягивающихся к особой точке при  $l \rightarrow 0$ .

б) В случае  $Al < 0$  в окрестности особой точки положений равновесия не существует.

Для дальнейшей оценки реакций связей и величины активных сил из уравнений Лагранжа первого рода и уравнений связей выводятся уравнения движения, не содержащие неопределенные множители Лагранжа.

Под механизмами с особенностью второго типа понимаются механизмы, множество виртуальных перемещений одной или нескольких точек которых является пустым. Описаны классы механизмов, удовлетворяющие данному определению. Показано, что механизмы с особенностью второго типа обладают «мертвыми» положениями - положениями равновесия, не зависящими от на-

правления действия силы, приложенной к одной из точек механизма.

**Вторая глава** посвящена описанию кинематики критических и околокритических механизмов в «избыточных» обобщенных координатах. В *первом разделе* исследованы механизмы с одной степенью свободы. Показано, что конфигурационное многообразие критического механизма в окрестности особой точки либо является совокупностью двух пересекающихся прямых, либо представляет собой одну особую точку. Описана «катастрофическая» перестройка конфигурационного многообразия околокритических механизмов. Показано, что все представители семейства плоских четырехзвенных кривошипных механизмов: кривошипно-кулисные, кривошипно-ползунные и шарнирно-четырёхзвенные кривошипные механизмы – обладают критическими значениями параметров связей. Описана перестройка конфигурационного многообразия в плоской задаче Брашмана. Для каждого из примеров проанализированы индивидуальные особенности перестройки множества положений.

Во *втором разделе* исследованы критические механизмы с двумя степенями свободы. Показано, что конфигурационное многообразие критического механизма в окрестности особой точки либо является круглым конусом, либо представляет из себя одну особую точку. В первом случае конфигурационные многообразия околокритических механизмов являются либо однополостными, либо двуполостными гиперболоидами. В качестве примера рассмотрен плоский пятизвенный кривошипно-ползунный механизм.

**Третья глава** посвящена исследованию механизмов с особенностями на наличие положений равновесия. В *первом разделе*, следуя В.А.Самсонову<sup>1</sup>, описана типичная бифуркация положений равновесия околоритических механизмов с одной степенью свободы. Применяя подход В.А.Самсонова, рассмотрены особенности бифуркации в случае вырождения потенциальной энергии ( $A = 0$ ). Показано существование механизмов, допускающих колебательные движения возле положения, не являющегося, вообще говоря, положением равновесия. Описана бифуркация положений равновесия кривошипно-кулисного механизма и в плоской задаче Брашмана.

Во *втором разделе* описана типичная бифуркация положений равновесия околоритических механизмов с двумя степенями свободы. Показано, что в зависимости от направления градиента потенциальной энергии бифуркация носит качественно разный характер. В первом случае бифуркация аналогична случаю с одной степенью свободы: симметричные положения равновесия – устойчивое и неустойчивое, принадлежащие локально несвязным подмножествам конфигурационного многообразия механизма, сливаясь, «исчезают» при прохождении параметром критического значения. Во втором случае оба существующих положения равновесия неустойчивы, принадлежат одному механизму, сливаясь, «исчезают» при прохождении параметром критического значения. Оба типа бифуркации проиллюстрированы на примере пятизвенного плоского кривошипно-ползунного механизма.

В *третьем разделе* описана типичная бифуркация положений равновесия околоритических механизмов с тремя и более степе-

нями свободы. Показаны ее варианты в зависимости от индекса  $p$  критической точки ( $p = n - m + 1$ ) и направления градиента потенциальной энергии.

В четвертом разделе рассмотрена задача определения «мертвых» положений кинематических цепей в случае, когда единственная активная сила приложена к одной из точек механизма. Показано, что существует конфигурация системы, которая является равновесной при любом направлении силы. При этом шарниры цепи образуют треугольник, в вершине которого находится точка приложения силы. Рассмотрена задача о нахождении положений равновесия волнового ветродвигателя С.Д.Стрекалова<sup>2</sup>.

**Четвертая глава** посвящена реакциям связей околокритических механизмов. Вводится непрерывная функция, зависящая от параметра, характеризующая близость механизма к особому положению. С помощью уравнений, полученных в первой главе, получены выражения для оценки множителей Лагранжа и реакций связей относительно этой функции. Для упрощения процедуры оценка выполняется в случае полного вырождения одной связи и распространяется на произвольный случай с помощью перехода к эквивалентной совокупности связей. Для дальнейшей геометрической интерпретации полученной оценки осуществлен переход к обобщенным координатам. Реакции связей  $R_i$  в «узловых» точках  $P_i$  механизма разделены на две составляющие  $R_i = R'_i + R''_i$ , где  $R'_i$  – реакции в отсутствии активных сил. Пока-

---

<sup>2</sup> Стрекалов С.Д. Волновая техника в сельском хозяйстве // Монография. Издательско-полиграфический комплекс ВГСХА Нива, Волгоград. 2007. 128 с.

зано, что первая из этих составляющих линейно зависит от нормальной кривизны конфигурационного многообразия вдоль траектории системы, квадратично – от обобщенной скорости, а вторая является линейной комбинацией активных сил. Получена оценка, из которой следует, что если обобщенная скорость постоянна, а нормальная кривизна конфигурационного многообразия вдоль траектории не равна нулю, то реакции связей неограниченно возрастают при приближении параметра к критическому значению, по крайней мере, в одном из узлов  $P_i$  механизма. Дан критерий для определения «узловых» точек механизма, удовлетворяющих полученной оценке. Описаны особенности перераспределения скоростей звеньев механизма.

Рассмотрена задача о поддержании стационарного режима работы плоского кривошипного механизма с одной степенью свободы. Показано, что в окрестности особой точки величина активной силы неограниченно возрастает (за исключением вырожденных случаев). Все полученные результаты проиллюстрированы на примерах кривошипных механизмов.

В **заключении** коротко сформулированы основные результаты работы:

1. Показано, что любой представитель семейства плоских четырехзвенных кривошипных механизмов обладает критическими значениями параметров связей, при которых его конфигурационное многообразие обладает самопересечением.
2. Показано, что конфигурационное многообразие околочитических механизмов с двумя и более степенями свободы в ок-

рестности особого положения является связным хотя бы в одной из полукрестностей критического значения параметра в отличие от механизмов с одной степенью свободы.

3. Описана типичная бифуркация положений равновесия около критических механизмов с двумя и более степенями свободы и ее особенности в механизмах с одной степенью свободы. Установлена связь типа бифуркации с индексом критической точки и с локальными свойствами потенциальной энергии.
4. Показано, что в случае, когда обобщенная скорость постоянна, а нормальная кривизна конфигурационного многообразия по направлению траектории не равна нулю, реакции связей неограниченно возрастают при приближении параметра к критическому значению как минимум в одном из узлов механизма. Показана возникающая в связи с этим сложность реализации определенных режимов работы около критических механизмов.
5. Рассмотрена задача о «мертвых» положениях плоских кинематических цепей, в случае, когда единственная активная сила приложена к одной из точек механизма. Показано, что существует конфигурация системы, которая является равновесной при любом направлении силы.

**По теме диссертации опубликованы следующие работы:**

1. Самсонов В.А., Михалев А.А. Перестройка пространства положений механической системы // Проблемы машиностроения и надежности машин. №4,2005 с. 13-17. (Samsonov V.A., Mikhalev A.A. Restructuring the position space of a mechanical system // Al-lerton Press. Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2005 №4 pp. 10-13)
2. Михалев А.А., Самсонов В.А. Особенности бифуркаций положений равновесия околоритических механизмов // Сборник докладов совещания-семинара заведующих кафедрами теоретической механики южного федерального округа. Новочеркасск, 22-25 апреля 2008г. с. 63-66.
3. Михалев А.А., Самсонов В.А. Особенности бифуркации положений равновесия околоритических систем // Тезисы докладов конференции Ломоносовские чтения. Секция механики. М: Изд-во Московского университета, 2008 с.130
4. Михалев А.А., Селюцкий Ю.Д. Особенности задачи равновесия плоских кинематических цепей. // Тезисы докладов конференции Ломоносовские чтения. Секция механики. М: Изд-во Московского университета, 2008 с.130