МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. Ломоносова

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Филонова (Тагирова) Василина Рифовна

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО РАЗРЫВА В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Специальность 01.02.05 – Механика жидкости, газа и плазмы

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2008

Работа выполнена на кафедре гидромеханики и кафедре газовой и волновой динамики механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова.

Научные руководители: доктор физико-математических наук, профессор Н.Н. Смирнов
доктор физико-математических наук, профессор А.Н. Голубятников

Официальные оппоненты: доктор технических наук, профессор М.В. Лурье
доктор физико-математических наук Г.Г. Цыпкин

Ведущая организация: Институт проблем нефти и газа РАН, г. Москва

Защита состоится 21 ноября 2008 г. в 15:00 часов на заседании диссертационного совета Д.501.001.89 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, г. Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, ауд. 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова.

Автореферат разослан ___ октября 2008 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д.501.001.89,
доктор физико-математических наук А.Н. Осипцов

1. Общая характеристика работы

Актуальность темы. Трещины, образованные в пористой среде под действием расклинивающего потока жидкости (гидравлические разрывы), встречаются во многих природных и техногенных процессах. Наиболее важным практическим применением решения задачи о распространении гидравлической трещины является гидроразрыв нефтесодержащих пород – технология, широко используемая в нефтяной и газовой промышленности для повышения продуктивности скважин.

Несмотря на активное изучение проблемы в течение последних 50-ти лет, задача о распространении трещины гидроразрыва остается актуальной, поскольку результат гидроразрыва пласта оказывается трудно предсказуемым на практике. В частности, определение всех размеров трещины в реальном времени непосредственно на месторождении является нерешенной задачей. Поэтому теоретическое и численное моделирование гидроразрыва необходимо для предсказания размеров трещины и характера ее распространения при известных параметрах пласта и условиях закачки жидкости. Моделирование трещины с простой геометрией позволяет прояснить зависимость макроскопических характеристик процесса от изменения определяющих параметров без излишних усложнений анализа, что дает возможность разработать эффективные алгоритмы управления распространением трещины.

Процесс гидравлического разрыва представляет собой совокупность нескольких задач. Помимо моделирования разрыва породы под напором жидкости, интерес вызывает также вопрос об оптимальной форме трещины, которую нужно создать для обеспечения наибольшей добычи углеводородов из недр пласта. Решение этой задачи может быть актуально при современном инженерном моделировании коллектора для сбора нефтесодержащей жидкости.

Цель работы

- В рамках гидравлического приближения и гипотезы плоских сечений исследовать распространение трещины гидроразрыва в пористой среде с учетом оттока жидкости через стенки трещины на основе закона Дарси и выявить качественные особенности процесса при изменении определяющих параметров задачи.
- Определить эволюцию ширины раскрытия и длины трещины, скорости жидкости внутри трещины и глубины просачивания жидкости гидроразрыва в окружающий пласт.
- Провести анализ автомодельных решений задачи и решений типа бегущей волны. Исследовать влияние изменения закона закачки жидкости в скважину со временем, вязкости и нелинейной реологии жидкости на поведение решений.
- Реализовать численное моделирование задачи и сравнить расчеты с полученными аналитическими решениями.
- Рассмотреть трехмерную оптимизационную задачу о форме коллектора для сбора нефтесодержащей жидкости из недр пласта.

Методика исследования. В работе применяются методы механики сплошной среды, обуславливающие гидравлическое приближение в постановке задачи, методы построения точных решений задачи и качественного анализа системы дифференциальных уравнений, содержащей нелинейное квазипараболическое уравнение. Также использован численный метод решения уравнений в частных производных второго порядка аппроксимации, основанный на схеме Кранка-Николсона.

В диссертации, как и во многих работах по этой теме, исследуется процесс распространения прямолинейной трещины гидроразрыва в бесконечном теле с фиксированными характеристиками пористой среды и постоянным горным давлением. Известно, что силами сцепления среды при росте развитой

трещины в пласте под напором жидкости можно пренебречь. Несмотря на то, что такой процесс соответствует раскрытию существующего разреза или фактически распространению полости, в литературе по гидроразрыву сохраняется термин “трещина”. В основе постановки задачи лежит одна из классических моделей (PKN[1]), в которой ширина раскрытия трещины много меньше ее высоты, а высота много меньше ее длины. В модели принята гипотеза плоских сечений для перпендикулярных линии роста трещины сечений, на ее основе зависимость между давлением жидкости и шириной трещины в силу свойств упругости скелета сводится к линейной функции.

Использовано локально одномерное описание оттока жидкости, обусловленное медленным изменением ширины трещины вдоль оси распространения трещины. На практике для моделирования утечек жидкости часто применяется формула Картера, которая, вообще говоря, является следствием закона Дарси при давлении жидкости в пористой среде, не зависящем от времени, в ней скорость оттока обратно пропорциональна корню из времени. В настоящей диссертации фильтрация жидкости описывается на основе уравнения движения в гидравлическом приближении та́к, что для течения линейно-вязкой жидкости имеет место закон Дарси. Также используется принятое в работе Ивашнева и Смирнова [2] пренебрежение сопротивлением менее вязкой жидкости, насыщающей пласт, по сравнению с сопротивлением более вязкой жидкости гидроразрыва в силу непрерывности давления на границе вытеснения. Это позволяет замкнуть задачу и ввести в рассмотрение вместо скорости оттока глубину просачивания жидкости в пористую среду.

---

[1] *Perkins T.K., Kern L.R.* Widths of hydraulic fractures // J. Pet. Tech., Trans. AIME. 1961. V. 222. P. 937-949.
Nordgren R.P. Propagation of vertical hydraulic fractures // J. Pet. Tech. 1972. V. 253. P. 306-314. – (SPE 3009).

[2] *Ивашнев О.Е., Смирнов Н.Н.* Формирование трещины гидроразрыва в пористой среде // Вестн. МГУ. Математика, механика. 2003. № 6. С. 28-36.

Научная новизна. В диссертационной работе расширена постановка, предложенная в статье Ивашнева и Смирнова, проведено исследование системы уравнений и получены новые решения. В частности:

- Показано, что система уравнений, описывающая распространение трещины, имеет автомодельные решения только степенного либо экспоненциального вида. Впервые исследованы решения типа бегущей волны.
- Предложено развитие данной постановки для жидкости гидроразрыва со степенной псевдопластической реологией и исследовано влияние нелинейной реологии жидкости на поведение решения.
- Расширен спектр граничных условий, а именно на входе в трещину задается расход либо давление жидкости, изменяющееся по степенному, экспоненциальному или кусочно-линейному закону от времени.
- Впервые для этой модели проведен анализ влияния закона закачки жидкости со временем на характер распространения трещины и ее размеры.
- Выявлена зависимость решения от изменения коэффициента вязкости ньютоновской жидкости.
- Замкнутая система с нелинейным квазипараболическим уравнением при заданном расходе жидкости содержит нелинейное граничное условие. В этом случае математическая постановка задачи обладает новизной.

В диссертации также отдельно поставлена и решена стационарная задача о форме полости для сбора вязкой жидкости, насыщающей пористую среду. В отличие от известных аналитических работ здесь рассмотрена трехмерная задача оптимизации формы коллектора, в частности, из класса сплюснутых эллипсоидов вращения.

Научная и практическая значимость. В диссертации предложена усовершенствованная математическая модель для исследования роста трещины гидроразрыва в пористой среде. Найдены классы решений, которые

могут быть использованы для моделирования более сложных задач, лежащих в основе численных расчетов при прогнозировании процессов гидроразрыва в реальном времени непосредственно на нефтяных месторождениях. Исследования позволяют качественно ответить на вопросы о влиянии вязкости или нелинейной реологии жидкости, а также утечек жидкости в пласт на процесс роста трещины гидроразрыва. Рассмотрено поведение характеристик трещины со временем в зависимости от закона закачки жидкости. Предложен способ управления закачкой жидкости для достижения максимальной длины трещины для заданного момента времени, что может обеспечить повышение добычи углеводородов из недр пласта. В трехмерной задаче о форме коллектора для сбора нефтесодержащей жидкости получены аналитические выражения для определения оптимальных размеров этой полости, что также может быть использовано в задачах нефтедобывающей промышленности.

Достоверность результатов обусловлена применением строгих подходов и методов механики сплошной среды, основанных на законах сохранения, использованием аналитических методов решения. Достоверность численных результатов основана на использовании апробированной разностной схемы для решения нелинейных квазипараболических уравнений, а также совпадением расчетов с аналитическими решениями.

Апробация работы. Основные результаты, полученные в диссертации, докладывались и обсуждались на научно-исследовательских семинарах механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова и математического института РАН имени В.А. Стеклова: кафедры газовой и волновой динамики (рук. академик РАН Е.И. Шемякин), по механике многофазных сред (рук. профессор Н.Н. Смирнов) и семинаре по механике сплошной среды (рук. академик РАН А.Г. Куликовский, проф. А.А. Бармин и проф. В.П. Карликов), на конференциях “Ломоносовские чтения” (Москва,

МГУ, 2006, 2007, 2008 гг.), на IX Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике (Нижний Новгород, 2006 г.), на конференции “Актуальные вопросы теплофизики и физической гидрогазодинамики” (Новосибирск, 2006 г.), на международной конференции по гидроразрыву “Hydraulic Fracture Summit VII” (США, 2007 г.), на конференции-конкурсе молодых ученых НИИ механики МГУ (Москва, 2007, 2008 гг.), на Всероссийской конференции “Современные проблемы механики сплошной среды”, посвященной 100-летию академика Л.И. Седова (Москва, 2007 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации представлены в тринадцати работах, в том числе в четырех статьях в журналах из перечня ВАК.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения и списка литературы. В работе содержится 26 фигур, 5 таблиц и 163 библиографические ссылки. Общий объем работы 147 страниц.

2. Содержание работы

Введение

Во введения изложены общие положения применяемых моделей и цели диссертационной работы, указана новизна и возможная прикладная значимость результатов исследования, представлена структура диссертации и перечислены основные исследуемые вопросы.

В первой главе приведен обзор литературы. Четыре следующие главы посвящены распространению трещины гидроразрыва в пористой среде, а последняя – задаче об оптимальной стационарной форме полости для сбора вязкой жидкости, насыщающей породу.

Первая глава

В первой главе представлена история вопроса гидравлического разрыва среды, тема раскрывается с точки зрения как теоретического и численного

моделирования, так и экспериментальных работ. Обоснована актуальность проблемы, формулируются отличия постановок задач, рассмотренных в диссертации, от основных предшествующих исследований.

Вторая глава

Во второй главе формулируется математическая модель роста вертикальной трещины гидроразрыва в пласте, которая образуется под напором ньютоновской (линейно-вязкой) жидкости. Прямолинейная трещина распространяется в направлении оси *Ox* в бесконечной пористой среде (рис. 1). В **разделе 2.1** перечисляется ряд допущений, обосновывающих приближения модели:

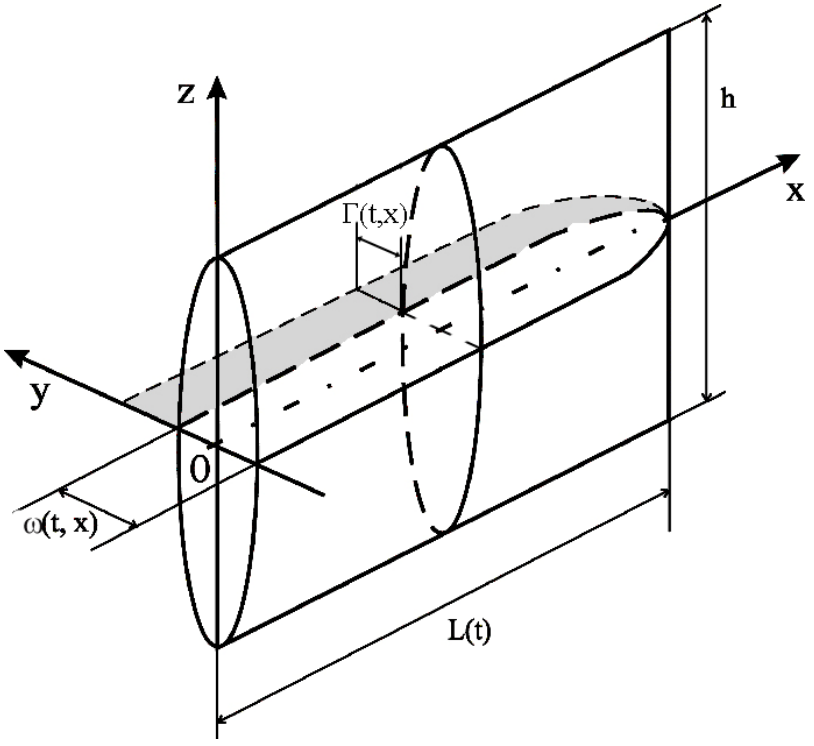


Рис. 1 Схема трещины гидравлического разрыва.

I. Предполагается, что ширина трещины много меньше ее высоты, а высота много меньше длины трещины: $\omega << h << L$. Тогда вдали от конца трещины ширина ее раскрытия – медленно меняющаяся функция, $\omega_x << 1$.

Это позволяет принять гипотезу плоских сечений, согласно которой напряженные состояния двух сечений, перпендикулярных линии распространения трещины, независимы. Окружающую трещину породу считаем в каждом поперечном сечении линейно-упругой и пористой средой. Давление жидкости отсчитывается от фиксированной величины горного давления. Согласно PKN-модели связь между избыточным давлением жидкости $P(t,x)$ и осредненной по поперечному сечению шириной трещины $\omega(t,x)$ в каждом сечении линейная. Коэффициент пропорциональности b может быть найден, например, из решения классической плоской задачи упругости для эллиптической полости, находящейся под внутренним давлением P:

$$P = b\omega, \qquad b = \frac{4\mu_\sigma}{\pi(1-\nu_\sigma)h} \tag{1}$$

где ν_σ – коэффициент Пуассона, μ_σ – модуль сдвига материала.

II. Окружающий пласт изначально пропитан нефтесодержащей жидкостью, коэффициент вязкости которой пренебрежимо мал по сравнению с коэффициентом вязкости жидкости гидроразрыва. Жидкости несжимаемы, массовыми силами и инерционностью их течения пренебрегаем. Движение жидкостей в проницаемой пористой среде описывается законом Дарси. Пренебрегая сопротивлением менее вязкой жидкости по сравнению с сопротивлением более вязкой из условия непрерывности давления получаем, что на границе вытеснения избыточное давления фильтрующейся жидкости гидроразрыва равно нулю.

III. Вблизи боковой поверхности трещины предполагаем локально одномерное по y приближение фильтрации жидкости. Течение несжимаемой жидкости в пористой среде описывается законом Дарси:

$$\frac{\partial P_r}{\partial y} = -\frac{\mu}{k}\mathrm{v}, \qquad \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y} = 0 \tag{2}$$

где $\mathrm{v} = \mathrm{v}(t,x)$ – истинная относительная скорость движения жидкости в пористой среде; $P_r = P_r(t,x,y)$ – избыточное давление жидкости в пористой среде; k – коэффициент проницаемости породы, деленный на ее пористость; μ – динамическая вязкость жидкости.

Скорость просачивания жидкости гидроразрыва в пористой среде определим как $\mathrm{v}(t,x) = \partial\Gamma / \partial t$, где $\Gamma = \Gamma(t,x)$ – глубина просачивания жидкости в породу, отсчитываемая от берега трещины. Тогда на границе раздела жидкостей в силу приближения II верно $P_r\left(t,x,\Gamma + \omega/2\right) = 0.$ На берегу трещины выполняется равенство давлений $P_r\left(t,x,\omega/2\right) = P\left(t,x\right).$ Интегрируя (2) по области просачивания $\omega/2 \le y \le \Gamma + \omega/2$ и подставляя граничные условия, получим

$$\mathrm{v}\,\Gamma = kP/\mu \tag{3}$$

Поскольку ω_x и v_x малы, то при конечных значениях Γ получаем, что глубина просачивания – медленно меняющаяся функция, $\Gamma_x << 1.$ Таким образом, для фильтрации жидкости в окружающую проницаемую среду также справедлива гипотеза плоских сечений.

При описании течения внутри трещины используется гидравлическое приближение для движения вязкой жидкости в узком канале. Закон сохранения массы и уравнение движения принимают вид:

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + \frac{\partial\omega u}{\partial x} + 2\,\mathrm{v} = 0\,, \qquad u = -\frac{\omega^2}{12\,\mu}\frac{\partial P}{\partial x} \tag{4}$$

где $u = u(t,x)$ – продольная осредненная по ширине скорость жидкости внутри трещины.

Исключая P с помощью (1) и выражая v через Γ_t в уравнениях (3) и (4), получим основную систему уравнений квазипараболического типа для определения ширины ω, скорости u, глубины просачивания Γ и длины

трещины L. Длина находится из граничных условий, некоторые из которых заданы в нелинейном виде.

В **разделе 2.2** вводятся характерные масштабы длины $L^* = \sqrt{12k}$ и времени $t^* = \mu\sqrt{12}/\left(b\sqrt{k}\right)$, на практике очень малые. Поэтому для учета реальных размеров задачи необходимо ввести коэффициент растяжения $1/\varepsilon$, входящий сомножителем $1/\sqrt{\varepsilon}$ для t, ω, u, Γ и сомножителем $1/\varepsilon$ для x, L; обычно $\varepsilon \sim 10^{-8}$. Тогда основная система уравнений в безразмерном виде дает

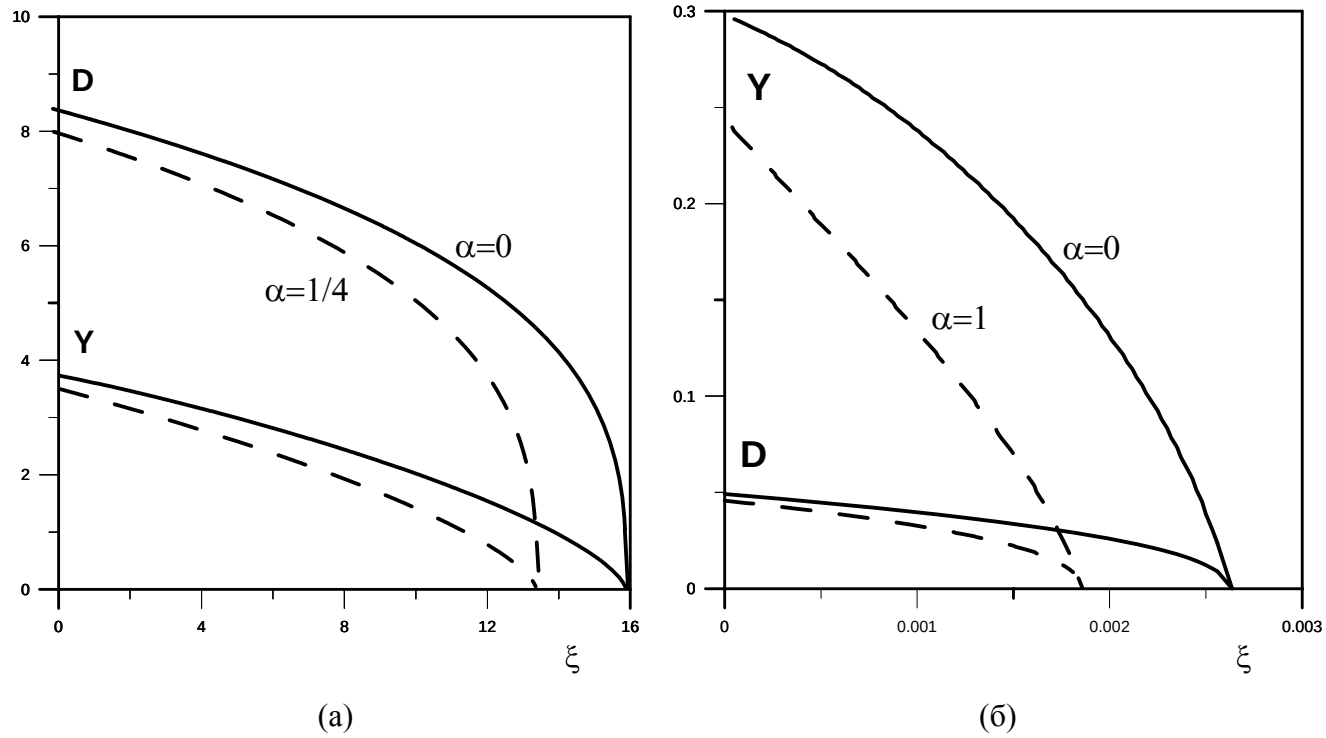
$$\left(\omega + 2\Gamma\right)_t - \left(\omega^3 \omega_x\right)_x = 0, \qquad \Gamma\,\Gamma_t = \omega, \qquad u = -\omega^2 \omega_x \tag{5}$$

В конце трещины $x = L(t)$ ширина трещины ω, глубина просачивания Γ и относительный расход жидкости $(\Gamma + \omega/2)(u - L_t)$ полагаются нулевыми. В качестве граничного условия в начале трещины $x = 0$ задан либо объемный расход в единицу времени, либо давление жидкости.

Показано, что в области решения задачи существуют различные режимы просачивания в зависимости от порядка отношения ω/Γ. В предельных режимах малого или большого просачивания в уравнении баланса масс (5) можно пренебречь одним из первых двух слагаемых. Как показывает решение полной системы уравнений типа бегущей волны (**разделы 2.5, 3.6**) малое просачивание реализуется всегда вблизи конца трещины, а также всюду при малых t, большое просачивание – вблизи начала трещины при больших t. На преобладание того или иного режима пропитки также влияет коэффициент интенсивности закачки жидкости в трещину Q_0 или P_0 (см. рис. 2 и гл. IV).

В **разделе 2.3** показано, что система (5) в общем случае может иметь автомодельные решения только степенного вида, а в предельных режимах просачивания еще и экспоненциального вида. Автомодельные решения строятся в **разделе 2.4**. При этом граничное условие на входе в трещину задается как функция, пропорциональная t^α либо $e^{\alpha t}$, где α – параметр

задачи, характеризующий изменение закона закачки жидкости в трещину со временем. В предельных режимах просачивания получены автомодельные решения при различных условиях закачки жидкости в трещину (рис. 2). **Раздел 2.5** посвящен построению решений типа бегущей волны.



(а) (б)

Рис. 2. Зависимость автомодельной ширины трещины $D = \omega / t^n$ и глубины просачивания $Y = \Gamma / t^s$ от автомодельной координаты $\xi = x / t^m$ при заданном расходе в начале трещины $Q = Q_0 t^\alpha$ в случае малого (а) и большого (б) просачивания жидкости в пласт, (а) – $n = (2\alpha + 1)/5$, $s = (\alpha + 3)/5$, $m = (3\alpha + 4)/5$, $Q_0 = 100$; (б) – $n = (4\alpha + 1)/9$, $s = (2\alpha + 5)/9$, $m = (7\alpha + 4)/9$, $Q_0 = 10^{-3}$. Здесь проведена экстраполяция случая (б) на всю трещину.

Третья глава

В третьей главе рассмотрено расширение постановки задачи, описанной в главе II: исследуется распространение трещины гидроразрыва под напором неньютоновской жидкости псевдопластического типа со степенной реологией. Здесь рассмотрено влияние реологии жидкости гидроразрыва на изменение качественной картины поведения безразмерных решений.

В задаче, сформулированной в **разделе 3.1**, используется модель неньютоновской псевдопластической жидкости, в которой компоненты

тензора вязких напряжений τ_{ij} связаны с компонентами тензора скоростей деформаций e_{ij}, $\tau_{ij} = \mu_a e_{ij}$, так, что эффективный коэффициент вязкости μ_a зависит от второго инварианта тензора скоростей деформаций по степенному закону

$$\mu_a = M\left(\sqrt{\frac{I_2}{2}}\right)^{\beta-1}, \qquad I_2 = e_{ij}e^{ij}$$

При этом эффективный коэффициент вязкости μ_a убывает с ростом скорости сдвига (псевдопластичность): $0 < \beta < 1$, β – безразмерный показатель степени в реологическом соотношении, $M = const$. Для ньютоновской жидкости $M = \mu$, $\beta = 1$.

Для описания течения жидкости в пористой среде за основу берется гидравлическое приближение уравнения движения неньютоновской жидкости в узкой щели, осредненное по ширине щели. Полагая квадрат характерной ширины трещинок в породе пропорциональным проницаемости пористой среды, описываем процесс фильтрации уравнением, которое для ньютоновской жидкости имеет вид закона Дарси. Иными словами, считаем, что величина скорости оттока $\mathrm{v}(t,x)$ в размерном виде удовлетворяет уравнению:

$$\mathrm{v}^{\beta} = -\frac{(12k)^{(\beta+1)/2}}{M'}\frac{\partial P_r}{\partial y}, \qquad M' = \phi M, \qquad \phi = (2\beta+1)^{\beta}\, 2^{\beta+1}/\beta^{\beta}$$

Здесь $k = \kappa / m_r^{\,2\beta/(1+\beta)}$, κ – проницаемость породы, m_r – ее пористость.

В **разделе 3.2** основная система уравнений приводится к безразмерному виду:

$$\left(\omega + 2\Gamma\right)_t + \left(\omega^{2+1/\beta}\left(-\omega_x\right)^{1/\beta}\right)_x = 0, \qquad \Gamma\Gamma_t^{\,\beta} = \omega, \quad u = \omega^{1+1/\beta}\left(-\omega_x\right)^{1/\beta} \qquad (6)$$

Параметр β участвует в процессе обезразмеривания; изменение размерных решений при этом исследовано в главе IV.

Постановка задачи допускает существование различных классов решений: автомодельных и типа бегущей волны – при граничных условиях, аналогичных задаче для ньютоновской жидкости. Автомодельное решение задачи в общем случае $(\omega/\Gamma \sim 1)$ существует, когда на входе в трещину задан либо расход жидкости, пропорциональный t^2, либо давление жидкости, пропорциональное *t*.

В **разделе 3.3** построено полное автомодельное решение и рассмотрено влияние степени β на изменение основных характеристик роста трещины в безразмерных переменных. В частности, показано, что при одинаковом расходе жидкости в начале трещины $Q = Q_0 t^2$ при $Q_0 = 1$ скорость неньютоновской жидкости вдоль трещины $(\beta < 1)$ больше скорости жидкости с линейной реологией ($\beta = 1$), рис. 3, что обуславливает и бóльшую скорость распространения трещины.

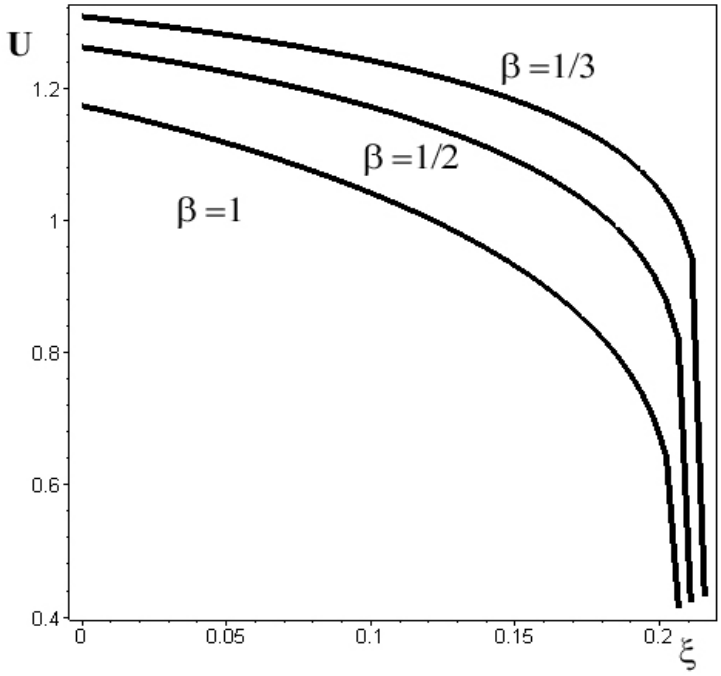


Рис. 3. Зависимость автомодельной скорости жидкости $U = u/t$ от продольной координаты $\xi = x/t^2$ при $\beta = 1; 1/2; 1/3$ и заданном расходе жидкости на входе в трещину $Q(t) = t^2$.

В **разделе 3.4** в предельных режимах просачивания аналитически показано, что семейство решений экспоненциального вида является предельным случаем для семейства автомодельных решений степенного вида при $\alpha \to \infty$.

В **разделе 3.5** рассмотрено приближение задачи при малых степенях β, т. е. когда вязкие напряжения в жидкости при течении с простым сдвигом близки к постоянным. Это позволяет получить общее аналитическое решение

задачи, когда граничное условие на входе в трещину задано как произвольная функция от времени. Показано, что в точном решении $\beta = 0$ ширина трещины ω и глубина просачивания Γ совпадают и равны $\sqrt{2(L(t)-x)}$, а $u = 3dL/dt$. При этом длина трещины $L(t)$ аналитически определяется из краевого условия в начале трещины, заданного как произвольная функция от времени.

Линейная зависимость ширины трещины от глубины просачивания при $\beta \to 0$ также видна на примере решений, полученных в **разделе 3.6**, где построено точное решение в виде бегущей волны для любого β. Асимптотическое приближение этого решения вблизи конца трещины при $\zeta = \Pi t - x \to 0+$, где Π – безразмерная скорость волны, характеризующая скорость движения конца трещины, следующее:

$$\omega \approx \left((2+\beta)\Pi^{\beta}\zeta\right)^{1/(2+\beta)}, \quad \Gamma \approx \frac{\left((2+\beta)\zeta\right)^{(1+\beta)/(2+\beta)}}{\Pi^{\beta/(2+\beta)}(1+\beta)^{\beta/(1+\beta)}}, \qquad u \approx \Pi$$

Четвертая глава

В четвертой главе построены асимптотические приближения степенного вида для решений задачи гидроразрыва (5) или (6) в окрестности конца трещины. Конец трещины здесь рассматривается в рамках гидравлического приближения и определяется граничными условиями задачи. Асимптотическое рассмотрение позволяет получить приближенные аналитические выражения для основных характеристик распространения трещины в зависимости от времени и показателя изменения закона закачки со временем α, если формально удовлетворить условию при $x = 0$ (**раздел 4.1**). Например, если на входе в трещину задан расход ньютоновской жидкости $Q = Q_0 t^{\alpha}$, то профиль и длина трещины ведут себя как

$$\omega(t,x) = \left(81\frac{3\alpha+4}{5}\right)^{1/15} Q_0^{1/5} t^{(3\alpha-1)/15}\left(L(t)-x\right)^{1/3}, \quad L(t) = \frac{1}{3^{1/5}}\left(\frac{5}{3\alpha+4}\right)^{4/5} Q_0^{3/5} t^{(3\alpha+4)/5} \qquad (7)$$

Аналогично можно получить асимптотику решения при заданном давлении на входе в трещину $P = P_0 t^{\alpha}$. Порядок коэффициентов Q_0 или P_0 характеризует интенсивность закачки жидкости и также определяет порядок отношения ω/Γ при фиксированных t, x.

В **разделе 4.2** специально исследована зависимость длины трещины от времени и показателя изменения закона закачки α . Анализ асимптотического приближения длины трещины (7) показывает, что увеличение скорости закачки жидкости в трещину со временем позволяет получить максимальную длину трещины для заданного момента времени. Математически это означает выбор наибольшего возможного значения параметра α .

В **разделе 4.3** проведено качественное исследование монотонности искомых функций со временем в зависимости от показателя изменения закачки α с тем, чтобы выявить интервалы допустимых значений параметра α. В таблице указано поведение функций со временем в различных интервалах изменения параметра α в случае малого просачивания, если на входе в трещину задан расход жидкости *Q(t)* либо давление *P(t)*, пропорциональные t^{α}. Предполагается, что физический смысл имеют значения α , при которых длина трещины растет со временем. Условие конечности объема, подаваемого в трещину, также ограничивает изменение параметра снизу $\alpha > -1$ (если задан расход жидкости) или $\alpha > -1/5$ (если задано давление жидкости).

Таблица

Q	$-1 < \alpha < -1/2$	$-1/2 < \alpha < 1/3$	$\alpha > 1/3$
P	$-1/5 < \alpha < 0$	$0 < \alpha < 1/3$	$\alpha > 1/3$
	ω, u убывают, L, Γ возрастают со временем	u возрастает, L, Γ, ω убывают со временем	L, ω, Γ, u возрастают со временем

В **разделе 4.4** по аналогии с разд. 4.1 приведено асимптотическое приближение задачи гидроразрыва для неньютоновской жидкости (6). В

разделе 4.5 на основе полученных асимптотик проводится анализ зависимости размерного решения от совокупности параметров задачи (α, β, Q_0 либо P_0) и переменных x, t на примере конкретных значений: $Q_0 = 1$, $\alpha = 2$ либо $P_0 = 1$, $\alpha = 1$.

В **разделе 4.6** изучено влияние коэффициента вязкости жидкости на изменение длины трещины на примере ньютоновской жидкости. Показано, что при одинаковом законе заданного давления жидкости меньшая вязкость обеспечивает бóльшую длину трещины. Если на входе в трещину задан расход жидкости, то в режиме малого просачивания жидкости в пласт будет аналогичная зависимость, а при большом просачивании – меньшая вязкость дает меньшую длину трещины, что объясняется увеличением оттока жидкости в окружающую породу.

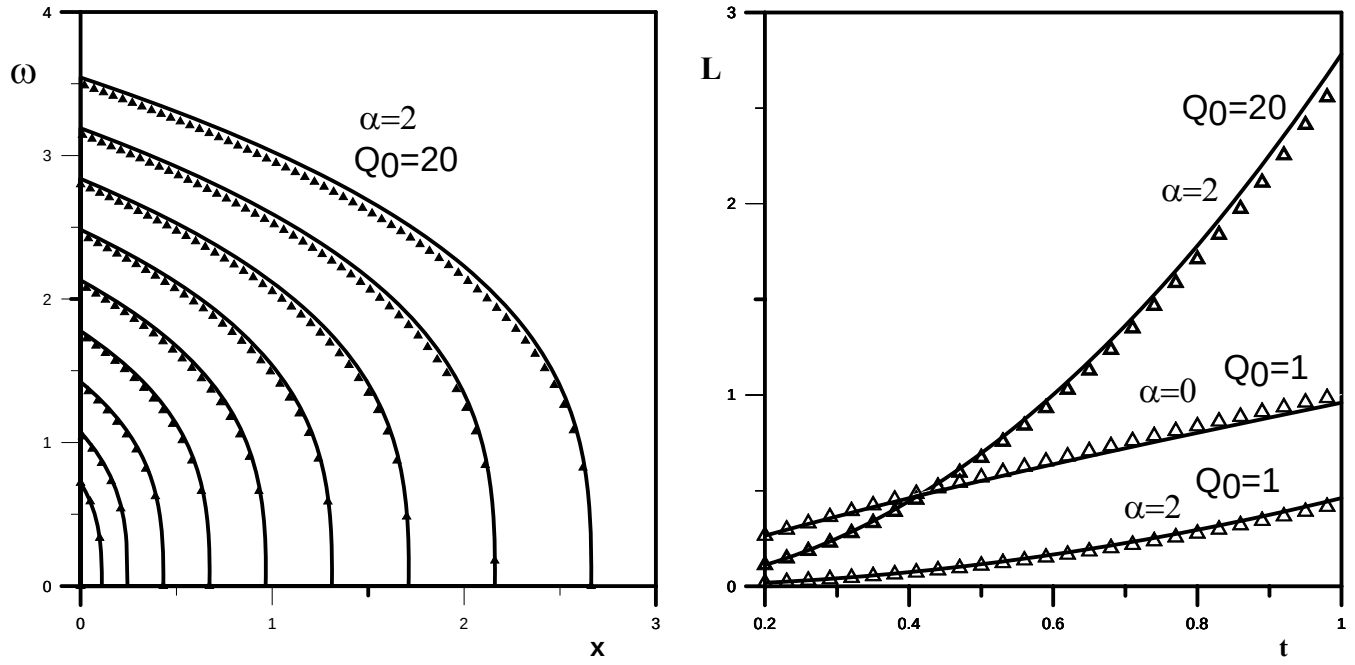
Пятая глава

Пятая глава посвящена численному моделированию задачи гидроразрыва в пористой среде на примере ньютоновской жидкости. Предложен метод численной реализации решения полной системы с нелинейным квазипараболическим уравнением (5) на основе схемы второго порядка аппроксимации Кранка-Николсона.

В **разделе 5.1** описаны разностные схемы, в **разделе 5.2** приведен метод численного определения длины трещины. При построении численного решения используется асимптотическое приближение задачи вблизи конца трещины (разд. 4.1).

В **разделе 5.3** рассматривается сравнение расчетов с автомодельными решениями и асимптотическими приближениями на протяжении всей трещины. В частности, проведенные сравнения позволяют заключить, что формальные асимптотические приближения решений (7) для малого

просачивания жидкости в породу хорошо аппроксимируют численные решения задачи вдоль всей длины трещины (рис. 4).



(а) (б)

Рис. 4. Зависимость ширины трещины ω от продольной координаты x при $t \in [0.2;1]$ (а) и длины трещины L от времени t (б) для режима малого просачивания при различном заданном расходе в начале трещины $Q = Q_0 t^{\alpha}$. Точки – численное решение, сплошные кривые – асимптотическое приближение из формулы (7).

Чтобы выявить роль автомодельного режима распространения трещины, в главе V строятся решения задачи при кусочно-линейном граничном условии на входе в трещину, например, когда расход жидкости задан, как $Q = 10t/7$ при $0 < t < 0.7$ и $Q = 1$ при $t \geq 0.7$, и рассмотрена область решения для режима малой пропитки. Расчеты показывают, что при истечении некоторого времени t профиль трещины будет соответствовать такому автомодельному решению задачи, как если бы в нем сразу задавалось граничное условие $Q = 1$, однако достигнет этого автомодельного профиля за бóльшее время $t > t'$. На рис. 5 численное решение в момент времени $t = 1$ согласуется с автомодельным решением при $t' = 0.65$.

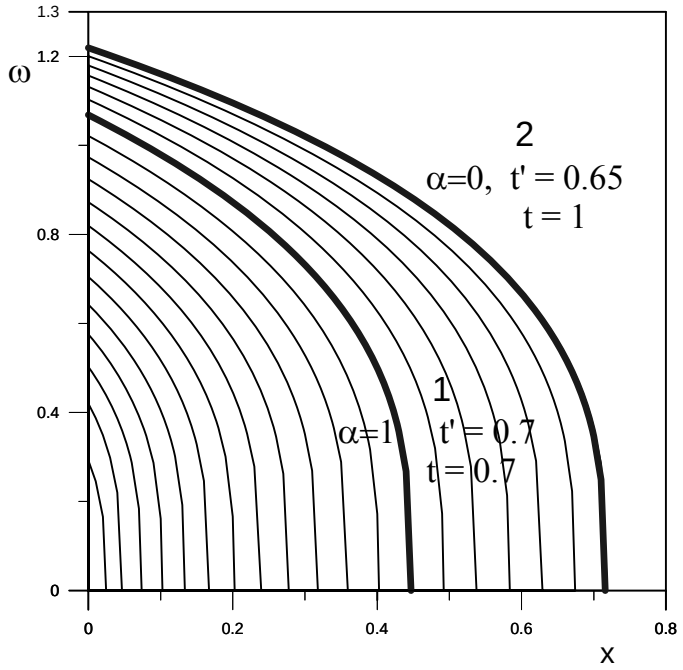


Рис. 5. Зависимость ширины трещины ω от продольной координаты x, когда на входе в трещину задан расход жидкости по кусочно-линейному закону времени, кривые $1, 2$ соответствуют автомодельным решениям. Время t – параметр, t' – время в автомодельных решениях.

Иными словами, решение задачи “забывает” начальное условие и “выходит” на автомодельный режим.

В **разделе 5.4** приведена разностная схема для задачи о росте трещины под напором неньютоновской жидкости.

Шестая глава

Шестая глава выделяется из предыдущей части работы, поскольку в ней рассмотрена стационарная задача, не связанная с ростом развитой трещины, однако эта проблема имеет отношение к моделированию конечного этапа процесса откачки жидкости из пористой среды. В ней ставится вопрос об отыскании необходимой оптимальной формы трещины (коллектора) фиксированного объема для сбора нефтесодержащей жидкости из окружающего пласта. Форма этой полости выбирается из класса сплюснутых эллипсоидов вращения (дискообразная трещина), это упрощение достаточно для качественного исследования задачи и получения конкретных результатов.

Фильтрация жидкости в бесконечной пористой среде описывается законом Дарси.

В **разделе 6.1** найдено, что оптимальной формой коллектора из класса сплюснутых эллипсоидов вращения фиксированного объема W является эллипсоид предельно малой толщины и большого радиуса. Максимальный расход жидкости, зависящий от толщины трещины $2R$ и от некоторого постоянного давления внутри трещины P_c при малых R/R_0 приблизительно равен

$$Q(R,P_c)\approx 8\left(P_\infty - P_c\right)R_0\,\frac{\kappa}{\mu}\sqrt{\frac{R_0}{R}}\,,\qquad R_0=\left(\frac{3W}{4\pi}\right)^{1/3}$$

где P_∞ – известное давление жидкости на бесконечности, κ – проницаемость породы, μ – динамическая вязкость жидкости.

В **разделе 6.2** в гидравлическом приближении рассматривается выкачивание жидкости из такой полости в скважину радиуса ρ_0, расположенную в центре коллектора, для учета сопротивления движению жидкости. Это позволяет, определив P_c как среднее давление, выразить расход жидкости Q только через варьируемый размер полости R. Максимальный расход выкачиваемой жидкости находится аналитически при заданных объеме полости и перепаде давления $P_\infty - P_{\rho_0}$, где P_{ρ_0} – давление в скважине, как

$$Q\left(R\right)=\frac{8\pi\kappa\left(P_\infty - P_{\rho_0}\right)}{\mu}R_0^{\,3/2}R^3\left[\pi R^{7/2}+6\kappa R_0^{\,3/2}\left(\ln\left(\frac{R_0}{\rho_0}\sqrt{\frac{R_0}{R}}\right)-\frac{1}{2}\right)\right]^{-1}$$

где оптимальные толщина $2R$ и радиус трещины L определяются из соотношений

$$R^{7/2}=\frac{12\kappa}{\pi}R_0^{\,3/2}\left(3\ln\frac{R_0^{\,3/2}}{\rho_0\sqrt{R}}-1\right),\qquad L=\frac{R_0^{\,3/2}}{\sqrt{R}}$$

В **Заключении** к диссертации подведены итоги работы и сформулированы основные результаты.

3. Основные результаты и выводы

- В рамках PKN-модели выведена система уравнений, описывающая распространение развитой трещины гидроразрыва в пористой среде под действием закачки псевдопластической жидкости со степенной реологией. На входе в трещину задается либо объемный расход жидкости либо давление.
- Аналитически и качественно с последующей численной реализацией исследованы классы инвариантно-групповых решений: бегущие волны и автомодельные решения. Уже решение бегущей волны в ньютоновской жидкости, которое реализуется при подходящем способе закачки жидкости, показывает, что в области решения могут существовать как режимы с большим раскрытием трещины и малой пропиткой, так и, наоборот, с большой пропиткой и малым раскрытием. Первый случай реализуется всюду при малых временах развития процесса и всегда вблизи переднего конца трещины. Второй – при больших временах в окрестности начала трещины. На преобладание того или иного режима просачивания также влияет коэффициент интенсивности закачки жидкости в трещину. Для рассматриваемых режимов выписаны упрощенные предельные системы уравнений.
- Эти упрощенные уравнения допускают более широкую группу растяжений, что позволяет построить и исследовать новые дополнительные классы автомодельных решений: степенного и экспоненциального вида.
- В пределе, когда компоненты тензора вязких напряжений в жидкости являются однородными функциями нулевой степени от компонент

тензора скоростей деформаций (для течений с простым сдвигом постоянны), дано полное решение задачи с произвольными условиями закачки, что позволяет построить и исследовать приближенные решения для класса псевдопластических жидкостей с малым показателем степени в реологическом соотношении.

- Специально исследовано поведение решений степенного типа вблизи конца трещины. Формально полученные выражения могут быть продолжены до начала трещины и согласованы с краевыми условиями закачки. Это позволяет получить простые инженерные формулы, описывающие весь процесс при условии обоснования такого или близкого поведения решений, во всяком случае, при малом просачивании.
- В случае ньютоновской вязкой жидкости развит численный метод, основанный на схеме Кранка-Николсона, который позволяет провести полное решение задачи при произвольных условиях закачки.
- Дано решение задачи с кусочно-линейным распределением по времени краевого условия. Показано, что со временем решение “забывает” о начальных деталях граничного условия и “выходит” на автомодельный режим.
- Найденные классы решений позволяют анализировать влияние различных параметров задачи (напр., показателя изменения закона закачки со временем, показателя реологии жидкости или коэффициента вязкости жидкости) на поведение решения. В частности:

  Решена задача оптимального управления степенным расходом или давлением жидкости в скважине для достижения максимальной длины за заданное время.

  Выявлено также, что использование неньютоновской жидкости гидроразрыва может увеличить скорость распространения трещины.

При использовании ньютоновской жидкости можно увеличить длину трещины, уменьшая коэффициент вязкости нагнетаемой жидкости, если на входе в трещину задается давление жидкости с фиксированной зависимостью от времени. А при одинаковом управлении расходом жидкости в режиме большого просачивания, наоборот, трещина может стать длиннее при использовании более вязкой жидкости гидроразрыва.

- В заключительной части работы в результате решения задачи Дарси получены соотношения для определения оптимальной формы коллектора из класса сплюснутых эллипсоидов вращения при заданных объеме и внутреннем давлении. Это будет эллипсоид предельно малой толщины и большого радиуса.
- При учете сопротивления выкачиванию вязкой жидкости в скважину, расположенную в центре осесимметричного коллектора малой толщины, найдены конечные размеры оптимальной полости. Решение этой задачи позволяет определить оптимальные характеристики радиальной трещины гидравлического разрыва, обеспечивающие максимальный расход жидкости при заданных объеме трещины и перепаде давления между входом в трещину и пластом.

Публикации по теме диссертации

1. *Смирнов Н.Н., Тагирова В.Р.* Автомодельные решения задачи о формировании трещины гидроразрыва в пористой среде // Изв. РАН. МЖГ, 2007, №1. С. 70-82.
2. *Смирнов Н.Н., Тагирова В.Р.* Анализ степенных автомодельных решений задачи о формировании трещины гидроразрыва // Вестн. МГУ. Математика. Механика, 2007, №1. С. 48-54.
3. *Смирнов Н.Н., Тагирова В.Р.* Задача о распространении трещины газового разрыва в пористой среде // Изв. РАН. МЖГ, 2008, №3. С.77-93.

4. *Голубятников А.Н., Смирнов Н.Н., Тагирова В.Р*. Об оптимальной форме полости для сбора вязкой жидкости, насыщающей грунт // Изв. РАН. МЖГ, 2008, №5. С. 113-119.

5. *Тагирова В.Р., Смирнов Н.Н.* Формирование трещины гидроразрыва в пористой среде // Тезисы конф. “Ломоносовские чтения”. М.: Изд-во МГУ, 2006. С. 134-135.

6. *Тагирова В.Р*. Аналитическое и численное исследование автомодельного распространения трещины гидроразрыва // Труды XXVIII конф. мол. уч. мех.-мат. фак-та МГУ. М.: Изд-во МГУ, 2006. С. 192.

7. *Тагирова В.Р.* Новые автомодельные решения задачи о распространении трещины гидроразрыва // Тезисы докладов IX Всероссийского съезда по теоретической и прикладной механике. Нижний Новгород. Изд-во Нижегородского ун-та, 2006. Т. II. С. 165.

8. *Тагирова В.Р.* Гидродинамические модели технологии повышения нефтеотдачи с помощью гидроразрыва // Тезисы конф. “Актуальные вопросы теплофизики и физической гидрогазодинамики”, Новосибирск: Изд-во ИТ СО РАН, 2006. С. 115-116.

9. *Тагирова В.Р.* Рост трещины газового разрыва в пористой среде // Тезисы докладов XIV Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов”. М.: СП “Мысль”, 2007. С. 109-110.

10. *Тагирова В.Р., Смирнов Н.Н.* О распространении трещины газового разрыва в пористой среде, сравнение с гидроразрывом // Тезисы конф. “Ломоносовские чтения”. М.: Изд-во МГУ, 2007. С. 143-144.

11. *Tagirova V.R. and Smirnov N.N.* The Problem of Gas Fracturing in a Porous Medium in the Comparison with Hydraulic Fracturing // Proceeding of “Hydraulic Fracture Summit VII”, Timber Ridge Resort Mableton, GA, USA, 2007. P. 23-24.

12. *Тагирова В.Р.* Некоторые аналитические решения задачи о гидроразрыве в пористой среде // Тезисы докладов Всероссийской конференции “Современные проблемы механики сплошной среды”. М.: Изд-во МИАН, 2007. С.151-153.

13. *Тагирова В.Р.* Об оптимальной форме коллектора для сбора вязкой жидкости, насыщающей пористую среду // Тезисы конф. “Ломоносовские чтения”. М.: Изд-во МГУ, 2008. С. 157-158.