МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи
УДК 512.772.5

Шнейберг Игорь Иосифович

О продолжении по родам решений уравнения WDVV

Специальность
01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2008

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры Механико-Математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научные руководители:
кандидат физико-математических наук, доцент И. А. Чубаров
кандидат физико-математических наук С. В. Шадрин

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук М. Э. Казарян
(Математический институт имени В. А. Стеклова РАН)
кандидат физико-математических наук Е. Б. Фейгин
(Физический институт имени П. Н. Лебедева РАН)

Ведущая организация:
Федеральное Государственное Унитарное Предприятие "Государственный Научный Центр Российской Федерации – Институт Теоретической и Экспериментальной Физики"

Защита диссертации состоится 31 октября 2008 г. в 16 ч. 40 мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Механико-Математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-Математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 30 сентября 2008 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 при МГУ
профессор А. О. Иванов

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Одно из самых важных уравнений в современной математической физике – это уравнение Виттена-Дийкграафа-Верлинде-Верлинде (WDDV)[1]. Рассмотрим формальный ряд F, зависящий от переменных $T_1, \ldots, T_s$. Пусть η_{ij} – невырожденное скалярное произведение на пространстве параметров. Говорят, что F удовлетворяет уравнению WDVV, если

$$(1) \qquad \frac{\partial^3 F}{\partial T_a \partial T_b \partial T_i} \eta_{ij} \frac{\partial^3 F}{\partial T_j \partial T_c \partial T_d} = \frac{\partial^3 F}{\partial T_a \partial T_c \partial T_i} \eta_{ij} \frac{\partial^3 F}{\partial T_j \partial T_b \partial T_d};$$

здесь и ниже подразумевается суммирование по повторяющимся индексам. Иными словами, третьи производные ряда F

$$C_k^{ij} = \frac{\partial^3 F}{\partial T_i \partial T_j \partial T_l} \eta_{lk}$$

являются структурными константами коммутативной ассоциативной алгебры. Поэтому уравнение WDVV часто называют уравнением ассоциативности.

В целом, выписывать в явном виде отдельные решения уравнения WDVV – задача черезвычайно сложная[2], а задача классификации решений представляется и вовсе необозримой (полиномиальные решения уравнения WDVV рассмотрены Хертлингом[3]). Однако, очень часто решения уравнения WDVV естественно возникают в разных областях геометрии. Например, уравнению ассоциативности удовлетворяют инварианты Громова-Виттена в роде 0 (это является неким отражением геометрии пространства модулей кривых в роде ноль[4]. Также к уравнениям ассоциативности сводится классификация бигамильтоновых интегрируемых иерархий [5].

Часто оказывается, что решения уравнения ассоциативности появляются как часть некоторых значительно больших рядов, которые называются их квантованием или продолжением по родам. Так, в теории Громова-Виттена можно рассматривать инварианты Громова-Виттена

[1] B. Dubrovin, Geometry of 2D topological field theories. Integrable systems and quantum groups (Montecatini Terme, 1993), 120–348, Lecture Notes in Math., 1620, Springer, Berlin, 1996.

[2] S. Natanzon, Formulas for A_n- and B_n-solutions of WDVV equations. J. Geom. Phys. **39** (2001), no. 4, 323–336.

[3] C. Hertling, Frobenius manifolds and moduli spaces for singularities. Cambridge Tracts in Mathematics, 151. Cambridge University Press, Cambridge, 2002. x+270 pp.

[4] Yu. I. Manin, Frobenius manifolds, quantum cohomology, and moduli spaces. AMS Colloquium Publications, 47. AMS, Providence, RI, 1999.

[5] B. Dubrovin, Y. Zhang, Normal forms of hierarchies of integrable PDEs, Frobenius manifolds and Gromov-Witten invariants, arXiv: math.DG/0108160.

старших родов на малом фазовом пространстве, а также инварианты Громова-Виттена с потомками (ψ-классами).

Мы изучаем решения уравнения WDVV, приходящие из так называемых cH-алгебр. В этом подходе решения уравнения ассоциативности появляются как суммы по трехвалентным деревьям. Естественное продолжение по родам получается при рассмотрении трехвалентных графов произвольного вида. Однако, с включением в рассмотрение потомков дело обстоит несколько сложнее. А именно, один из вариантов воспринимать естественно структуру cH-алгебр кроется в теории инвариантов Цвибаха (это некоторое обобщение теории инвариантов Громова-Виттена[6]). При этом подходе возникает естественное определение полного потенциала. Нужно рассматривать графы с произвольными вершинами а не только трехвалентные, при этом, вершинам сопоставляются корреляторы, отвечающие пересечениям ψ-классов на пространстве модулей кривых. При этом подходе, потенциал без потомков, представляющий из себя сумму по трехвалентным графам, равен разложению по диаграммам Фейнмана действия Бершадского-Чекотти-Оогури-Вафы[7], а его древесная часть будет решением уравнения WDVV, построенным Баранниковым и Концевичем[8].

Естественная задача, при наличии двух разных теорий продолжения по родам решений уравнения ассоциативности (в нашем случае – теория Громова-Виттена и cH-алгебры), – каким либо образом сравнить эти две теории. Напомним, что одним из стандартных способов сравнения теорий продолжения по родам решений уравнения WDVV заключается в сравнении универсальных соотношений, которым, помимо WDVV, удовлетворяют эти решения. В частности, черезвычайно важны, так называемые, тавтологоические соотношения, приходящие из топологии компактификации Делиня-Мамфорда пространства модулей кривых[9].

Случай, когда потомки в cH-алгебрах рассматриваются только в одной точке был изучен Шадриным[10]. Однако, долгое время полное определение потомков в cH-алгебрах не было нигде сформулировано, потому

---

[6] A. Losev, S. Shadrin, From Zwiebach invariants to Getzler relation, Comm. Math. Phys. **271** (2007), no. 3, 649–679

[7] M. Bershadsky, S. Cecotti, H. Ooguri, C. Vafa, Kodaira-Spencer theory of gravity and exact results for quantum string amplitudes, Comm. Math. Phys. **165** (1994), no. 2, 311–427.

[8] S. Barannikov, M. Kontsevich, Frobenius manifolds and formality of Liealgebras of polyvector fields, Internat. Math. Res. Notices **1998**, no. 4, 201–215.

[9] Например, см. P. Belorousski, R. Pandharipande, A descendent relation in genus 2, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **29** (2000), no. 1, 171–191.

[10] S. Shadrin, A definition of descendants at one point in graph calculus, Adv. Theor. Math. Phys. **11** (2007), no. 3, 351–370.

что не удавалось доказать единственное на настоящий момент известное нетривиальное тавтологическое соотношение, включающее в себя ψ-классы в двух и более точках – соотношение топологической рекурсии для $\psi_1\psi_2$ в $\overline{\mathcal{M}}_{2,2}$ (TRR-$(2,2)$)[11].

Одним из основных результатов этой работы является доказательство TRR-$(2,2)$ для потенциала, полученного из cH-алгебр, в ограничении на малое фазовое пространство. Это позволяет сформулировать полное определение определение потомков в cH-алгебре и исследовать их в дальнейшем[12].

Другой важный результат, полученный в этой работе – доказательство соотношения Белорусского-Пандхарипанде в cH-алгебрах, тоже в ограничении на малое фазовое пространство. Соотношение Белорусского-Пандхарипанде[13] – одно из двух наиболее сложных тавтологических соотношений, известных на сегодняшний день. Так например, в теории интегрируемых иерархий[14] его пока не удалось воспроизвести напрямую. В большом классе случаев соотношение Белорусского-Пандхарипанде вместе с соотношением топологической рекурсии в $\overline{\mathcal{M}}_{2,1}$ и $\overline{\mathcal{M}}_{2,2}$, позволяет однозначно восстановить потенциал в роде два, зная потенциал в родах 0 и 1[15].

Доказательство обоих соотношений проводится по одной и той же схеме, с помощью разработанной нами техники, которая, фактически является алгоритмом для поиска и проверки новых тавтологических соотношений. Это можно рассматривать, как некую альтернативу теории Гивенталя-Ли[16], поскольку, как и у них, мы можем восстанавливать информацию о геометрии пространства модулей кривых с помощью чисто алгебраических конструкций.

---

[11] E. Getzler, Topological recursion relations in genus 2, Integrable systems and algebraic geometry (Kobe/Kyoto, 1997), 73–106, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1998.

[12] A. Losev, S. Shadrin, I. Shneiberg, Tautological relations in Hodge field theory, Nuclear Phys. B **786** (2007), no. 3, 267–296.

[13] P. Belorousski, R. Pandharipande, A descendent relation in genus 2, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **29** (2000), no. 1, 171–191.

[14] B. Dubrovin, Y. Zhang, Normal forms of hierarchies of integrable PDEs, Frobenius manifolds and Gromov-Witten invariants, arXiv: math.DG/0108160.

[15] X. Liu, Genus-2 Gromov-Witten invariants for manifolds with semisimple quantum cohomology, arXiv: math.DG/0310410.

[16] A. Givental, Gromov-Witten invariants and quantization of quadratic Hamiltonians. Dedicated to the memory of I. G. Petrovskii on the occasion of his 100th anniversary. Mosc. Math. J. 1 (2001), no. 4, 551–568, 645; Y.-P. Lee, Notes on axiomatic Gromov-Witten theory and applications, arXiv: 0710.4349.

Цель работы.

Целью работы является доказательство соотношений, приходящих из теории Громова-Виттена, для потенциала, полученного из cH-алгебр, в ограничении на малое фазовое пространство.

Основные методы исследования.

Использована разработанная совместно с С. В. Шадриным техника тензорных вычислений в графах, основанная на свойствах cH-алгебр. Доказательство обоих соотношений проводится по одной и той же схеме, которая, фактически является алгоритмом для поиска и проверки новых тавтологических соотношений. Это можно рассматривать как способ восстанавливать информацию о геометрии пространства модулей кривых с помощью чисто алгебраических конструкций.

Научная новизна.

Основные результаты работы являются новыми и состоят в следующем:

(1) Создан универсальный подход к вычислениям в тензорных графах на cH-алгебрах, воспроизводящий геометрию пространства модулей кривых.
(2) Доказано, что естественное продолжение по родам препотенциала Баранникова-Концевича удовлетворяет соотношению Белорусского-Пандхарипанде (в ограничении на малое фазовое пространство).
(3) Дано определение потомков в более чем одной точке для продолжения по родам препотенциала Баранникова-Концевича; проверено, что это определение удовлетворяет соотношению топологической рекурсии, приходящему их геометрии пространства $\overline{\mathcal{M}}_{2,2}$.

Теоретическая и практическая ценность.

Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в различных задачах теории продолжений по родам Фробениусовых многообразий, теории пересечений на пространстве модулей кривых, классической версии теории зеркальной симметрии, и математической физики.

Апробация результатов.

Результаты диссертации докладывались на кафедральном алгебраическом семинаре (2007) и на семинаре "Избранные вопросы алгебры"(2006, 2007) в Московском государственном университете, на семинаре по алгебре в университете Амстердама (Нидерланды, 2008), на семинаре по математической физике в Институте теоретической и экспериментальной физики (Москва, 2005 и 2006), и на семинаре по математической физике в Независимом московским университете (2007).

Публикации.

Основные результаты опубликованы в 3 работах, список которых приведен в конце автореферата, см. [1-3].

Структура диссертации.

Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Полный объем диссертации – 55 страниц, библиография включает 25 наименований.

Краткое содержание работы

Во введении мы приводим некоторую мотивацию наших результатов и объясняем из взаимосвязь и структуру работы.

В первой главе мы обсуждаем предварительные сведения и формулируем основные определения. Мы напоминаем необходимые факты об инвариантах Громова-Виттена и инвариантах Цвибаха. Также в первой главе мы приводим конструкцию потенциала с потомками, полученного из cH-алгебр. Напомним определение cH-алгебр. $\mathbb{Z}_2$-градуированная коммутативная ассоциативная $\mathbb{C}$-алгебра H называется cH-алгеброй, если на ней определены два линейных оператора

$$Q, G_-\colon H \to H$$

и интеграл $\int\colon H \to \mathbb{C}$, удовлетворяющие следующим аксиомам:

(1) $Q^2 = G_-^2 = QG_- + G_-Q = 0$, т. е., H – бикомплекс с дифференциалами Q и G_-;

(2) $H = H_0 \oplus H_4$, где $QH_0 = G_-H_0 = 0$, а пространство H_4 представляется в виде суммы четырехмерных подпространств порожденных $e_\alpha, Qe_\alpha, G_-e_\alpha, QG_-e_\alpha$ для некоторого семейства векторов $e_\alpha \in H_4$; иными словами,

$$H_4 = \bigoplus_\alpha \langle e_\alpha, Qe_\alpha, G_-e_\alpha, QG_-e_\alpha \rangle$$

(разложение Ходжа);

(3) Q является оператором первого порядка, т. е., удовлетворяет правилу Лейбница: $Q(ab) = Q(a)b + (-1)^{\tilde{a}} aQ(b)$ (здесь и далее $\tilde{a}$ означает четность элемента $a \in H$);

(4) G_- является оператором второго порядка, т. е., удовлетворяет 7-членному соотношению:

$$G_-(abc) = G_-(ab)c + (-1)^{\tilde{b}(\tilde{a}+1)} bG_-(ac) + (-1)^{\tilde{a}} aG_-(bc) \\ - G_-(a)bc - (-1)^{\tilde{a}} aG_-(b)c - (-1)^{\tilde{a}+\tilde{b}} abG_-(c).$$

(5) G_- удовлетворяет соотношению, которое мы будем называть аксиомой 1/12-ой:

$$str(G_- \circ a\cdot) = (1/12) str(G_-(a)\cdot)$$

(здесь $a\cdot$ и $G_-(a)\cdot$ означает оператор умножения на a и $G_-(a)$ соответственно).

Теперь мы определим оператор $G_+ \colon H \to H$. Мы полагаем $G_+ H_0 = 0$. Далее, учитывая разложение Ходжа, достаточно определить оператор G_+ на каждом из четырехмерных подпространсв $\langle e_\alpha, Qe_\alpha, G_-e_\alpha, QG_-e_\alpha \rangle$. Мы сделали это следующим образом:

$$G_+ e_\alpha = G_+ G_- e_\alpha = 0, \; G_+ Q e_\alpha = e_\alpha, \text{ и } G_+ Q G_- e_\alpha = G_- e_\alpha.$$

Легко проверить что $[G_-, G_+] = 0$ и оператор $\Pi_4 = [Q, G_+]$ является проектором на H_4 вдоль H_0. В свою очередь, оператор $\Pi_0 = \mathrm{Id} - \Pi_4$ является проектором на H_0 вдоль H_4.

Мы полагаем что интеграл на H есть четная линейная функция $\int \colon H \to \mathbb{C}$. Также мы требуем выполнения следующих соотоношений $\int Q(a)b = (-1)^{\tilde{a}+1} \int aQ(b)$, $\int G_-(a)b = (-1)^{\tilde{a}} \int aG_-(b)$, и $\int G_+(a)b = (-1)^{\tilde{a}} \int aG_+(b)$. Используя эти свойства интеграла легко получить следующие соотношения, $\int G_-G_+(a)b = \int aG_-G_+(b)$, $\int \Pi_4(a)b = \int a\Pi_4(b)$, и $\int \Pi_0(a)b = \int a\Pi_0(b)$.

Мы можем определить скалярное произведение на H следующим образом: $(a, b) = \int ab$. Мы предполагаем что определенное нами скалярное произведение невырожденно. Используя скалярное произведение мы можем превратить произвольный оператор $A : H \to H$ в бивектор, который мы будем обозначать как $[A]$.

Определим структуру потенциала в терминах cH-алгебр. Рассмотрим cH-алгебру H. Существует набор тензоров над H, которые мы ставим в соответствие компонентам графов, рассматриваемых ниже. Здесь мы представим обозначения для этих тензоров.

Мы рассматриваем графы, внутренние точки которых, имеют степень больше либо равную 3. Внутренним вершинам степени n мы всегда будем сопоставлять n-форму

$$(a_1, \ldots, a_n) \mapsto \int a_1 \cdot \cdots \cdot a_n. \tag{2}$$

Теперь рассмотрим бивектора, соответствующие ребрам графа: $[G_- G_+]$, $[\Pi_0]$, $[Id]$. При изображении графов, ребра с этими бивекторами будут обозначаться следующим образом:

$$-\!\!\bullet\!\!- \,, \qquad -\!\!\circ\!\!- \,, \qquad \text{——} \,. \tag{3}$$

Вектора, которые соответствуют листьям рассматриваемых графов, зависят от нескольких переменных. Пусть $\{e_1, \dots, e_s\}$ это однородный базис пространства H_0. Каждому вектору e_i сопоставим набор формальных переменных $T_{j,i}$ ($j \in \mathbb{Z}$ и $j \geq 0$) той же четности, что и e_i. Итак, каждому листу соответствует один из векторов $E_j = \sum e_i T_{j,i}$ ($j \geq 0$). На картинках мы изображаем E_0 просто как пустой лист, E_1 – как лист со стрелкой на конце, остальные вектора E_j ($j \geq 2$) необходимы только для определения общей конструкции потенциала, но в рассматриваемых в нашей работе соотношениях они не участвуют. Поэтому мы не вводим для них специальных обозначений.

Рассмотрим сумму по связным графам, имеющим следующие свойства:

(1) Каждая внутренняя вершина имеет валентность ≥ 3; Ей соответствует симметрическая форма (2).
(2) Ребра бывают двух типов: либо произвольное ребро с бивектором $[G_- G_+]$ (помеченное жирной черной точкой), либо петля с бивектором $[Id]$ (пустая петля).
(3) Каждый лист помечен одним из векторов E_i, $i \geq 0$.

Рассмотрим одну вершину такого графа. Опишем все возможные полуребра, присоединенные к этой вершине. В нее входит $2g$ полуребер, происходящих из g пустых петель; k полуребер, происходящих из ребер графа с черными точками, и l листьев, помеченных $E_{a_1}, \dots, E_{a_l}$. Назовем такую вершину вершиной типа $(g, k; a_1, \dots, a_l)$; при этом мы будем обозначать тип вершины v через $(g(v), k(v); a_1(v), \dots, a_{l(v)}(v))$.

Сопоставим графу Γ функцию, действуя следующим образом. Мы свернем тензоры, соответствующие вершинам, ребрам, и листьям, и то, что получилось, умножим на два числа, связанных с комбинаторикой графа. Первый множитель равен

$$V(\Gamma) = \frac{\prod_{v \in Vert(\Gamma)} 2^{g(v)} g(v)!}{|\mathrm{aut}(\Gamma)|}. \tag{4}$$

Здесь $|\mathrm{aut}(\Gamma)|$ – это число автоморфизмов размеченного графа Γ (то есть, листья и ребра могут перейти только в листья и ребра с точно какими же ассоциированными векторами и бивекторами), $Vert(\Gamma)$ – множество внутренних вершин графа. Можно считать, что мы убрали из Γ все пустые петли, запомним их количество в каждой вершине;

количество автоморфизмов полученного графа равно $1/V(\Gamma)$. Второй множитель равен

$$\Psi(\Gamma) = \prod_{v\in Vert(\Gamma)} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g(v),k(v)+l(v)}} \psi_1^{a_1(v)} \dots \psi_{l(v)}^{a_{l(v)}(v)}. \tag{5}$$

Этот множитель равен произведению интералов по пространствам модулей компонент кривых соответствующего страта в случае вычисления интегралов простейших инвариантов Цвибаха, индуцированных на H_0. Входящие в него интегралы вычисляются с помощью теоремы Виттена-Концевича[17].

Небольшая тонкость связана со знаками. В связи с тем, что мы рассматриваем $\mathbb{Z}_2$-градуированное пространство, мы должны проводить спаривание с учетом знаков (например, брать не след, а суперслед). Соответственно, перед спариванием тензоров, отвечающим графу рода g, нужно подправить бивектора у него на ребрах. А именно, нужно выбрать g ребер, таких, что если мы их разрежем, то граф превратится в дерево, и в этих ребрах подправить бивектор на оператор $J\colon a \mapsto (-1)^{\tilde{a}}a$: $[Id] \rightsquigarrow [J]$, $[G_-G_+] \rightsquigarrow [JG_-G_+]$. Очевидно, что ответ не зависит от выбора этих g ребер. Итак, мы определили потенциал в виде суммы по связным графам.

Вторая глава посвящена соотношению Белорусского-Пандхарипанде[18]. Соотношение Белорусского-Пандхарипанде – это соотношени в (ко)гомологиях $\overline{\mathcal{M}}_{2,3}$ между циклами, соответствующими естественным стратам комплексной коразмерности 2 в $\overline{\mathcal{M}}_{2,3}$.

Соотношение Белорусского-Пандхарипанде определяет дифференциальное уравнение для потенциала. Здесь, однако, есть тонкость, связанная с наличием ψ-классов в определении стратов[19].

Мы будем рассматривать дифференциальное уравнение на малом фазовом пространстве, то есть, мы положим все переменные $T_{n,i}$, $n \geq 1$, $i = 1,\dots,s$ равными нулю. Тогда уравнение Белорусского-Пандхарипанде можно рассматривать как дифференциальное соотношение на четыре ряда, представляющие собой части общего потенциала, определенного выше. Определим, используя описанные выше обозначения, ряды F_0,

[17] E. Witten, Two dimensional gravity and intersection theory on moduli space. Surveys in Differential Geometry, vol. 1 (1991), 243–310; M. Kontsevich, Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function, Comm. Math. Phys. **147** (1992), 1–23.

[18] P. Belorousski, R. Pandharipande, A descendent relation in genus 2, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **29** (2000), no. 1, 171–191.

[19] S. Shadrin, A definition of descendants at one point in graph calculus, Adv. Theor. Math. Phys. **11** (2007), no. 3, 351–370.

F_1, F_2, и $F_2^{(1)}$. Ряд F_0 (F_1, F_2) – это сумма по всем графам рода 0 (1, 2, соответственно), все внутренние вершины которых имеют степень 3, с пустыми листьями и черными кружками на ребрах. Вклад каждого графа мы рассматриваем с коэффицентом (весом) обратным порядку группы автоморфизмов данного графа. Таким образом, ряды F_0, F_1, F_2 – это ограничения компонент потенциала, соответствующего рода, на малое фазовое пространство.

Ряд $F_2^{(1)}$ – это сумма по всем графам рода 2 с черными кружками на ребрах, при этом графы должны удовлетворять некоторым дополнительным условиям. Каждый граф должен иметь ровно одну внутреннюю вершину степени 4, а остальные внутренние вершины должны иметь степень 3. В единственной внутренней вершине степени 4, должен быть ровно один лист со стрелкой на конце, при этом все остальные листья рассматриваемого графа должны быть пустыми. Вклад каждого графа мы рассматриваем с коэффицентом (весом) обратным порядку группы автоморфизмов данного графа, оставляющих лист со стрелкой на конце неподвижным.

Мы имеем 20 стратов участвующих в определении соотношения Белорусского-Пандхарипанде. Для примера, рассмотрим второй страт. Общая точка этого страта представляется двухкомпонентной кривой; одна компонента это кривая рода ноль с тремя отмеченными точками и одной точкой пересечения со второй компонентой. Вторая компонента имеет род 2 и не содержит отмеченных точек; мы берем ψ-класс на этой кривой в точке пересечения. Рассматриваемый страт определяет дифференциальное выражение. С учетом тонкости, связанной с наличием ψ-класса, данное дифференциальное выражение имеет вид –

$$\left(\frac{\partial F_2^{(1)}}{\partial T_{1,i}} - \frac{\partial^2 F_0}{\partial T_{0,i}\partial T_{0,k}}\eta_{kl}\frac{\partial F_2}{\partial T_{0,l}}\right)\eta_{ij}\frac{\partial^4 F_0}{\partial T_{0,j}\partial T_{0,a}\partial T_{0,b}\partial T_{0,c}}.$$

Используемое здесь скалярное произведение η_{ij} определяется ограничением скалярного произведения на подпространство H_0, то есть, $\eta_{ij} = (e_i, e_j)$, $\eta^{ij} = [\Pi_0]$. Аналогично определяются дифференциальные соотношения соответствующие другим стратам. Основной результат главы 2 следующая теорема:

Теорема 1. *Набор рядов F_0, F_1, F_2, и $F_2^{(1)}$ удовлетворяет уравнению Белорусского-Пандхарипанде.*

В третьей главе мы доказываем соотношение топологической рекурсии для $\psi_1\psi_2$ в $\overline{\mathcal{M}}_{2,2}$ (TRR-$(2,2)$). Рассматриваемое соотношение топологической рекурсии – это соотношение в (ко)гомологиях $\overline{\mathcal{M}}_{2,2}$ между циклами, соответствующими естественным стратам комплексной коразмерности 2 в $\overline{\mathcal{M}}_{2,2}$. Как и в случае соотношения Белорусского-Пандхарипанде, соотношение тополгической рекурсии определяет дифференциальное уравнение на потенциал. Мы опять будем рассматривать соответствующее дифференциальное уравнение на малом фазовом пространстве, то есть, мы положим все переменные $T_{n,i}$, $n \geq 1$, $i = 1, \ldots, s$ равными нулю. В этом случае, соотношение топологической рекурсии можно рассматривать как дифференциальное соотношение на пять рядов, представляющих собой части общего потенциала. Нам понадобятся ряды F_0, F_1, F_2, $F_2^{(1)}$, и $F_2^{(1,2)}$. Напомним, однако, что ряды F_0, F_1, F_2, $F_2^{(1)}$ уже были определены выше. Ряд $F_2^{(1,2)}$ это сумма по всем графам рода 2 с черными кружками на ребрах, при этом графы должны удовлетворять некоторым дополнительным условиям. Графы могут быть только двух типов. Каждый граф первого типа должен иметь ровно одну внутреннюю вершину степени 5, а остальные внутренние вершины должны иметь степень 3. В единственную внутреннюю вершину степени 5 должны входить ровно два листа со стрелкой на конце, а все остальные листья в графе должны быть пустыми. Каждый граф второго типа должен иметь ровно две внутренних вершины степени 4, а остальные внутренние вершины должны иметь степень 3. В каждую из двух внутренних вершин степени 4 должен входить ровно один лист со стрелкой на конце, а все остальные листья в графе должны быть пустыми. Вклад каждого графа мы рассматриваем с коэффицентом (весом) обратным порядку группы автоморфизмов данного графа, не перемешивающих пустые и специальные листья между собой. Мы имеем 12 стратов участвующих в определении рассматриваемого соотношения топологической рекурсии (TRR-$(2,2)$). Для примера рассмотрим второй страт. Общая точка этого страта представляется двухкомпонентной кривой; одна компонента это кривая рода ноль с двумя отмеченными точками и одной точкой пересечения со второй компонентой. Вторая компонента имеет род 2 и не содержит отмеченных точек; мы берем ψ-класс на этой кривой в точке пересечения. Рассматриваемый страт определяет дифференциальное выражение. С учетом тонкости, связанной с наличием ψ-класса, данное дифференциальное выражение имеет вид –

$$\left(\frac{\partial F_2^{(1)}}{\partial T_{1,i}} - \frac{\partial^2 F_0}{\partial T_{0,i}\partial T_{0,k}}\eta_{kl}\frac{\partial F_2}{\partial T_{0,l}}\right)\eta_{ij}\frac{\partial^3 F_0}{\partial T_{0,j}\partial T_{0,a}\partial T_{0,b}}.$$

Аналогично определяются дифференциальные соотношения соответствующие другим стратам. Основной результат главы 3 следующая теорема:

Теорема 2. *Набор рядов F_0, F_1, F_2, $F_2^{(1)}$, и $F_2^{(1,2)}$ удовлетворяет соотношению топологической рекурсии, определенному для $\psi_1\psi_2$ в $\overline{\mathcal{M}}_{2,2}$.*

Лосев и Шадрин доказали[20], что достаточно проверить наши теоремы в простейшем случае, когда все параметры положены равными нулю. Поэтому мы можем ограничиться рассмотрением только графов с тремя листьями для соотношения Белорусского-Пандхарипанде и графов с двумя листьями для соотношения TRR-$(2,2)$. Рассмотрим слагаемые нулевой степени рядов, получаемых применением дифференциальных операторов, соответствующих стратам, определяющим соотношение Белорусского-Пандхарипанде или TRR-$(2,2)$. В обоих случаях эти слагаемые представляют собой суммы графов (с тремя листьями в первом случае и двумя во втором), которые имеют одно или два ребра с белыми кружками, отвечающими бивектору $[\Pi_0]$ (одно ребро имеют графы, соответствующие стратам с ψ-классами, графическое представление, соответсвующее первому страту TRR-$(2,2)$ не имеет ребер с белыми кружками). Конечная цель вычислений – избавиться в графических представлениях, соответствующих всем стратам, от белых кружков. Таким образом, мы сможем переписать эти выражения в терминах, так называемых, *финальных графов* (в первом случае их 60, во втором – 19). Затем мы подставим полученные выражения в соотношение Белорусского-Пандхарипанде или TRR-$(2,2)$ сответственно, и увидим, что коэффиценты при всех финальных графах окажутся равными 0. В результате обе теоремы будут доказаны (в простейшем случае; общий случай выводится из простейшего).

Теперь объясним, как из частного случая (когда все параметры положены равными нулю) вывести общий случай. В терминах графов это означает, что для любого графического представления, соответствующего страту, мы рассматриваем графы той же самой структуры, что и прежде, но с произвольным числом листьев.

Оказывается, дополнительные листья могут быть сгруппированы в специальные операторы. Тем самым, вместо того, чтобы рассматривать графы с произвольным числом листьев, мы можем рассматривать те же графы, что и в простейшем случае. При этом, необходимо заменить вектора E_0 и E_1, соответствующие листьям графа, бивектора $[G_-G_+]$

[20] A. Losev, S. Shadrin, From Zwiebach invariants to Getzler relation, Comm. Math. Phys. **271** (2007), no. 3, 649–679.

и $[\Pi_0]$, соответствующие ребрам графа, на новые сложные вектора и бивектора.

Эти новые векторы и бивекторы зависят от параметров и могут быть явно выписаны с помощью конструкции Баранникова-Концевича для решения уравнения Морера-Картана.

Здесь существует тонкость, связанная с рассмотрением стратов с одним ψ-классом. На этом этапе мы переходим от ψ-классов к их поднятиям в пространство с большим числом отмеченных точек. Но как было доказано Шадриным [21], данные поднятия выражаются через ψ-классы и граничные дивизоры с помощью тех же формул, что и в теории Громова-Виттена.

Итак, мы рассматриваем те же графы, что и в простейшем случае, но с новыми векторами на листьях и бивекторами на ребрах, при этом, доказывать нужно *то же самое* соотношение, что и в простейшем случае.

Главная особенность такого подхода состоит в том, что свойства новых векторов и бивекторов почти такие же, как и свойства E_0, E_1, $[G_-G_+]$, и $[\Pi_0]$. То есть, мы по-прежнему можем использовать нашу технику избавления от "белых кружков".

Благодарности.

Автор выражает благодарность своим научным руководителям, кандидату физико-математических наук, доценту И. А. Чубарову и кандидату физико-математических наук С. В. Шадрину за постоянное внимание к работе.

[21] S. Shadrin, A definition of descendants at one point in graph calculus, Adv. Theor. Math. Phys. **11** (2007), no. 3, 351–370.

Работы автора по теме диссертации

1. И. И. Шнейберг, Соотношение топологической рекурсии для $\psi_1\psi_2$ в $\overline{\mathcal{M}}_{2,2}$, Функциональный анализ и его приложения, т. 42, вып. 1, 91–94 (2008).

2. S. Shadrin, I. Shneiberg, Belorousski-Pandharipande relation in dGBV algebras, Journal of Geometry and Physics 57 (2007), no. 2, 597–615.

(В этой работе соискателем доказано соотношение Белорусского-Пандхарипанде.)

3. И. И. Шнейберг, Продолжение по родам в циклической алгебре Ходжа: соотношение Белорусского-Пандхарипанде, Международная конференция к 100-летию со дня рожд. П. Г. Конторовича : тез. докл., Изд-во Урал. ун-та, 2005. ISBN5-7996-0322-2