МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 517.988.24

Телятников Илья Вячеславович

ПОВЕРХНОСТНЫЕ МЕРЫ НА ТРАЕКТОРИЯХ В РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ, ПОРОЖДАЕМЫЕ ДИФФУЗИОННЫМИ ПРОЦЕССАМИ

Специальность 01.01.01-математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва
2008

Работа выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Олег Георгиевич Смолянов
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор А. В. Угланов; кандидат физико-математических наук, доцент Я. А. Бутко
Ведущая организация:	Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Защита диссертации состоится 12 декабря 2008 г. в 16 ч. 45 мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.85 при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 12 ноября 2008 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д.501.001.85 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор

И. Н. Сергеев

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Диссертация посвящена исследованию поверхностных мер на траекториях в римановых многообразиях, порождаемых диффузионными процессами.

Понятие поверхностной меры на бесконечномерном пространстве является естественным обобщением меры Лебега на поверхности в $\mathbb{R}^n$: по мере μ на бесконечномерном пространстве X строится мера μ^S, сосредоточенная на достаточно гладкой поверхности S в X.

В диссертации для компактного риманова многообразия M и его риманова подмногообразия L строятся поверхностные меры на множестве $C([0,t],L)$ непрерывных функций на $[0,t]$, принимающих значения в L, рассматриваемом как подмногообразие аналогичного бесконечномерного многообразия $C([0,t],M)$, состоящего из непрерывных функций на $[0,t]$, принимающих значения в M. При этом предполагается, что на $C([0,t],M)$ определены борелевские вероятностные меры, порожденные диффузионными процессами в римановом многообразии M, и показано, что поверхностные меры на $C([0,t],L)$ эквивалентны мерам, порождаемым диффузионными процессами в L, соответствующими рассматриваемым диффузионным процессам в M.

В диссертации развивается подход к построению поверхностных мер, разработанный в серии работ О.Г. Смолянова и Х. фон Вайцзеккера с их сотрудниками[1,2,3], основанный на вложении риманова многообразия в евклидово пространство или другое риманово многообразие.

Следует подчеркнуть принципиальное отличие метода Смолянова-Вайцзеккера построения поверхностных мер от методов, ранее развитых в работах А.В. Скорохода[4], А.В. Угланова[5], Х. Эро и П. Маллявэна[6], В.И. Богачева и О.Г.Смолянова[7]. и др. Дело в том, что названные авторы рассматривали лишь подмногообразие конечной коразмерности, и их техника, основанная на теории гладких мер, совершенно не применима

[1] Смолянов О.Г. Гладкие меры на группах петель. *ДАН.* — 1995 — **345**, №4 —455-458

[2] Smolyanov O.G., Weizsäcker H.v, Wittich O. Brownian motion on a manifold as limit of stepwise conditioned standard Brownian motions. *Can. Math. Soc. Conference Proceedings.* — 2000. — **29**. — 589-602

[3] Sidorova N. A., Smolyanov O.G., Weizsaecker H. v., Wittich O., The surface limit of Brownian motion in tubular neighborhoods of an embedded Riemannian manifold, *Journal of Functional Analysis*, —2004 —**206 —391-413.**

[4] Скороход А.В. Интегрирование в гильбертовых простанствах. Наука, Москва — 1974

[5] Угланов А.В. Поверхностные интегралы в банаховых пространствах. *Матем. сборник.* — 1979. — **110**, №2 —189-217

[6] Airault H., Malliavin P. Intégration géométrique sur l'espace de Wiener. *Bull.Sci.Math.* —1998. — **2**, №112 — 3-52

[7] Богачев В.И., Смолянов О.Г. Аналитические свойства бесконечномерных распределений. *Успехи математических наук* — 1990. — **45**, №3 —3-83

в рассматриваемой нами ситуации.

Исследование мер на нелинейных бесконечномерных пространствах и их применение к решению задач математической физики в настоящее время являются одними из центральных направлений бесконечномерного анализа.

Все сказанное и определяет актуальность темы диссертации.

Цель работы

Цель работы заключается в исследовании поверхностных мер на траекториях в римановых многообразиях, порождаемых невинеровскими диффузионными процессами.

Научная новизна

Все результаты диссертации являются новыми. Основные из них заключаются в следующем:

1) Для случая, когда риманово многообразие рассматривается как подмногообразие евклидового пространства, построены поверхностные меры, порожденные диффузионными процессами в объемлющем евклидовом пространстве с неединичным корреляционным оператором соответствующей переходной вероятности. При этом использованы три различных способа построения поверхностных мер.

2) Для случая, когда риманово многообразие рассматривается как подмногообразие евклидового пространства, показано, что поверхностная мера (порождаемая диффузионным процессом с неединичным корреляционным оператором), полученная ограничением меры процесса на трубчатую ε-окрестность многообразия и устремлением ε к нулю, эквивалентна предельной мере процесса, в каждой точке разбиения посещающего многообразие, при устремлении к нулю диаметра разбиения. Показано, что в случае корреляционного оператора, не кратного единичному, поверхностные меры, построенные двумя упомянутыми способами, оказываются ортогональными поверхностной мере, порождаемой диффузионным процессом с тем же неединичным корреляционным оператором, но с отражением от трубчатой окрестности многообразия.

В случае единичного корреляционного оператора (так же, как и кратного единичному), как было известно ранее, все три меры эквивалентны.

3) Для случая, когда риманово многообразие рассматривается как подмногообразие компактного риманова многообразия, построены поверхностные меры, порожденные невинеровскими диффузионными процессами в объемлющем римановом многообразии. При этом построении поверхностных мер рассматривается условное распределение диффузионного процесса в объемлющем пространстве при условии, что в точках разбиения отрезка $[0, t]$ он принимает значения во вложенном римановом подмногообразии, а затем диаметр разбиения стремится к нулю.

4) При построении поверхностных мер, когда рассматривается условное распределение диффузионного процесса в объемлющем пространстве при условии, что в точках разбиения отрезка $[0, t]$ он принимает значения во вложенном римановом многообразии, а затем диаметр разбиения стремится к нулю, получены явные плотности Радона-Никодима предельных поверхностных мер относительно некоторых диффузионных процессов на многообразии, выражающиеся через геометрические характеристики многообразия и параметры диффузионного процесса в объемлющем пространстве.

Методы исследования

В диссертации используются методы бесконечномерного и стохастического анализа и ряд специальных конструкций.

Теоретическая и практическая ценность

Диссертация носит теоретический характер. Её результаты могут быть использованы в математической физике для представления решений эволюционных уравнений на многообразии с помощью пределов конечнократных интегралов и с помощью интегралов по траекториям.

Апробация диссертации

Результаты диссертации неоднократно докладывались на семинаре под руководством д.ф-м.н., профессора Смолянова О.Г. и д.ф-м.н., профессора Шавгулидзе Е.Т. "Бесконечномерный анализ и математическая физика"в 2004-2008 гг.

Также результаты, изложенные в диссертации, прошли апробацию на следующих конференциях:

1) XXII Международная конференция "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы", посвященная 106-летию со дня рождения И.Г.Петровского, Москва, 2007

2) XXVII Конференция молодых учёных МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, 2005.

3) XXVIII Конференция молодых учёных МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, 2006.

4) XXIX Конференция молодых учёных МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, 2007.

5) XXX Конференция молодых учёных МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, 2008.

Поддержка

Исследования выполнены при поддержке гранта РФФИ № 06-01-00761-а.

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в трех работах автора: [1,2,3]. Работ, написанных в соавторстве, нет.

Структура и объём работы

Диссертация состоит из четырёх глав и введения. Общий объем диссертации составляет 77 страниц. Список литературы включает 67 наименований.

Краткое содержание диссертации

Во введении (глава 1) проводится обзор работ по теме диссертации.

Меры на бесконечномерных пространствах с бесконечной коразмерностью (а именно меры на нелинейных пространствах функций или пространствах петель) изучались Иосидой, Альбеверио, Драйвером, Маллявэном, однако конструкции перечисленных авторов опирались на теорему Колмогорова, а не на понятие поверхностной меры (то есть на сужение меры в объемлющем пространстве на поверхность).

Принципиально новые подходы к построению мер в случае, когда многообразие обладает бесконечными размерностью и коразмерностью, были предложены в работе О.Г. Смолянова[1]: в этой работе в качестве бесконечномерного многообразия рассматривалось пространство отображений отрезка или окружности в компактную группу Ли, а в качестве меры в объемлющем пространстве - мера Винера на пространстве функций со значениями в пространстве матриц. В дальнейшем, результат этой работы был распространен в работах[2,3,8,9] на случай произвольного гладкого компактного риманова подмногообразия евклидового пространства.

Один из способов построения поверхностных мер на множестве функций со значением в компактном римановом многообразием, предложенный О. Г. Смоляновым, Х. фон Вайцзеккером и О. Виттихом, состоит в следующем. Пусть M изометрически вложено в $\mathbb{R}^n$ (по теореме Нэша). Для каждого разбиения π отрезка $[0,t]$: $0 = t_0 < t_1 \cdots < t_N = t$ рассматривается условное распределение стандартного броуновского движения в $\mathbb{R}^n$ с неединичным корреляционным оператором при условии, что в моменты t_i он принимает значения в гладком компактном римановом многообразии M, а затем диаметр разбиения стремится к нулю. В работах[2,8] доказываются существование предельных поверхностных мер и эквивалентность полученных мер мере Винера на M, причем найдены соответствующие плотности Радона-Никодима, выражающиеся через скалярную и векторную кривизну многообразия, для $\xi \in C([0,t],M)$ с

[8] Smolyanov O. G., Weizsäcker H. v, Wittich O. Chernoff's Theorem and Discrete Time Approximations of Brownian Motion on Manifolds. — 2005. — *http : //arxiv/org/PS_cache/math/pdf/*0409/0409155*.pdf*

[9] Sidorova N.A. The Smolyanov surface measure on trajectories in a Riemannian manifold. *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics.* —2004. — **7**, №3 —461-471

$\xi(0) = x$:

$$\frac{dS_1}{d\mathbb{W}^x}(\xi) = \frac{e^{\int\limits_0^t D(\xi(\tau))d\tau}}{\int\limits_{C([0,t],M)} e^{\int\limits_0^t D(\zeta(\tau))d\tau}\mathbb{W}^x(d\zeta)}, \tag{1}$$

где

$$D(y) = -\frac{1}{4}Scal(y) + \frac{|\tau|^2_{(M,g)\to(\mathbb{R}^n,\delta)}}{8}(y), \tag{2}$$

$Scal(y)$- скалярная кривизна многообразия в т. $y \in M$, $|\tau|^2_{(M,g)\to(\mathbb{R}^n,\delta)}(y)$- квадрат нормы поля трения τ при изометрическом вложении $\iota : (M,g) \to (\mathbb{R}^n,\delta)$ $(|\tau|^2_{(M,g)\to(\mathbb{R}^n,\delta)}(y) = d \times \kappa(y)$, где $\kappa(y)$- векторная кривизна многообразия в т. $y \in M)$.

В работах[3,9] описывается другой способ построения поверхностных мер. В данных работах рассматривается нормированное ограничение $\mathbb{W}_\varepsilon$ меры стандартного броуновского движения $\mathbb{R}^n$ на пространстве $C_{x_0}([0,t],\mathbb{R}^n)$ путей в $\mathbb{R}^n$) на множество путей, не покидающих трубчатую ε-окрестность многообразия M вплоть до t. Тогда семейство $\mathbb{W}_\varepsilon$ слабо сходится к поверхностной мере S_2, которая абсолютно непрерывна относительно меры Винера $\mathbb{W}^x$ на $C_{x_0}([0,t],M)$, соответствующей броуновскому движению на многообразии, причем плотность Радона- Никодима совпадает с (1).

В работе[10] приведено третье естественное определение поверхностной меры. В указанной работе рассматривалось броуновское движение в $\mathbb{R}^n$ с отражением от границы трубчатой ε-окрестности гладкого компактного риманова многообразия M без края размерности d, изометрически вложенного в $\mathbb{R}^n$. Было доказано, что предельная поверхностная мера при стремлении ε к 0 существует и совпадает с мерой Винера на многообразии.

В работе[8] были получены поверхностные меры, порождаемые броуновским движением в объемлющем пространстве, в случае, если риманово многообразие L вложено не в евклидово пространство, а в произвольное риманово многообразие M.

[10] Сидорова Н.А. Броуновское движение во вложенном многообразии как предел броуновских движений с отражением в его трубчатых окрестностях. *Математические Заметки.* — 2003. —**73**, №6 —947-950

В *главе 2* результаты работ[2,8] распространяются на случай, когда вместо меры Винера на $C([0,t],\mathbb{R}^n)$ (она описывает стандартное броуновское движение в $\mathbb{R}^n$) берутся меры диффузионных процессов в объемлющем пространстве с неединичными корреляционными операторами. Для каждого разбиения π отрезка $[0,t]$: $0 = t_0 < t_1 \cdots < t_N = t$ рассматривается условное распределение диффузионного процесса в $\mathbb{R}^n$ с неединичным корреляционным оператором при условии, что в моменты t_i он принимает значения в гладком компактном римановом многообразии M (изометрически вложенном в $\mathbb{R}^n$), а затем диаметр разбиения стремится к нулю. В этой главе доказываются существование предельных поверхностных мер и эквивалентность полученных мер мере некоторого диффузионного процесса на M, причем найдены соответствующие плотности Радона-Никодима, выражающиеся через тензорное поле диффузии и геометрические характеристики многообразия.

Пусть (M,g)- компактное замкнутое гладкое риманово многообразие размерности d с метрикой g, $b(x)$ - положительно определенное симметрическое тензорное поле типа (0,2) (поле $b(x)$ задает другую риманову метрику на многообразии M, отличную от g, а поле $b^{-1}(x)$ типа (2,0) задает тензорное поле диффузии), ∇^g_i, ∇^b_i - ковариантные производные вдоль базисного вектора касательного пространства, задаваемые римановой связанностью многообразий (M,g) и (M,b) соответственно. При фиксированном наборе локальных координат будем обозначать $\sqrt{g} = \sqrt{\det g_{ij}}$ (соответственно, $\sqrt{b} = \sqrt{\det b_{ij}}$).

Пусть $\iota : M \to \mathbb{R}^n$ - изометрическое вложение многообразия M в $\mathbb{R}^n$ для некоторого n, V - окрестность нуля в $\mathbb{R}^d$ и $\psi_y : V \to U$ - отображение, задающее нормальные координаты в окрестности U точки y, $\psi_y(0) = y$. Обозначим $\iota \circ \psi_y(x) = (i^1(x), i^2(x), \dots i^n(x))$. Без ограничения общности будем полагать $\iota(y) = 0$.

Пусть также $\left\{ {i \atop jk} \right\}$ и Γ^i_{jk} - символы Кристоффеля-Шварца многообразий (M,g) и (M,b) соответственно, $S^i_{jk} = \left\{ {i \atop jk} \right\} - \Gamma^i_{jk}$ - тензор разницы символов Кристоффеля-Шварца.

Здесь и далее используется правило Эйнштейна суммирования индексов.

Пусть $d^2_{(M,b)}(x,y)$ - квадрат длины минимальной геодезической на M, соединяющей точки x и y, относительно метрики b. Обозначим $p_R : \mathbb{R} \times$

$M \times M \to \mathbb{R}$:

$$p_R(t,x,z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}^d} \exp(-\frac{d^2_{(M,b)}(x,z)}{2t}). \qquad (3)$$

Пусть также $p(t,x,z)$- плотность переходной вероятности винеровского процесса в $\mathbb{R}^n$ с корреляционным оператором A^{-1}:

$$p(t,x,z) = \frac{\sqrt{|A|}}{\sqrt{2\pi t}^n} \exp(-\frac{a_{ij}(x^i - z^i)(x^j - z^j)}{2t}). \qquad (4)$$

При построении внешней поверхностной меры будем полагать

$$b_{lm}(\iota, y) = \frac{\partial i^\alpha}{\partial x^l}(0) \frac{\partial i^\beta}{\partial x^m}(0) a_{\alpha\beta} \qquad (5)$$

(ограничение тензора $a_{\alpha\beta}$ на T_yM), при построении внутренней поверхностной меры можно в качестве b брать произвольное положительно определенное симметрическое тензорное поле типа (0,2).

Пусть еще $\Delta_{(M,b)}$ - оператор Бельтрами - Лапласа многообразия (M,b), $Scal_{(M,b)}$ - скалярная кривизна многообразия (M,b), $|\tau|^2_{(M,b)\to(\mathbb{R}^n,a)}$ - квадрат нормы относительно $a_{\alpha\beta}$ поля трения τ при отображении $\iota : (M,b) \to (\mathbb{R}^n, a)$, компоненты которого задаются следующей формулой:

$$\tau^\alpha = b^{kj} \frac{\partial^2 i^\alpha}{\partial x^k \partial x^j} - b^{kj} \Gamma^l_{kj} \frac{\partial i^\alpha}{\partial x^l} \qquad (6)$$

Теорема 1. *1) Пусть $0 = t_0 < t_1 \dots t_N = t$ - разбиение π отрезка $[0,t]$, $d(\pi)$ - диаметр разбиения. Для каждой ограниченной непрерывной функции f на $C([0,t], M)$ определим измеримую функцию*

$$f^x_\pi(z_1, z_2, \dots, z_N) = f(\varphi^{x,z_1,z_2,\dots,z_N}_\pi)$$

где $\varphi^{x,z_1,z_2,\dots,z_N}_\pi \in C([0,t], M)$, $\varphi^{x,z_1,z_2,\dots,z_N}_\pi(t_j) = z_j$ (здесь $z_0 = x$), и если $s \in (t_j, t_{j+1})$, то $\varphi^{x,z_1,z_2,\dots,z_N}_\pi(s) = \gamma(s)$, где γ - функция на $[t_j, t_{j+1}]$, такая что $\gamma([t_j, t_{j+1}])$ - какая-либо минимальная геодезическая $\gamma_{z_j, z_{j+1}, t_j, t_{j+1}}$, соединяющая z_j и z_{j+1}, и $||\gamma'(s)|| = 1$ для $s \in (t_j, t_{j+1})$.

Для любого $x \in M$ существует такая вероятностная мера $\eta^{x,S}_M$ на $C([0,t], M)$, что для любой ограниченной непрерывной функции f на $C([0,t], M)$ имеем:

$$\int\limits_{C([0,t],M)} f(\xi) \eta^{x,S}_M(d\xi) = \lim_{d(\pi)\to 0} c_N^{-1}(x,t) \int\limits_{M\times\dots\times M} f^x_\pi(z_1, z_2, \dots, z_N) \times$$

$$\times p(t_1,x,z_1)p(t_2-t_1,z_1,z_2)\dots p(t_N-t_{N-1},z_{N-1},z_N)dz_1dz_2\dots dz_N$$

где

$$c_N(x,t)=\int\limits_{M\times\dots\times M} p(t_1,x,z_1)p(t_2-t_1,z_1,z_2)\times\dots$$

$$\dots\times p(t_N-t_{N-1},z_{N-1},z_N)dz_1dz_2\dots dz_N$$

и dz_i*- обозначение меры объема на многообразии* (M,g).

Кроме того, существует вероятностная мера $\nu_M^{x,S}$, *определяемая аналогично мере* $\eta_M^{x,S}$ *заменой* p *на* p_R.

2) Пусть для $y\in M$

$$D_1(y)=-\frac{1}{6}Scal_{(M,b)}(y)+\frac{1}{2}b^{ij}\nabla_i^b(S_{kj}^k)(y)+\frac{1}{2}b^{ij}S_{ki}^kS_{lj}^l(y). \tag{7}$$

Мера $\nu_M^{x,S}$ *абсолютно непрерывна относительно распределения* $\mathbb{P}^x$ *процесса на многообразии* M *с генератором* B *и началом в точке* $x\in M$, *где*

$$B=\frac{1}{2}(-\Delta_{(M,b)}+2b^{ij}S_{kj}^k\nabla_i^b), \tag{8}$$

причем для $\xi\in C([0,t],M)$ *с* $\xi(0)=x$ *плотность Радона-Никодима задается следующим равенством:*

$$\frac{d\nu_M^{x,S}}{d\mathbb{P}^x}(\xi)=\frac{e^{\int\limits_0^t D_1(\xi(\tau))d\tau}}{\int\limits_{C([0,t],M)} e^{\int\limits_0^t D_1(\zeta(\tau))d\tau}\mathbb{P}^x(d\zeta)}. \tag{9}$$

3) Пусть для $y\in M$

$$D_2(y)=-\frac{1}{4}Scal_{(M,b)}(y)+\frac{1}{2}b^{ij}\nabla_i^b(S_{kj}^k)(y)+$$

$$+\frac{1}{2}b^{ij}S_{ki}^kS_{lj}^l(y)+\frac{|\tau|^2_{(M,b)\to(\mathbb{R}^n,a)}}{8}(y). \tag{10}$$

Мера $\eta_M^{x,S}$ *абсолютно непрерывна относительно распределения* $\mathbb{P}^x$ *процесса на многообразии* M *с генератором* B *и началом в точке* $x\in M$, *причем* *для* $\xi \in C([0,t],M)$ *с* $\xi(0) = x$ *плотность Радона-Никодима задается следующим равенством:*

$$\frac{d\eta_M^{x,S}}{d\mathbb{P}^x}(\xi) = \frac{e^{\int\limits_0^t D_2(\xi(\tau))d\tau}}{\int\limits_{C([0,t],M)} e^{\int\limits_0^t D_2(\zeta(\tau))d\tau}\mathbb{P}^x(d\zeta)}. \tag{11}$$

Замечание 1. *Если при построении меры* $\eta_M^{x,S}$ *корреляционный оператор взять единичным, то мера* $\eta_M^{x,S}$ *совпадет с введенной в*[2,8] *внешней поверхностной мерой. Если при построении меры* $\nu_M^{x,S}$ *взять* $b = g$, *то мера* $\nu_M^{x,S}$ *совпадет с введенной в*[2,8] *внутренней поверхностной мерой.*

В отличие от [2,8] мы вынуждены рассматривать два тензорных поля: метрический тензор многообразия g и тензорное поле b, являющиеся ограничением тензорного поля диффузии в объемлющем пространстве (т.е. неединичного постоянного корреляционного оператора) на риманово многообразие.

Последнее поле зависит от корреляционного оператора, и эта зависимость не пропадает при любой замене метрики в объемлющем пространстве. В результате, в формуле плотности Радона-Никодима появляются дополнительные члены, зависящие от тензора разницы символов Кристоффеля-Шварца, соответствующих описанным выше тензорным полям.

В главе 3 рассматривается диффузионный процесс с неединичным корреляционным оператором a с отражением от стенок трубчатой ε-окрестности многообразия. В главе показано, что предельная поверхностная мера при стремлении ε к 0 существует и совпадает с мерой некоторого процесса на многообразии.

Пусть $\mathbb{M}_\varepsilon = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sup\limits_{y \in M} \rho(x,y) \le \varepsilon \right\}$ - трубчатая ε-окрестность гладкого компактного риманова многообразия M, где ρ- обычная метрика в $\mathbb{R}^n$.

Пусть также $\pi : \mathbb{M}_\varepsilon \to M$- естественная проекция на многообразие. Символами T_xM и N_xM обозначим касательное и ортогональное пространства к многообразию M в точке $x \in M$. Символом $\{e_i\}$ будем обозначать ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$, такой что первые d векторов являются ортонормированным базисом в $T_{x_0}M$.

Для каждого $x \in M$ пусть $P_x : \mathbb{R}^n \to T_xM$ и $Q_x : \mathbb{R}^n \to N_xM$ - ортогональные проекторы. Далее для $x \in M$ и $v \in T_xM$ определим

$$\Gamma_x(v) = dQ_x(v)P_x + dP_x(v)Q_x \in \mathtt{gl}(n) \tag{12}$$

Пусть также $pr_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ и $pr_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-d}$ - линейные операторы, отображающие каждый вектор из $\mathbb{R}^n$ в первые его d и последние $n-d$ координат соответственно.

Обозначим (r_t^ε) диффузионный процесс в $\mathbb{R}^n$ с неединичным постоянным симметричным положительно определенным корреляционным оператором a (в координатах $\{e_i\}$) с отражением от $\partial\mathbb{M}_\varepsilon$; h- оператор из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, такой что $a = hh^T$; (b_t) - n-мерное стандартное броуновское движение с началом в точке x_0.

Пусть u_t - матрица стохастического паралельного переноса вдоль M-значного семимартингала w_t, задаваемая стохастическим дифференциальным уравнением Стратоновича

$$\delta u_t + \Gamma_{w_t}(\delta w_t)u_t = 0 \tag{13}$$

с $u_0 = I \in \mathtt{gl}(n)$.

Далее пусть $y^{s+d} = f_s(y_1, .., y_d)$ при $s \leq n-d$ - локальное представление многообразия M в некоторых ортогональных координатах $\{u_te_i\}$ окрестности точки $\pi(x)$, где $x \in \mathbb{M}_\varepsilon$.

Обозначим символом $c(x)$ тензорное поле на многообразии, задаваемое соотношением $c(x) = P_xaP_x^T$ для $x \in M$. В координатах $\{u_te_i\}$ имеет место равенство для $i, j \leq d$:

$$c^{ij} = a'^{ij}, \tag{14}$$

где $a' = u_t^Tau_t$, то есть c – верхний блок матрицы оператора a в координатах $\{u_te_i\}$.

Обозначим $\mathbb{P}_\varepsilon^{x_0}$ меру на $C_{x_0}([0,t], \mathbb{R}^n)$, соответствующую процессу r_t^ε, и символом $\mathbb{P}_M^{x_0}$ меру на $C_{x_0}([0,t], M)$, соответствующую диффузионному процессу $\overline{x}_t$ на M с началом в точке $x_0 \in M$, задаваемому в координатах $\{u_te_i\}$ генератором

$$D_3v(0) = \frac{1}{2}c^{ij}\frac{\partial^2 v}{\partial x^i x^j}(0) + \sum_{i,j=1}^{d}\sum_{k=d+1}^{n}\partial_{ij}f^k(0)a'^{kj}\frac{\partial v}{\partial x^i}(0) \tag{15}$$

для $v \in C^2_{x_0}(M, \mathbb{R}^1)$.

Теорема 2. *Семейство мер* $\mathbb{P}^{x_0}_\varepsilon$ *слабо сходится к* $\mathbb{P}^{x_0}_M$ *при* $\varepsilon \to 0$.

В главе 4 рассматривается нормированное ограничение P_ε меры диффузионного процесса $dw_t = hdb_t$ (где $hh^T = a$) на пространстве $C_{x_0}([0,t], \mathbb{R}^n)$ путей в $\mathbb{R}^n$) на множество путей, не покидающих трубчатую ε-окрестность многообразия M вплоть до t. Тогда семейство P_ε при $\varepsilon \to 0$ слабо сходится к мере S_1, которая абсолютно непрерывна относительно меры $\mathbb{P}^x$ на $C_{x_0}([0,t], M)$, соответствующей диффузионному процессу на многообразии с генератором

$$Bf(y) = \frac{1}{2}(-\Delta_{(M,b)} + q^i(y)\nabla_i)f(y), \tag{16}$$

и началом в точке x_0, где $q^i(y)\nabla_i$ - векторное поле сноса на многообразии, а $b(x)$ такое же, как и в формуле 5 главы 2, причем плотность Радона-Никодима выражается через тензорное поле диффузии, геометрические характеристики многообразия и его вложения.

Принципиальным отличием от доказательства в работе[4] существования поверхностной меры, порожденной стандартным броуновским движением в $\mathbb{R}^n$, является то, что проекция диффузионного процесса на многообразие оказывается зависимой от проекции на нормальное пространство к многообразию в точке, в результате при $\varepsilon \to 0$ распределение условного случайного процесса (при условии, что он не покидает трубчатую ε-окрестность многообразия M вплоть до t) стремится (слабо) не к распределению проекции процесса на многообразие, а к распределению процесса, порожденного (16), мера которого ортогональна мере проекции исходного процесса на многообразие.

В этой главе показано, что поверхностная мера S_1 эквивалентна мере $\nu^{x,S}_M$, полученной в главе 2. Следует предположить, что как и в случае со стандартным броуновским движением, поверхностные меры, порожденные указанными двумя способами (различающимися по сути разным порядком взятия пределов мер), совпадают (в диссертации данное утверждение выдвигается только в качестве гипотезы).

Следующая теорема представляет собой основной результат четвертой главы диссертации.

Теорема 3. *Пусть P_ε - нормированное ограничение меры диффузионного процесса $dw_t = hdb_t$ на пространстве $C_{x_0}([0,t],\mathbb{R}^n)$ путей в $\mathbb{R}^n$ на множество путей, не покидающих трубчатую ε-окрестность многообразия M вплоть до t. Тогда семейство P_ε слабо сходится к мере S_1, называемой поверхностной мерой, которая абсолютно непрерывна относительно меры $\mathbb{P}^x$ на $C_{x_0}([0,t],M)$, соответствующей диффузионному процессу на многообразии с генератором*

$$Bf(y) = \frac{1}{2}(-\Delta_{(M,b)} + q^i(y)\nabla_i)f(y), \tag{17}$$

и началом в точке x_0, где $q^i(y)\nabla_i$ - векторное поле сноса на многообразии, причем плотность Радона-Никодима и снос диффузии $q^i(y)\nabla_i$ зависят от тензорного поля диффузии в объемлющем пространстве, геометрических характеристик многообразия и его вложения.

Следствие 1. *Из Теоремы 3 получаем, что поверхностная мера S_1, порождаемая диффузионным процессом с неединичным корреляционным оператором, эквивалентна поверхностной мере $\nu_M^{x,S}$ (по теореме Гирсанова).*

Следствие 2. *Поверхностные меры S_1 и $\nu_M^{x,S}$, порождаемые диффузионным процессом с неединичным корреляционным оператором, ортогональны поверхностной мере, порождаемой диффузионным процессом с тем же неединичным корреляционным оператором, но с отражением от трубчатой окрестности многообразия, в случае, если $a \neq \lambda I$.*

В главе 5 с помощью техники поверхностных мер исследуется связь между диффузионными процессами в компактном римановом многообразии без края M и его римановом подмногообразии без края L, гладко вложенном в M. Именно, строятся поверхностные меры на множестве $C([0,t],L)$ непрерывных функций на $[0,t]$, принимающих значения в L, рассматриваемом как подмногообразие аналогичного бесконечномерного многообразия $C([0,t],M)$, состоящего из непрерывных функций на $[0,t]$, принимающих значения в M.

В главе 5 результат работы[8] распространяется на случай, когда вместо меры Винера на $C([0,t],(M,g))$ (она описывает стандартное броуновское движение в (M,g)) берутся меры диффузионных процессов в объемлющем пространстве с тензорным полем диффузии, отличным от g. Для каждого разбиения π отрезка $[0,t]$: $0 = t_0 < t_1 \dots < t_N = t$ рассматривается условное распределение диффузионного процесса в M, при условии, что в моменты t_i он принимает значения в компактном римановом подмногообразии L (изометрически вложенном в M), а затем диаметр разбиения стремится к нулю. В этой главе доказываются существование предельной поверхностной меры и эквивалентность полученной меры мере некоторого диффузионного процесса на L, причем найдена соответствующая плотность Радона-Никодима, выражающаяся через тензорное поле диффузии и геометрические характеристики многообразия.

Пусть (M, g^M)- компактное замкнутое риманово многообразие размерности m с метрикой g^M, $b^M(x)$ - положительно определенное симметрическое тензорное поле типа (0,2) (поле $b^M(x)$ задает другую риманову метрику на многообразии M, отличную от g^M, а поле $(b^M)^{-1}(x)$ типа (2,0) задает тензорное поле диффузии), $p_A^M(t,x,y)$ - плотность переходной вероятности диффузионного процесса на многообразии M с генератором $A = -\frac{1}{2}\Delta_{(M,b^M)}$, где $-\Delta_{(M,b^M)}$ - оператор Бельтрами-Лапласа на M, задаваемый метрикой b^M.

Пусть (L, g^L) - риманово замкнутое подмногообразие (M, g^M) размерности l, гладко вложенное в (M, g^M), $\iota : L \to M$ - изометрическое вложение, V - окрестность нуля в $\mathbb{R}^d$ и $\psi_y : V \to U$ - отображение, задающее нормальные координаты в окрестности U точки y, $\psi_y(0) = y$. Обозначим $\iota \circ \psi_y(x) = (i^1(x), i^2(x), \dots i^n(x))$.

Из изометричности следует, что

$$g^L_{lm}(y) = \frac{\partial i^\alpha}{\partial x^l}(0)\frac{\partial i^\beta}{\partial x^m}(0)g^M_{\alpha\beta}(i(y)). \tag{18}$$

Обозначим через b^L ограничение тензорного поля b^M на многообразие L, задаваемое вложением ι:

$$b^L_{lm}(y) = \frac{\partial i^\alpha}{\partial x^l}(0)\frac{\partial i^\beta}{\partial x^m}(0)b^M_{\alpha\beta}(i(y)). \tag{19}$$

Пусть $\left\{ {i \atop jk} \right\}$ и Γ^i_{jk} - символы Кристоффеля-Шварца многообразий (L, g^L) и (L, b^L) соответственно, $S^i_{jk} = \left\{ {i \atop jk} \right\} - \Gamma^i_{jk}$ - тензор разницы символов Кристоффеля-Шварца, ∇^b_i - ковариантная производная вдоль базисного вектора касательного пространства T_xL в точке x, задаваемая римановой связанностью многообразия (L, b^L) соответственно. При фиксированном наборе локальных координат будем обозначать $\sqrt{g^L} = \sqrt{\det g^L_{ij}}$ (соответственно, $\sqrt{b^L} = \sqrt{\det b^L_{ij}}$).

Будем обозначать $\Delta_{(L,b^L)}$ - оператор Бельтрами - Лапласа многообразия (L, b^L), $Scal_{(L,b^L)}$, $Scal_{(M,b^M)}$ - скалярные кривизны многообразий (L, b^L) и (M, b^M) соответственно, $|\tau|^2_{(L,b^L)\to(M,b^M)}$ - квадрат нормы относительно b^M поля трения τ при отображении $\iota : (L, b^L) \to (M, b^M)$.

Пусть также

$$\overline{R}_{(M,b^M)/(L,b^L)}(x) = \sum_{i,j=1}^{l} \langle R^{(M,b^M)}(e_i, e_j)e_j, e_i\rangle(x) \tag{20}$$

и

$$\overline{Ric}_{(M,b^M)/(L,b^L)}(x) = \sum_{i=1}^{l} \langle e_i, Ric^{(M,b^M)} e_i\rangle(x) \tag{21}$$

- соответственно частичные следы тензора кривизны и тензора Риччи многообразия (M, b^M) относительно произвольного ортонормированного базиса $\{e_i\}_{i=1}^l$ пространства $\iota_* T_x(L, b^L)$.

Основной результат главы 5 заключается в следующем:

Теорема 4. *1) Пусть $0 = t_0 < t_1 \dots t_N = t$ - разбиение π отрезка $[0, t]$, $d(\pi)$ - диаметр разбиения. Для каждой ограниченной непрерывной функции f на $C([0, t], L)$ определим измеримую функцию*

$$f^x_\pi(z_1, z_2, \dots, z_N) = f(\varphi^{x,z_1,z_2,\dots,z_N}_\pi)$$

где $\varphi^{x,z_1,z_2,\dots,z_N}_\pi \in C([0, t], L)$ определяется так же, как в Теореме 1.

Для любого $x \in L$ существует такая вероятностная мера η^x_L на $C([0, t], L)$, что для любой ограниченной непрерывной функции f на $C([0, t], L)$ имеем:

$$\int\limits_{C([0,t],L)} f(\xi)\eta^x_L(d\xi) = \lim_{d(\pi)\to 0} c^{-1}_N(x, t) \int\limits_{L\times\cdots\times L} f^x_\pi(z_1, z_2, \dots, z_N)\times$$

$$\times p^M_A(t_1, x, z_1)p^M_A(t_2 - t_1, z_1, z_2)\dots p^M_A(t_N - t_{N-1}, z_{N-1}, z_N)dz_1dz_2\dots dz_N \tag{22}$$

где

$$c_N(x,t) = \int\limits_{L\times\dots\times L} p_A^M(t_1,x,z_1)p_A^M(t_2-t_1,z_1,z_2)\times\dots$$

$$\dots\times p_A^M(t_N-t_{N-1},z_{N-1},z_N)dz_1dz_2\dots dz_N \tag{23}$$

и dz_i*- обозначение меры объема на многообразии* (L, g^L)*.*

2) Пусть для $y\in L$

$$D(y) = -\frac{1}{4}Scal_{(L,b^L)}(y) + \frac{1}{2}(b^L)^{ij}\nabla_i^b(S_{kj}^k)(y) + \frac{1}{2}(b^L)^{ij}S_{ki}^kS_{lj}^l(y)+$$

$$+\frac{1}{8}|\tau|^2_{(L,b^L)\to(M,b^M)}(y) + \frac{1}{12}(\overline{R}_{(M,b^M)/(L,b^L)}(y) + \overline{Ric}_{(M,b^M)/(L,b^L)}(y) + Scal_{(M,b^M)}(y)). \tag{24}$$

Мера η_L^x *абсолютно непрерывна относительно распределения* $\mathbb{P}^x$ *процесса на многообразии* L *с генератором* B *и началом в точке* $x\in L$*, где*

$$B = \frac{1}{2}(-\Delta_{(L,b^L)} + 2(b^L)^{ij}S_{kj}^k\nabla_i^b), \tag{25}$$

причем для $\xi\in C([0,t],L)$ *с* $\xi(0)=x$ *плотность Радона-Никодима задается следующим равенством:*

$$\frac{d\eta_L^x}{d\mathbb{P}^x}(\xi) = \frac{e^{\int_0^t D(\xi(\tau))d\tau}}{\int\limits_{C([0,t],L)} e^{\int_0^t D(\zeta(\tau))d\tau}\mathbb{P}^x(d\zeta)}. \tag{26}$$

Замечание 2. *Исследуем связь полученной в главе 5 поверхностной меры с полученными ранее поверхностными мерами Смолянова-Вайцзеккера. Рассмотрим дополнительно две поверхностные меры: поверхностную меру* $\nu_L^{x,b}$ *на траекториях в многообразии* (L,b^L)*, порожденную диффузионным процессом в объемлющем пространстве* M *с генератором* A*, и поверхностную меру* $\mu_L^{x,g}$ *на траекториях в многообразии* (L,g^L)*, порожденную диффузионным процессом в объемлющем пространстве* M *с генератором* $-\frac{1}{2}\Delta_{(M,g^M)}$*.*

Легко видеть, что интегралы от функций по перечисленным мерам, выраженные через пределы конечнократных интегралов (22), отличаются

друг от друга:
1) для мер η_L^x и $\nu_L^{x,b}$ - различными мерами объема dz_i (задаваемые разными метриками), при этом подынтегральные ядра будут одними и теми же;
2) для мер η_L^x и $\mu_L^{x,g}$ - различными подынтегральными ядрами (переходными вероятностями различных диффузионных процессов), а интегрирование происходит по одним и тем же мерам.

Согласно результатам работы[8]*, мера $\nu_L^{x,b}$ эквивалентна мере диффузионного процесса на L с генератором $-\frac{1}{2}\Delta_{(L,b^L)}$, причем производная Радона-Никодима имеет форму (26) с подынтегральным выражением в показателе экспоненты*

$$\overline{D}(y) = -\frac{1}{4}Scal_{(L,b^L)}(y) + \frac{1}{8}|\tau|^2_{(L,b^L)\to(M,b^M)}(y) + \frac{1}{12}(\overline{R}_{(M,b^M)/(L,b^L)}(y)+$$

$$+\overline{Ric}_{(M,b^M)/(L,b^L)}(y) + Scal_{(M,b^M)}(y)). \tag{27}$$

Аналогично, мера $\mu_L^{x,g}$ эквивалентна мере диффузионного процесса на L с генератором $-\frac{1}{2}\Delta_{(L,g^L)}$, причем производная Радона-Никодима имеет форму (26) с подынтегральным выражением в показателе экспоненты

$$\overline{\overline{D}}(y) = -\frac{1}{4}Scal_{(L,g^L)}(y) + \frac{1}{8}|\tau|^2_{(L,g^L)\to(M,g^M)}(y) + \frac{1}{12}(\overline{R}_{(M,g^M)/(L,g^L)}(y)+$$

$$+\overline{Ric}_{(M,g^M)/(L,g^L)}(y) + Scal_{(M,g^M)}(y)). \tag{28}$$

Согласно теореме Гирсанова меры процессов с генераторами $-\frac{1}{2}\Delta_{(L,b^L)}$ и $\frac{1}{2}(-\Delta_{(L,b^L)}+2(b^L)^{ij}S^k_{kj}\nabla^b_i)$ эквивалентны (с плотностью, не равной единице), а следовательно, таковыми являются и поверхностные меры η_L^x и $\nu_L^{x,b}$.

В то же время, легко доказать, что меры η_L^x и $\mu_L^{x,g}$ ортогональны, поскольку ортогональны меры процессов с генераторами $\frac{1}{2}(-\Delta_{(L,b^L)} + 2(b^L)^{ij}S^k_{kj}\nabla^b_i)$ и $-\frac{1}{2}\Delta_{(L,g^L)}$.

Пользуясь предоставленной возможностью, я хочу выразить чувство глубокой признательности моему научному руководителю профессору Олегу Георгиевичу Смолянову за постоянные поддержку и внимание к моей работе.

Список работ автора по теме диссертации

[1] Ilya V.Telyatnikov. Smolyanov-Weizsäcker surface measures generated by diffusions on the set of trajectories in Riemannian manifolds. — *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics.* —2008 —**11** —№1, 21-31.
[2] Телятников И.В. Представление решений задачи Коши уравнения теплопроводности на римановых многообразиях с переменным коэффициентом диффузии — *Труды XXVIII Конференции молодых ученых мехмата МГУ* —2006, т. 2, 212-216
[3] Телятников И.В. Поверхностные меры Смолянова-Вайцзеккера на траекториях в римановых многообразиях, порождаемые диффузионными процессами. — *Тезисы международной конференции "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы", посвященной памяти И.Г. Петровского*, 2007, 314-315.