

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ**

имени М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи

Лебедев Дмитрий Анатольевич

**Устойчивость и стабилизация неавтономных
систем, уравнения движения которых
представлены в квазикоординатах**

Специальность 01.02.01 — теоретическая механика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва

2008

Работа выполнена на кафедре прикладной механики и управления
механико-математического факультета
МГУ им. М.В. Ломоносова

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор В.М. Морозов

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор В.Е. Павловский
кандидат физико-математических наук,
В.М. Буданов

Ведущая организация: Московский энергетический институт
(технический университет)

Защита состоится 19 декабря 2008 года в 16 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.22 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, Ленинские горы, Главное Здание МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-10.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ.

Автореферат разослан 19 ноября 2008 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доцент

В.А. Прошкин

Актуальность темы. Неголономные системы служат механическими моделями многих технических объектов, в частности, разнообразных колесных экипажей. Одними из наиболее интересных и бурно развивающихся в настоящее время объектов являются мобильные колесные роботы, исследованию которых посвящена обширная литература. Рабочими режимами этих объектов соответствуют стационарные движения неголономных систем. Поэтому выделение таких движений, а также исследование их устойчивости и возможностей стабилизации представляют собой важную и актуальную задачу.

При исследовании неголономных систем используются уравнения движения в различных формах (Чаплыгина, Воронца, Аппеля, Больцмана-Гамеля, Маджи и др.). Новая лаконичная форма этих уравнений предложена в работе Я.В. Татарина. Матричная форма уравнений неголономной механики, удобная для применения пакетов символьных вычислений, приведена в работе Ю.Г. Мартыненко.

Исследование стационарных движений неголономных систем, их устойчивости и возможностей стабилизации проводилось, главным образом, на основании уравнений, записанных в обобщенных координатах (уравнения Чаплыгина, Воронца).

В же время известно, что использование квазискоростей позволяет значительно упростить выражение для кинетической энергии системы по сравнению с ее выражением через обобщенные скорости. Поэтому и уравнения движения неголономной системы в квазикоординатах (уравнения Эйлера-Лагранжа) оказываются более простыми, чем уравнения в обобщенных координатах. В связи с этим представляет интерес провести исследование стационарных движений неголономных систем на основании уравнений движения в форме Эйлера-Лагранжа.

Цель работы. Диссертация посвящена вопросам исследования стационарных движений неголономных систем.

нарных движений неголономных механических систем, уравнения движения которых представлены в квазикоординатах. В качестве примера подробно рассмотрена задача о движении одноколесного робота по горизонтальной плоскости без проскальзывания.

Научная новизна. Все основные результаты, полученные в работе, являются новыми, ранее неизвестными. Введено новое определение циклических координат для уравнений движения неголономных систем в форме Эйлера-Лагранжа. Определено многообразие стационарных движений, исследованы вопросы их устойчивости и возможностей стабилизации. Подробно исследованы стационарные движения новой модели одноколесного робота.

Достоверность результатов. Все результаты диссертационной работы строго обоснованы, они базируются на утверждениях теоретической механики, теории устойчивости и управления.

Используемые методы. В работе используются методы аналитической механики, теории критических случаев устойчивости движения и линейной теории управления.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы при решении задач устойчивости и стабилизации объектов, механическими моделями которых являются неголономные системы. Результаты, полученные при исследовании рассмотренной модели одноколесного робота, могут использоваться при разработке конкретных моделей колесных роботов.

Апробация работы. Результаты, представленные в диссертации, докладывались автором и обсуждались на следующих научных семинарах и конференциях:

- - Научная школа-конференция "Мобильные роботы и мехатронные системы", Москва, 2004, 2006 гг.

- - Международный научно-технический семинар "Современные технологии в задачах управления, автоматизации и обработки информации", МАИ Алушта, 2004 - 2008 гг.
- - IASTED. Automation, control, and information technology, Novosibirsk, 2005.
- - 2-я международная научная конференция "Аналитическая теория автоматического управления и ее приложения", Саратов, 2005 г.
- - Научная конференция Ломоносовские чтения, МГУ, 2006.
- - Международная конференция "Пятые окуневские чтения", Санкт-Петербург, июнь 2006 г.
- - Конференция, посвященная 300-летию со дня рождения Леонарда Эйлера, "Классические задачи динамики твердого тела", Донецк, 2007.
- - X Международная научная конференции "Устойчивость, управление и динамика твердого тела". Донецк. 2008.
- - Семинар по аналитической механике и устойчивости движения имени В.В. Румянцева, МГУ, октябрь 2008 г.
- - Семинар кафедры прикладной механики и управления механико-математического факультета МГУ, июнь 2007 г., ноябрь 2008 г.

Публикации. Основные результаты диссертационной работы изложены в пятнадцати печатных работах, одна из которых опубликована в журнале, входящем в перечень ВАК. Список работ приведен в конце автореферата.

Структура работы. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы из 99 наименований. Общий объем диссертации – 122 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении описана предметная область и цель настоящей диссертации, дан краткий обзор работ, посвященных различным формам уравнений неголономных систем, исследованиям устойчивости и стабилизации их стационарных движений, а также работ, касающихся динамики одноколесных роботов. Во введении, кроме того, приведено краткое содержание диссертации.

В первой главе диссертации рассматривается задача о стационарных движениях неголономной механической системы, уравнения движения которой представлены в квазикоординатах.

В разделе 1.1 выписаны уравнения движения неголономной системы в форме Эйлера-Лагранжа.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial w_s} + \sum_{r=1}^n \sum_{t=l+1}^n \gamma_{ts}^r \frac{\partial T}{\partial w_r} w_t - \frac{\partial T}{\partial \pi_s} = P_s \quad (s = l+1, \dots, n),$$
$$\dot{q}_s = \sum_{k=l+1}^n b_{sk} w_k \quad (s = 1, \dots, n)$$

В этих выражениях T – кинетическая энергия системы, выраженная через квазискорости w_i , γ_{ts}^r – трехиндексные символы Больцмана, π_s – дифференциалы квазикоординат, P_s – обобщенные силы, отнесенные к квазикоординатам, b_{sk} – элементы матрицы перехода от квазискоростей к обобщенным скоростям. Во второй группе равенств суммирование по k идет от $l+1$ до n , поскольку квазискорости $w_i = 0$, ($i = 1, \dots, l$) в силу неголономных связей.

Вводится определение циклических координат, соответствующее определению, данному А.В. Карапетяном для уравнений движения, записанных в обобщенных координатах. При этом оказался очень существенным выбор матрицы перехода от обобщенных скоростей к квазискоростям. Сформулированы рекомендации по выбору этой матрицы, который, по крайней мере, не уменьшает число существующих в системе циклических координат.

В разделе 1.2 определено многообразие стационарных движений неголономных систем, определяемое равенствами

$$q_i(t) = q_{i0}, \quad \dot{q}_i = 0, \quad i = l + 1, \dots, k; \quad w_\alpha(t) = w_{\alpha 0} = \omega_\alpha, \quad \alpha = k + 1, \dots, n. \quad (1)$$

Рассмотрены различные условия существования этих движений.

В разделе 1.3 составлены уравнения возмущенного движения в окрестности стационарного движения, выбранного в качестве невозмущенного. Вводя отклонения

$$x_i = q_i - q_{i0}, \quad z_i = w_i, \quad y_\alpha = w_\alpha - \omega_\alpha, \quad i = l + 1, \dots, k; \quad \alpha = k + 1, \dots, n$$

и учитывая равенства, связывающие переменные x и z :

$$\dot{x}_i = \sum_{l+1}^k b_{ik} z_k$$

выпишем в матричной форме уравнения возмущенного движения, выделив линейные члены:

$$\begin{aligned} W_{11}\ddot{x} + W_{12}\dot{y} + V_1\dot{x} + K_1x + P_1y &= X(x, \dot{x}, y) \\ W_{21}\ddot{x} + W_{22}\dot{y} + V_2\dot{x} + K_2x + P_2y &= Y(x, \dot{x}, y) \end{aligned} \quad (2)$$

X , Y - вектор-функции, содержащие члены порядка выше первого по введенным переменным.

Если система обладает $n - k$ - мерным многообразием стационарных движений, то линеаризованная система (2) имеет $n - k$ нулевых корней и $n - k$ линейных интегралов. Исключив с помощью этих интегралов возмущения циклических скоростей, получим редуцированную систему относительно возмущений только позиционных координат. Сформулирована и доказана следующая теорема:

Теорема. Если неголономная система имеет многообразие стационарных движений размерности, равной числу циклических координат, то всякое стационарное движение (1), принадлежащее указанному многообразию, устойчиво (неустойчиво), когда все корни характеристического уравнения редуцированной системы имеют отрицательные действительные части (хотя бы один корень с положительной действительной частью). Всякое возмущенное движение, достаточно близкое к невозмущенному, при выполнении условий устойчивости, стремится при $t \rightarrow \infty$ к одному из возможных стационарных движений, принадлежащих указанному многообразию.

В разделе 1.4 рассмотрена задача стабилизации стационарных движений, решение которой включает в себя следующие этапы: анализ управляемости линеаризованной системы, анализ ее наблюдаемости, а также построение алгоритмов стабилизации. Приведены общие критерии управляемости и наблюдаемости и выделены некоторые частные случаи, когда, например, управляющие силы действуют только по циклическим координатам.

В главе 2 рассматривается одна модель одноколесного экипажа, для которой выписаны уравнения движения в форме уравнений Эйлера-Лагранжа.

В разделе 2.1 описывается модель одноколесного экипажа, которая представляет собой совокупность четырех твердых тел: диска, который катится по горизонтальной плоскости без проскальзывания, твердого тела (маятника), соединенного с диском цилиндрическим шарниром в его центре, кольца - твердого тела, вращающегося относительно оси, лежащей в плоскости диска, и ротора - симметричного твердого тела, вращающегося относительно оси, закрепленной в кольце. Центр масс кольца находится в плоскости диска и принадлежит прямой, которая содержит центры масс диска и тела. Ось вращения ротора находится в плоскости, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр, а центр масс ротора не совпадает с центром кольца. Движение данной модели описывается восемью обобщенными коор-

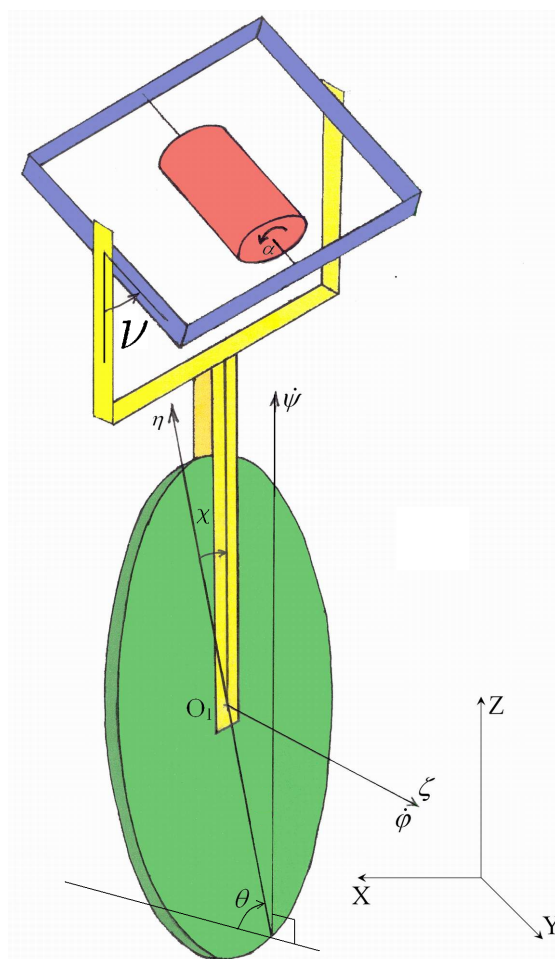


Рис. 1. Одноколесный робот.

динатами: X и Y - горизонтальные координаты центра диска, ψ, θ, φ - углы Эйлера, задающие положение диска относительно неподвижной системы, χ - угол между линией наибольшего ската диска и прямой, содержащей центры масс диска и тела (осью тела), ν - угол отклонения оси ротора от плоскости диска, α - угол поворота ротора.

В разделе 2.2 для рассматриваемой модели одноколесного робота вводятся квазискорости, с помощью которых выписывается выражения для кинетической энергии и обобщенных сил, отнесенных к квазикоординатам. Матрица,

с помощью которой вводятся квазискорости имеет вид:

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -a \sin(\psi) \sin(\theta) & 0 & a \cos(\psi) & a \cos(\psi) \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \cos(\psi) \sin(\theta) & 0 & a \sin(\psi) & a \sin(\psi) \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{q}} = \begin{pmatrix} \dot{X} & \dot{Y} & \dot{\chi} & \dot{\theta} & \dot{\nu} & \dot{\varphi} & \dot{\psi} & \dot{\alpha} \end{pmatrix}^T,$$

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 & w_6 & w_7 & w_8 \end{pmatrix}^T,$$

$$\vec{w} = \hat{a} \cdot \dot{\vec{q}}$$

После введения квазискоростей были выписаны уравнения движения в форме уравнений Эйлера-Лагранжа.

В третьей главе определено многообразие стационарных движений рассматриваемой модели одноколесного экипажа, и исследована устойчивость некоторых стационарных движений этой модели.

В разделе 3.1 на основе введенного определения циклических координат установлено, что координаты χ , θ , ν являются позиционными, а координаты φ , ψ , α – циклическими. При отсутствии управляющих сил, уравнения движения системы допускают частные решения, соответствующие (1)

$$\chi = \chi_0, w_3 = 0, \theta = \theta_0, w_4 = 0, \nu = \nu_0, w_5 = 0, w_6 = \omega, w_7 = \Omega, w_8 = \Omega_r \quad (3)$$

, которые описывают стационарные движения системы. Необходимым условием существования стационарных движений является выполнение равенства

$\sin(\chi_0) = 0$, которое означает, что линия, проходящая через центры масс диска, маятника и кольца (линия тела), должна совпадать с линией наибольшего ската диска. При выполнении равенства $\sin(\chi_0) = 0$ из пяти нетривиальных уравнений стационарных движений останутся только два, которые связывают пять параметров, определяющих эти движения моноцикла. Таким образом размерность многообразия стационарных движений равна трем и совпадает с количеством циклических координат.

Были рассмотрены некоторые наиболее интересные виды стационарных движений.

1. Прямолинейное качение вертикального диска (центры масс тел системы принадлежат плоскости диска)

$$\sin(\chi_0) = 0, \theta_0 = \frac{\pi}{2}, \sin(\nu_0) = 0, w_6 = \omega, w_7 = 0, w_8 = \Omega_r$$

2. Верчение системы вокруг вертикали (центры масс тел системы принадлежат вертикальной прямой проходящей через точку касания диска и плоскости)

$$\sin(\chi_0) = 0, \theta_0 = \frac{\pi}{2}, \sin(\nu_0) = 0, w_6 = 0, w_7 = \Omega, w_8 = \Omega_r$$

3. Равновесие (вертикальный диск стоит, центры масс системы лежат на вертикальной прямой, проходящей через точку касания диска и плоскости)

$$\sin(\chi_0) = 0, \theta_0 = \frac{\pi}{2}, \sin(\nu_0) = 0, w_6 = 0, w_7 = 0, w_8 = \Omega_r$$

4. Движение при котором центр диска описывает окружность (линия наибольшего ската диска описывает коническую поверхность)

$$\sin(\chi_0) = 0, \theta_0 = const, \nu_0 = const, w_6 = \omega, w_7 = \Omega, w_8 = \Omega_r$$

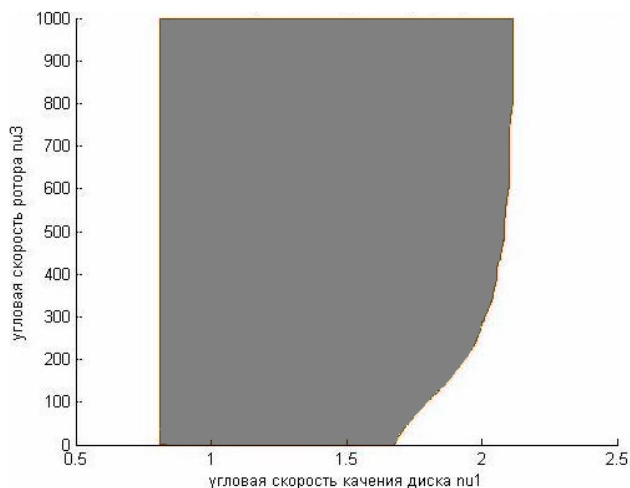


Рис 2

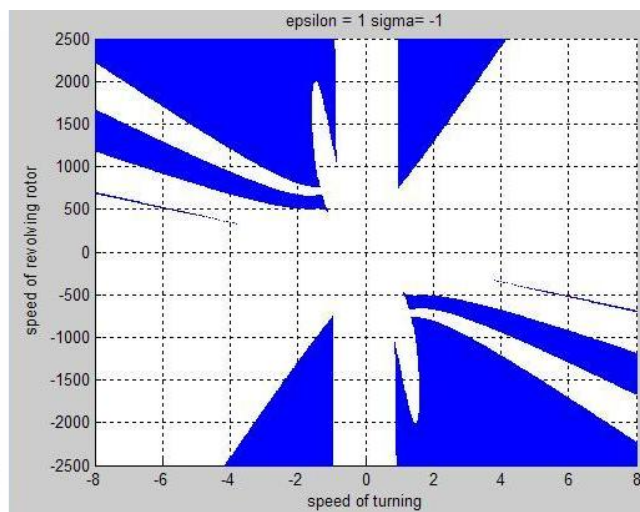


Рис 3

Далее в третьей главе проведено исследование устойчивости стационарных движений.

Для прямолинейного качения получены необходимые и достаточные условия устойчивости с помощью проверки условий Гурвица, когда на систему действуют диссипативные силы в оси кольца, что не нарушает уравнений стационарных движений. На рисунке 2 изображена темная область выполнения необходимых и достаточных условий устойчивости прямолинейного качения, в том случае когда тело находится в нижнем положении и центр масс ротора ниже центра кольца.

Для стационарного движения верчение получены необходимые условия устойчивости. Область выполнения этих условий изображена на рисунке 3 темным цветом.

В четвертой главе рассматривается задача стабилизации некоторых стационарных движений одноколесного робота при помощи управляющих моментов, действующих по осям диска, кольца и ротора.

В разделе 4.1 показано, что линеаризованная система уравнений движения всегда имеет линейный интеграл, не зависящий от управления, при помощи которого система редуцируется к системе меньшего порядка. Для ре-

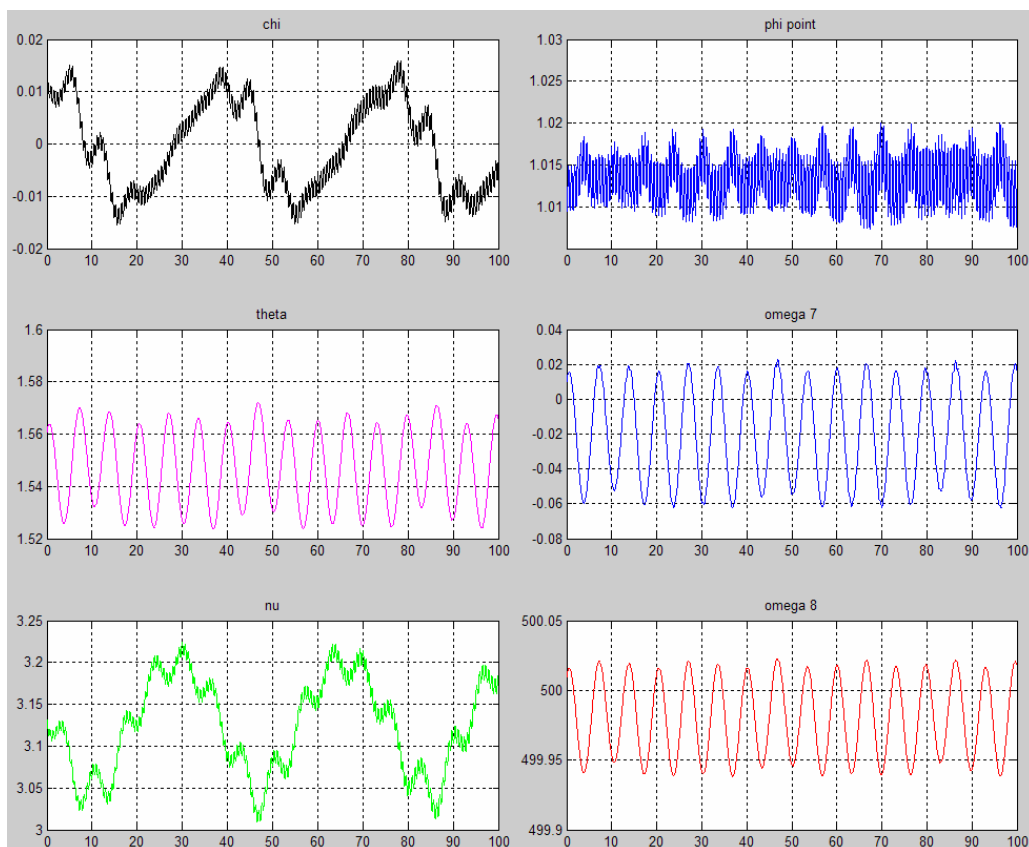


Рис. 2.

дуцированной системы проведен анализ управляемости и показано, что для управляемости достаточно двух управляющих моментов, действующих по осям диска и ротора.

В разделе 4.2 установлена наблюдаемость системы по измерениям угловой скорости диска относительно маятника, углу отклонения кольца от плоскости диска и угловой скорости вращения ротора в окрестности прямолинейного качения и движения, при котором центр диска описывает окружность.

В разделе 4.3 построен закон стабилизации прямолинейного качения в виде линейной обратной связи по состоянию системы, который минимизирует квадратичный функционал.

В разделе 4.4 проведено математическое моделирование уравнений движения исходной системы, когда параметры принадлежат области устойчивости и начальных условиях, близких к условиям прямолинейного качения. Резуль-

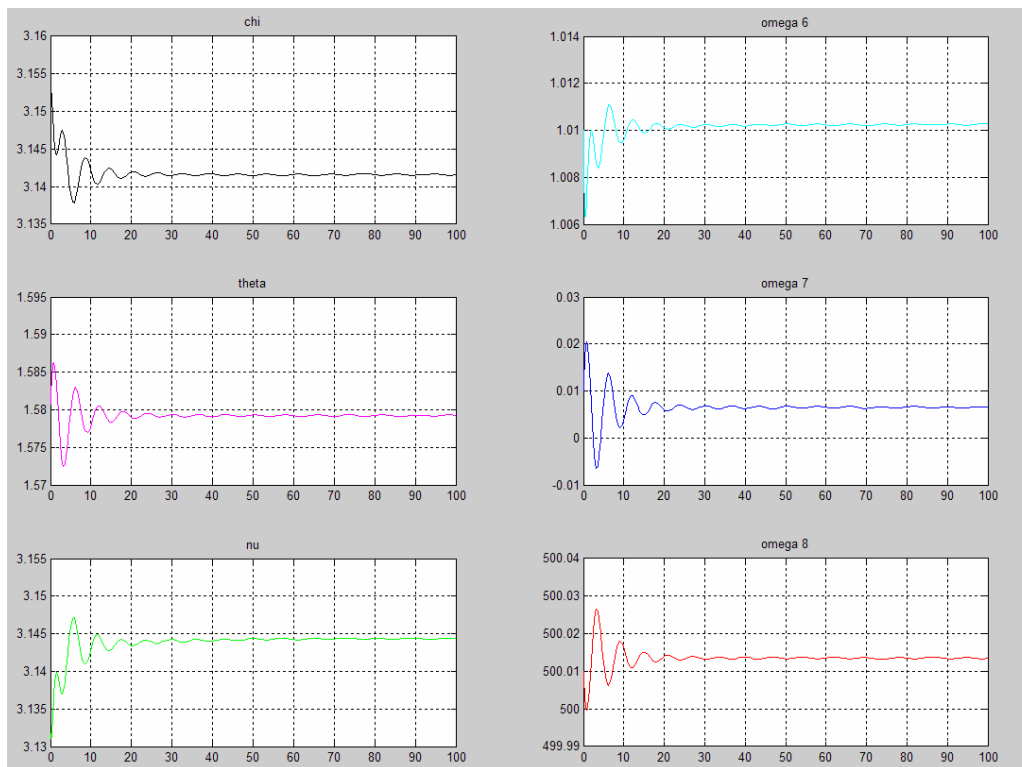


Рис. 3. Затухание под действием диссипативных сил

таты моделирования представлены на рисунке 2 (в отсутствии диссипативных сил в оси кольца), а на рисунке 3 представлены результаты, когда на систему действуют диссипативные силы.

Решение линейной системы, замкнутой стабилизирующим управлением представлено на рисунке 4.

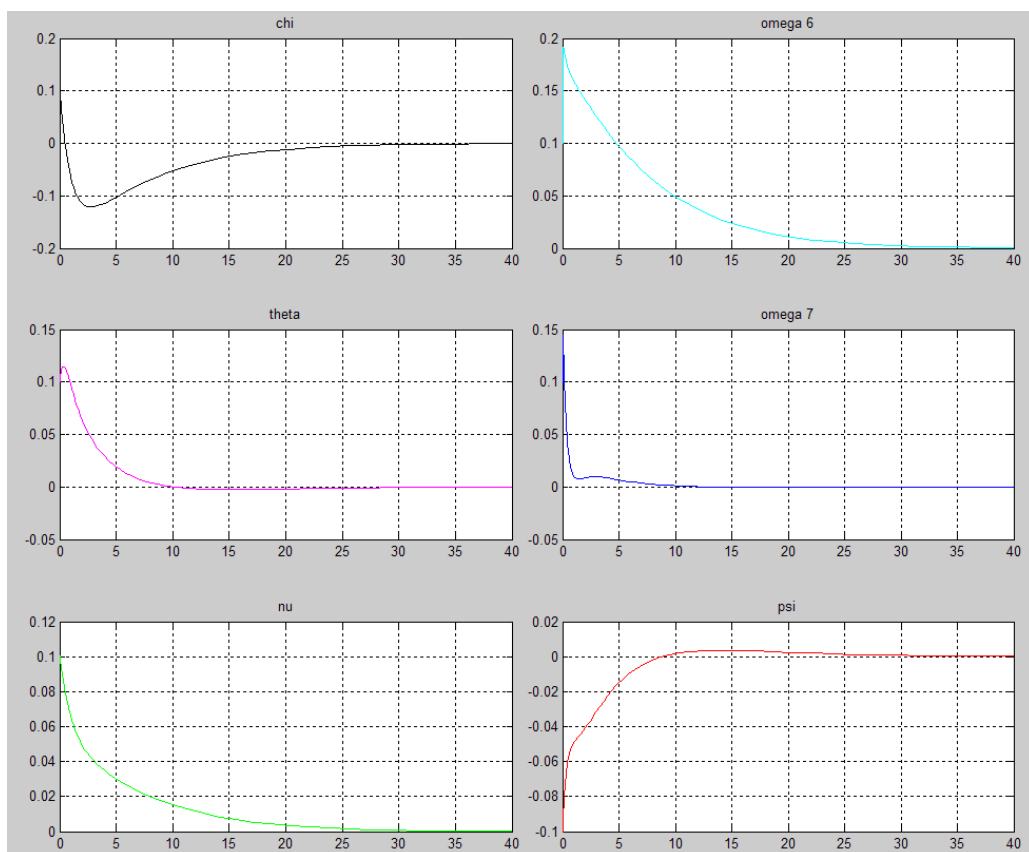


Рис. 4. Стабилизация прямолинейного качения (маятник вверх)

В **заключении** приведены основные результаты диссертации.

1. Введено новое определение циклических координат для уравнений движения неголономных механических систем, представленных в форме уравнений Эйлера-Лагранжа. Предложены рекомендации по выбору матрицы перехода от обобщенных скоростей к квазискоростям, при котором число существующих в системе циклических координат не уменьшается.
2. Определено многообразие стационарных движений неголономной системы. Сформулирована и доказана теорема об устойчивости стационарных движений.
3. В задаче стабилизации стационарных движений получены критерии управляемости и наблюдаемости, основанные на редукции системы.
4. Составлены уравнения движения и определены стационарные движения одной модели одноколесного робота, состоящего из четырех твердых тел, движущегося по горизонтальной плоскости без проскальзывания.
5. Получены условия устойчивости некоторых стационарных движений одноколесного робота.
6. Исследованы управляемость и наблюдаемость в окрестности стационарных движений одноколесного робота и построен алгоритм оптимальной стабилизации одного из стационарных движений системы.

По теме диссертации опубликованы следующие работы:

1. *Балашов (Лебедев) Д.А.* Стационарные движения одноколесного робота и их устойчивость. // Мат. науч. шк. конф. "Мобильные роботы и мехатронные системы", М.: Изд-во Моск. ун-та., 2004 г. С. 124-133.
2. *Д.А Балашов (Лебедев), В.И.Каленова, А.А.Кожанов, В.М Морозов.* Об особенностях различных моделей одноколесных роботов. // В сб. Современные технологии в задачах управления, автоматики и обработки информации. Труды XIII международного научно-технического семинара. 2004, Ч.I, Изд-во МГУ, С.5-6.
3. *В.М. Морозов, В.И Каленова, М.А. Салмина, Д.А. Балашов (Лебедев)* Мобильные колесные роботы. Устойчивость и стабилизация стационарных движений. // В сб. Трудов Международной школы-семинара "Адаптивные роботы-2004". Москва - Санкт-Петербург. Международная лаборатория "Сенсорика". С.91-92
4. *Морозов В.М., Кожанов А.А., Балашов (Лебедев) Д.А.* Стабилизация стационарных движений различных моделей одноколесных экипажей. // 2-я международная научная конференция "Аналитическая теория автоматического управления и ее приложения", Саратов, 2005 г. С. 69-70.
5. *V.M. Morozov, V.I. Kalenova, M.A. Salmina, A.A. Kozhanov, D.A. Balashov (Lebedev)* Problems of stability and stabilization of non-holonomic mechanical systems.//Proc. IASTED. Automation, control, and information technology, Novosibirsk, 2005. P. 282-287.
6. *Балашов (Лебедев) Д.А., Каленова В.И., Кожанов А.А., Морозов В.М., Плотникова Л.А.* Моделирование динамики и управления движением

- колесных экипажей. // XIV международный научно-технический семинар "Современные технологии в задачах управления, автоматике и обработки информации", МАИ Алупшта, 2005 г. С.86.
7. *Каленова В.И., Кожанов А.А., Лебедев Д.А., Морозов В.М.* Моделирование движения колесных экипажей и вопросы стабилизации // Международная конференция "Пятые Окуневские чтения". Санкт-Петербург: Тезисы докладов / Балт. Гос. Техн. Ун.-т. - СПб., 2006. - С.16-17.
 8. *Лебедев Д.А.* Устойчивость, стабилизация и моделирование динамики одной модели одноколесного экипажа. // XV международный научно-технический семинар "Современные технологии в задачах управления, автоматике и обработки информации", МАИ Алупшта, 2006 г. С.39
 9. *Лебедев Д.А.* Устойчивость и стабилизация одной модели одноколесного экипажа. // М.: Изд-во Моск. ун-та., Тезисы докладов научной школы конференции Ломоносовские чтения, 2006. С. 103-104.
 10. *Лебедев Д.А.* О математическом моделировании движения одноколесного робота. // Мат. науч. шк. конф. "Мобильные роботы и мехатронные системы", М.: Изд-во Моск. ун-та., 2006 г. С. 68-75.
 11. *Лебедев Д.А.* Моделирование динамики одноколесного робота. // XVI международный научно-технический семинар "Современные технологии в задачах управления, автоматике и обработки информации", МАИ Алупшта, 2007 г. С. 266-267.
 12. *Морозов В.М., Каленова В.И., Салмина М.А., Лебедев Д.А.* Стационарные движения неголономных механических систем. Устойчивость и стабилизация. Конференция, посвященная 300-летию со дня рождения

- Леонарда Эйлера "Классические задачи динамики твердого тела", Донецк, 2007. С. 57-58.
13. *Лебедев Д.А.* Об устойчивости и стабилизации движения одноколесного робота. Вестн. Моск. Ун.-та. Сер. 1, математика, механика. 2008 г. №3. С. 67-70.
 14. *Лебедев Д.А., Морозов В.М.* Исследование устойчивости стационарных движений колесных экипажей при помощи теорем Кельвина-Четаева. //XVII международный научно-технический семинар "Современные технологии в задачах управления, автоматике и обработки информации", МАИ Алуста, 2008 г. С.256-257.
 15. *Морозов В.М., Лебедев Д.А.* Устойчивость и стабилизация стационарных движений одноколесного робота.//10th International Conference "Stability, control and rigid bodies dynamics", Donetsk, 2008. С. 70-71.