МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

На правах рукописи

СОБОЛЕВСКИЙ ПЕТР МИХАЙЛОВИЧ

ЛИНЕЙНЫЕ НЕСТАЦИОНАРНЫЕ СИСТЕМЫ ОПРЕДЕЛЕННОГО КЛАССА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ В МЕХАНИКЕ

Специальность 01.02.01 – Теоретическая механика

АВТОРЕФЕРАТ

Диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

МОСКВА 2008

Работа выполнена на кафедре прикладной механики и управления механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор В.М.Морозов

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор А.И. Матасов

кандидат физико-математических наук В.В. Чугаев

Ведущая организация: Вычислительный центр имени А.А. Дородницына Российской Академии Наук

Защита состоится 19 декабря 2008 года в 16:30 на заседании диссертационного совета Д 501.001.22 при Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова по адресу: 119991, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-10.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ.

Автореферат разослан 19 ноября 2008 года.

Ученый секретарь диссертационного совета Д 501.001.22 доцент В.А. Прошкин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Многие задачи механики приводят к необходимости исследования нелинейных нестационарных систем и их линеаризованных моделей. Для успешного решения этих задач необходимы эффективные, удобные в применении методы исследования процессов, протекающих в линейных нестационарных системах (ЛНС). Поэтому актуальным является разрабатываемое в диссертационной работе направление исследования ЛНС, состоящее в выделении таких классов ЛНС, которые, во-первых, допускают более глубокое исследование, во-вторых, имеют практическое применение в задачах механики.

Цель работы. Диссертация посвящена исследованию вопросов интегрируемости в замкнутой форме, приводимости и устойчивости линейных нестационарных систем первого и второго порядков определенных классов и рассмотрению их приложений к ряду задач механики.

Научная новизна. Все результаты, полученные в работе, являются новыми, ранее неизвестными. Предложен новый подход к анализу устойчивости ЛНС. Сформулировано и доказано утверждение о конечном числе областей устойчивости и неустойчивости в пространстве параметров линейной системы с периодическими коэффициентами, относящейся к специальному или коммутативному классу. При исследовании устойчивости в рассмотренных механических задачах получены новые аналитические результаты.

Достоверность результатов. Все результаты диссертационной работы являются строго обоснованными.

Теоретическая и практическая ценность. Полученные результаты могут быть использованы при изучении вопросов устойчивости программных движений различных механических объектов, линеаризованные модели которых описываются линейными нестационарными системами.

Апробация работы. Результаты, представленные в диссертации, докладывались и обсуждались на следующих научных семинарах и конференциях:

– Международная конференция «Дифференциальные уравнения и их применения». Санкт-Петербург. СПбГТУ. 2000 г.

– The Third International Conference «Tools for mathematical modeling». Санкт-Петербург. 2001 г.
– XXVI академические Чтения по Космонавтике. Москва. ИИЕТ РАН. 2002 г.
– Четвертый международный аэрокосмический конгресс IAC’2003. Москва.
– Международная конференция по механике и баллистике «Пятые Окуневские чтения». Санкт-Петербург. 2006 г.
– Пятый международный аэрокосмический конгресс IAC’2006. Москва.
– Dynamical system modeling and stability investigation. (DSMSI-2007). Киев.2007 г.
– Международный конгресс «Нелинейный динамический анализ-2007», посвященный 150-летию со дня рождения академика А.М.Ляпунова. Санкт-Петербург. 2007 г.
– IX Международная Четаевская конференция «Аналитическая механика, устойчивость и управление движением». Иркутск.2007 г
– Sixth International Symposium on Classical and Celestial Mechanics. Великие Луки. 2007 г.
– Международный семинар имени Е.С. Пятницкого. Устойчивость и колебания нелинейных систем управления. Москва. ИПУ. 2008 г.
– XII Международная научная конференция имени акад. М.Кравчука. Киев. Национальный технический университет Украины «КПИ». 2008 г
– X Международная научная конференции «Устойчивость, управление и динамика твердого тела». Донецк. 2008 г
– Международная конференция по механике и баллистике «Шестые Окуневские чтения». Санкт-Петербург. Балт. гос. техн. ун-т. 2008 г
– Семинар кафедры прикладной механики и управления механико-математического факультета МГУ, октябрь 2001 г., октябрь 2008 г.

Публикации. Основные результаты диссертационной работы изложены в семи печатных работах, одна из которых опубликована в журнале, входящем в перечень ВАК. Список работ приведен в конце автореферата.

Структура работы. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, содержащего 114 наименований. Общий объем диссертации – 116 страниц

Содержание работы.

Во введении описана предметная область и цель диссертационной работы; дан краткий обзор публикаций, связанных с исследованием линейных нестационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений; приведено краткое содержание работы.

В первой главе рассматриваются линейные нестационарные системы вида:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x},\ t \geq t_0 \geq 0; \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{x}(t) = \left(x_1(t),...,x_n(t)\right)^T$ – действительный вектор состояний системы; $\mathbf{A}(t)$ – квадратная матрица с действительными непрерывными элементами на интервале времени $\boldsymbol{I} = [t_0, \infty)$, обладающая определенными свойствами.

В разделе 1.1 описаны основные классы ЛНС, интегрируемых в замкнутой форме, среди которых ряд классов, интересных с точки зрения механики, – системы *коммутативного* и *специального классов*. Такие системы имеют существенное значение для приложений, так как могут быть использованы в качестве базовых моделей при построении приближенных решений систем более сложного вида.

Система (1) относится к *коммутативному классу*[1], если ее матрица $\mathbf{A}(t)$ удовлетворяет следующему условию: существует непрерывно дифференцируемая на интервале $\boldsymbol{I} = \left[t_0, \infty\right)$ матрица $\mathbf{B}(t)$, такая, что для всех $t \in \boldsymbol{I}$ имеет место $\frac{d\mathbf{B}(t)}{dt} = \mathbf{A}(t)$ и $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$. Фундаментальная матрица систем коммутативного класса представляется в виде $\boldsymbol{\Phi}(t, t_0) = \exp \mathbf{B}(t) \exp\left(-\mathbf{B}(t_0)\right)$.

---

[1] Lukes D.L. Differential Equations: Classical to Controlled Mathematics in Science and Engineering. V.162. AP New York. 1982.

Функционально-коммутативные системы, являющиеся подклассом коммутативных, определяются как системы, матрицы коэффициентов которых для любых $t_1, t_2 \in \boldsymbol{I}$ удовлетворяют условию $\mathbf{A}(t_1)\mathbf{A}(t_2) = \mathbf{A}(t_2)\mathbf{A}(t_1)$. Матрица $\mathbf{A}(t)$ в этом случае представима в виде[2]

$$\mathbf{A}(t) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(t)\mathbf{A}_i \tag{2}$$

где $\alpha_i(t)$ – линейно независимые скалярные функции, $\mathbf{A}_i$ – постоянные попарно коммутативные матрицы: $\mathbf{A}_i\mathbf{A}_j = \mathbf{A}_j\mathbf{A}_i$; $i, j = 1,...,m$. Фундаментальная матрица системы (1) в этом случае имеет вид $\mathbf{\Phi}(t,t_0) = \prod_{i=1}^{m} \exp\left(\beta_i(t,t_0)\mathbf{A}_i\right)$, $\beta_i(t,t_0) = \int_{t_0}^{t} \alpha_i(\tau)d\tau$.

Система (1) относится к *специальному классу*[3], если существует такая постоянная матрица $\mathbf{D}$, что матрица коэффициентов $\mathbf{A}(t)$ системы удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \mathbf{D}\mathbf{A}(t) - \mathbf{A}(t)\mathbf{D} \tag{3}$$

Преобразование системы (1) к стационарной системе, сама стационарная система и фундаментальная матрица системы (1) имеют вид:

$$\mathbf{x} = \mathbf{L}(t)\mathbf{y}, \mathbf{L}(t) = \exp\left(\mathbf{D}(t - t_0)\right) \tag{4}$$

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{R}\mathbf{y}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{A}(t_0) - \mathbf{D} = \mathrm{const} \tag{5}$$

$$\mathbf{\Phi}(t,t_0) = \exp\left(\mathbf{D}(t - t_0)\right)\exp\left(\mathbf{R}(t - t_0)\right) \tag{6}$$

В п.п. 1.1.3-1.1.5 работы исследуются ЛНС (1), матрицы которых удовлетворяют условиям, более общим, чем условие (3). Пусть скалярная функция $\varphi(t)$ непрерывна при $t \geq t_0 = 0$, а матрица $\mathbf{G}(t)$ такова, что

---

[2] Морозов В.В. О коммутативных матрицах // Уч. Зап. КГУ. 1952. Т.112. Кн.9. С.17-20.

[3] Wu M.-Y. Some New Results in Linear Time-Varying Systems// IEEE Trans. On Automat. Control. 1975. V. AC-20. № 1. P. 159-161.

$\dot{\mathbf{G}}(t) = \varphi(t)\left(\mathbf{DG} - \mathbf{GD}\right)$, $\mathbf{D} = const$. Тогда, если матрица $\mathbf{A}(t)$ допускает одно из представлений, указанных в Таблице 1, то система (1) при помощи замены времени $\tau(t) = \int_0^t \varphi(\theta)\,d\theta$ и соответствующей замены переменных может быть преобразована к стационарной системе $\dfrac{d\mathbf{y}}{d\tau} = \mathbf{Ry}$.

Таблица 1.

Матрица коэффициентов ЛНС	Замена	Стационарная система $\mathbf{y}'_\tau = \mathbf{Ry}$	Фундаментальная матрица $\mathbf{\Phi}(t,0)$
$\mathbf{A}(t) = \varphi(t)\mathbf{G}(t)$	$\mathbf{x} = \exp\left(\mathbf{D}\tau\right)\mathbf{y}$	$\mathbf{R} = \mathbf{G}(0) - \mathbf{D}$	$\exp\left(\mathbf{D}\tau\right)\exp\left(\mathbf{R}\tau\right)$
$\mathbf{A}(t) = \varphi(t)\mathbf{G}(t) + \mathbf{D}$	$\mathbf{x} = \exp\left(\mathbf{D}t\right)\mathbf{y}$	$\mathbf{R} = \mathbf{G}(0)$	$\exp\left(\mathbf{D}t\right)\exp\left(\mathbf{R}\tau\right)$
$\mathbf{A}(t) = \mathbf{G}(t) + \mathbf{D}\left(\varphi(t) + c\right)$	$\mathbf{x} = \exp\left(\mathbf{D}\tau\right)\mathbf{y}$		$\exp\left(\mathbf{D}\tau\right)\exp\left(\mathbf{R}t\right)$

В качестве примера рассматривается двухгироскопный компас, установленный на корабле, совершающем последовательные циркуляции[4]. Уравнения свободных колебаний компаса представляют собой систему специального класса с матрицей коэффициентов

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\mu\sin 2\omega t & -(\nu + \frac{1}{2}\mu) - \frac{1}{2}\mu\cos 2\omega t \\ (\nu + \frac{1}{2}\mu) - \frac{1}{2}\mu\cos 2\omega t & -\frac{1}{2}\mu\sin 2\omega t \end{pmatrix},$$

которая представляется в виде $\mathbf{A}(t) = \mathbf{G}(t) + \mathbf{D}\left(\varphi(t) + c\right)$, где

$$\varphi(t) = \omega,\ c = -\left(\nu + \tfrac{1}{2}\mu + \omega\right),\ \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{G}(t) = -\tfrac{1}{2}\mu\begin{pmatrix} -\sin 2\omega t & \cos 2\omega t \\ \cos 2\omega t & \sin 2\omega t \end{pmatrix}.$$

В п. 1.1.7 обсуждается вопрос о принадлежности системы (1) одновременно к специальному и коммутативному классам, приведены примеры таких систем. Для одного вида коммутативных матриц $\mathbf{A}(t)$, где

$$\mathbf{A}(t) = \left\| a_{ij}(t) \right\|,\ a_{ij}\left(t\right) = \left(-1\right)^{i-1} C_{n-1}^{i-1}\, t^{n-1-i+j},\ i, j = 1,\ldots,n,$$

[4] Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами. М.: Наука. 1972. -718с.

$$C_l^k = \frac{l!}{k!(l-k)!}$$ – биномиальные коэффициенты,

показана принадлежность к специальному классу. Постоянная матрица $\mathbf{D} = \|d_{ij}\|$ при этом определяется соотношениями: $d_{ij} = -i\,\delta_{i+1,j}$, где $\delta_{k,l}$ – символ Кронекера, $i = 1,\ldots,n-1$.

В разделе 1.2 исследуются ЛНС с периодическими коэффициентами специального и функционально-коммутативного классов. Указан явный вид преобразований переменных, приводящих ЛНС специального и функционально-коммутативного классов к стационарным системам, и показано, что эти преобразования являются преобразованиями Ляпунова. Это дает возможность делать эффективные заключения об устойчивости ЛНС этих классов, основываясь на выводах для стационарных систем.

В п. 1.2.3 сформулированы и доказаны принципиальные утверждения о том, что в пространстве параметров систем с периодическими коэффициентами функционально-коммутативного и специального классов число областей устойчивости и неустойчивости конечно. Рассмотрены методические примеры.

Традиционно при исследовании устойчивости системы $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$ матрица коэффициентов представляется в виде двух слагаемых $\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1(t)$, $\|\mathbf{A}_1(t)\| < \delta$, одно из которых постоянное, а другое – малое. Из свойств устойчивости невозмущенной системы $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_0\mathbf{x}$ при выполнении определенных условий делаются выводы об устойчивости исходной ЛНС. В разделе 1.3 главы 1 предлагается модификация этого метода, состоящая в следующем: предположим, что матрица $\mathbf{A}(t)$ допускает представление

$$\mathbf{A}(t) = \widetilde{\mathbf{A}}_0(t) + \widetilde{\mathbf{A}}_1(t), \tag{7}$$

причем ЛНС $\dot{\mathbf{x}} = \widetilde{\mathbf{A}}_0(t)\mathbf{x}$ является интегрируемой в замкнутой форме, а матрица $\widetilde{\mathbf{A}}_1(t)$ по-прежнему мала. В таком случае при помощи конструктивного преобразования $\mathbf{x} = \mathbf{L}(t)\mathbf{y}$ можно перейти к другой ЛНС $\dot{\mathbf{y}} = \left(\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1(t)\right)\mathbf{y}$. При этом если матрицы $\mathbf{L}(t)$ и $\mathbf{L}^{-1}(t)$ ограничены, то и матрица $\mathbf{B}_1(t)$ мала. При исследовании устойчивости ЛНС с матрицей $\mathbf{A}(t)$, допускающей указанную декомпозицию, применение предлагаемого метода оказывается более эффективным, так как информация о динамическом объекте, содержащаяся в коэффициентах матрицы, используется более полно, и полученное заключение об устойчивости является более точным.

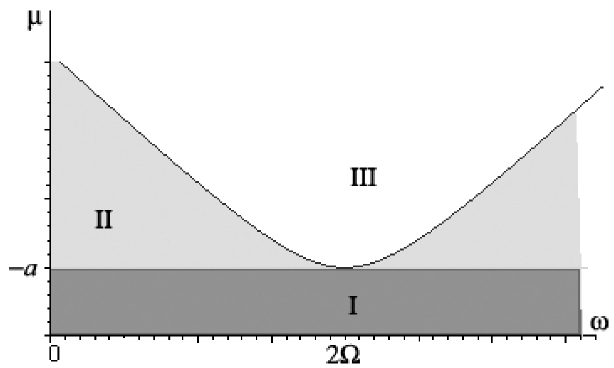
Например, исследуя устойчивость ЛНС $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$ с матрицей коэффициентов

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} a & \Omega \\ -\Omega & a \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ -\sin\omega t & -\cos\omega t \end{pmatrix} \tag{8}$$

различными способами (с помощью теоремы Беллмана, неравенства Важевского или построив функцию Ляпунова в виде квадратичной формы от координат) как устойчивость системы с «почти постоянной» матрицей коэффициентов, можно получить следующие достаточные условия асимптотической устойчивости системы (область I на Рис.1)

$$a < 0, \ |\mu| < |a| \tag{9}$$

Рис. 1



С другой стороны, эта система принадлежит к специальному классу и приводима при помощи преобразования Ляпунова $\mathbf{x} = \mathbf{L}(t)\mathbf{y}$ к стационарной системе $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{R}\mathbf{y}$, где

$$\mathbf{L}(t) = \begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}, \ \ \mathbf{R} = \begin{pmatrix} a+\mu & \Omega - \omega/2 \\ -\Omega + \omega/2 & a-\mu \end{pmatrix}.$$

Необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости стационарной системы имеют вид

$$a < 0, \quad \mu^2 < a^2 + \left(\Omega - \tfrac{1}{2}\omega\right)^2 \tag{10}$$

Область устойчивости, определяемая неравенствами (10) (области I и II на Рис.1), существенно больше, чем область I, определяемая условиями (9). Отметим, что при $a=0$ ЛНС (8) не является асимптотически устойчивой, и на основании известных теорем никаких суждений о характере ее устойчивости сделать нельзя. Однако, из условий (10) следует, что система (8) устойчива, если амплитуда параметрического воздействия μ удовлетворяет условию $|\mu|<|\Omega-\frac{1}{2}\omega|$.

Во второй главе рассматриваются нестационарные системы второго порядка

$$\mathbf{N}_1(t)\ddot{\mathbf{x}}+\mathbf{N}_2(t)\dot{\mathbf{x}}+\mathbf{N}_3(t)\mathbf{x}=\mathbf{0} \tag{11}$$

Здесь $\mathbf{x}(t)=\left(x_1(t),...,x_n(t)\right)^T$ – действительный вектор состояний системы; $\mathbf{N}_i(t)$ – квадратные матрицы с действительными непрерывными элементами на интервале времени $\boldsymbol{I}=[t_0,\infty)$.

В виде (11) можно представить уравнения движения голономной механической системы, линеаризованные в окрестности некоторого программного движения. Дополнительно предполагается принадлежность матриц коэффициентов к специальному классу:

$$\dot{\mathbf{N}}_i=\mathbf{D}\mathbf{N}_i-\mathbf{N}_i\mathbf{D},\ \mathbf{D}=const,\ i=1,\,2,\,3. \tag{12}$$

Показано, что в этом случае ЛНС при помощи замены $\mathbf{x}=\exp\left(\mathbf{D}t\right)\mathbf{y}$ преобразуется к стационарной системе

$$\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{y}}+\mathbf{G}\,\dot{\mathbf{y}}+\mathbf{K}\,\mathbf{y}=\mathbf{0}, \tag{13}$$

$$\mathbf{M}=\mathbf{N}_{10},\ \mathbf{G}=2\mathbf{N}_{10}\mathbf{D}+\mathbf{N}_{20},\ \mathbf{K}=\mathbf{N}_{10}\mathbf{D}^2+\mathbf{N}_{20}\mathbf{D}+\mathbf{N}_{30},\ \mathbf{N}_{i0}=\mathbf{N}_i(t_0).$$

Этот класс ЛНС имеет прикладное значение (см. главу 3).

В п. 2.1.1 определены условия, при которых замена $\mathbf{x}=\exp\left(\mathbf{D}t\right)\mathbf{y}$ будет преобразованием Ляпунова. В этом случае исследование устойчивости ЛНС (11) можно проводить на основании характеристического уравнения стационарной системы (13) или при помощи теорем Кельвина-Четаева и их обобщений.

В п. 2.1.2 рассматривается случай $\mathbf{N}_1(t) = \mathbf{E}$, $\mathbf{N}_2(t) = \mathbf{N}_{20} = -\mathbf{N}_{20}^T$, $\mathbf{DN}_{20} = \mathbf{N}_{20}\mathbf{D}$ и $\mathbf{N}_3(t) = \mathbf{N}_3^T(t)$, для которого определены достаточные условия устойчивости.

Далее рассмотрен пример ЛНС (11)

$$\mathbf{N}_1(t) = \mathbf{E},\ \mathbf{N}_2 = \begin{pmatrix} 0 & g \\ -g & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{N}_3(t) = \begin{pmatrix} a + \mu\cos t & 0 \\ 0 & a + \mu\cos t \end{pmatrix},$$

который демонстрирует существенное отличие нестационарных систем от стационарных: в стационарных консервативных системах введение гироскопических сил не нарушает устойчивости, а при четной степени неустойчивости в некоторых случаях может быть обеспечена гироскопическая стабилизация. В системе с потенциальными нестационарными силами введение стационарных гироскопических сил может привести как к сохранению свойств устойчивости и неустойчивости, так и к гироскопической стабилизации или к гироскопической дестабилизации.

В п. 2.1.3 рассмотрены «почти приводимые» системы 2-го порядка (11), в которых

$$\mathbf{N}_i(t) = \mathbf{N}_i^0(t) + \varepsilon\,\mathbf{R}_i(t,\varepsilon), \tag{14}$$

где ε – мало, $\mathbf{R}_i(t,\varepsilon)$ – ограничены, а матрицы $\mathbf{N}_i^0(t)$ удовлетворяют условию (12). Для таких «почти приводимых» систем сформулированы и доказаны утверждения, аналогичные теоремам Беллмана, определяющим достаточные условия устойчивости для ЛНС с почти постоянной матрицей. А именно, ЛНС (11) будет устойчива, если устойчива стационарная система (13) и сходятся интегралы $\int_0^\infty \left\|\mathbf{R}_i(\tau,\varepsilon)\right\| d\tau < \infty$; ЛНС (11) будет асимптотически устойчива, если асимптотически устойчива стационарная система (13) и $\mathbf{R}_i(t,\varepsilon) \to \mathbf{0}$ при $t \to \infty$.

В третьей главе рассматриваются механические задачи, математическими моделями которых являются линейные нестационарные системы, интегрируемые в замкнутой форме или близкие к интегрируемым.

В разделе 3.1 рассматривается задача о колебаниях электроверетена (о колебаниях опоры вала). Электроверетено представляет собой неуравновешенный вал, вращающийся на двух подшипниках внутри корпуса опоры. Опора стоит на трех упругих амортизаторах, закрепленных на неподвижном основании. При вращении вала с большой угловой скоростью корпус опоры колеблется.

Малые колебания корпуса опоры описываются ЛНС 2-го порядка с периодическими коэффициентами

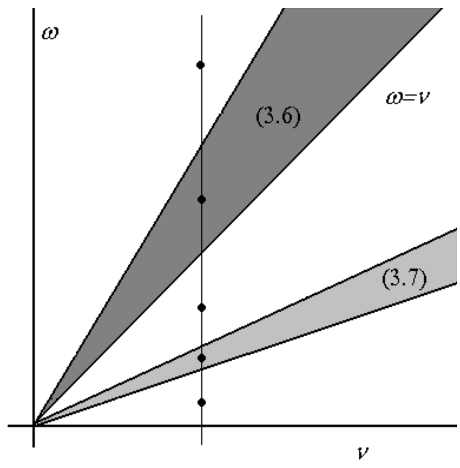
$$\mathbf{N}_1(t)\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{N}_2(t)\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{N}_3(t)\mathbf{x} = 0, \tag{15}$$

$$\mathbf{N}_1 = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon\sin^2\omega t & \frac{1}{2}\varepsilon\sin 2\omega t \\ \frac{1}{2}\varepsilon\sin 2\omega t & 1+\varepsilon\cos^2\omega t \end{pmatrix},\ \mathbf{N}_2 = \varepsilon\omega \begin{pmatrix} \sin 2\omega t & -2\sin^2\omega t \\ 2\cos^2\omega t & -\sin 2\omega t \end{pmatrix}, \mathbf{N}_3 = \nu^2\mathbf{E}.$$

Здесь $\mathbf{x} = (\alpha,\ \beta)^T$, α и β – углы отклонения от вертикали оси симметрии корпуса опоры, ω– угловая скорость вращения вала, ν – собственная частота колебаний корпуса опоры, ε – безразмерный положительный малый параметр.

Задача ранее исследовалась в работе[5] на основе теории параметрического резонанса. В предположении малости некоторых параметров там была построена область неустойчивости в пространстве параметров задачи: $\nu(1-\frac{3}{8}\varepsilon)+O(\varepsilon^2) < \omega < \nu(1-\frac{1}{8}\varepsilon)+O(\varepsilon^2)$ (область (3.7) на Рис. 2).

Рис. 2



[5] Якубович В.А., Старжинский В.М. Параметрический резонанс в линейных системах. М.: Наука, 1987. - 328 с.

В работе показано, что система (15) принадлежит к специальному классу, и для нее указано преобразование Ляпунова, приводящее систему к стационарной $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}}+\mathbf{G}\dot{\mathbf{y}}+\mathbf{K}\mathbf{y}=0$,

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1+\varepsilon\end{pmatrix},\ \mathbf{G}=\begin{pmatrix}0 & 2\omega\\ -2\omega & 0\end{pmatrix},\ \mathbf{K}=\begin{pmatrix}\nu^2-\omega^2 & 0\\ 0 & \nu^2-\omega^2(1-\varepsilon)\end{pmatrix}$$

Из анализа необходимых и достаточных условий устойчивости стационарной системы получена точная область неустойчивости (область (3.6) на Рис.2) $\nu<\omega<\nu\big/\sqrt{1-\varepsilon}$, которая не совпадает с указанной выше областью. Численное моделирование подтвердило корректность полученных в работе результатов: неограниченный рост решений имеет место только в области (3.6).

В разделе 3.2 исследуется устойчивость стационарного движения космического аппарата с двойным вращением. Космический аппарат с двойным вращением представляет собой свободную систему, состоящую из двух несимметричных тел, вращающихся вокруг общей оси. При этом одно из тел вращается относительно другого с постоянной относительной скоростью. Составлены уравнения движения системы, которые допускают частное решение, представляющее собой вращение обоих тел вокруг общей оси с разными постоянными угловыми скоростями. В линеаризованных в окрестности этого решения уравнениях возмущенного движения выделяется подсистема относительно возмущений проекций угловой скорости на оси, ортогональные оси совместного вращения. Эта система представляет собой «почти приводимую» ЛНС с периодическими коэффициентами:

$$\mathbf{M}_1(\tau)\frac{d\mathbf{x}}{d\tau}=\mathbf{M}_2(\tau)\mathbf{x},\qquad \mathbf{M}_1=\begin{pmatrix}1+\varepsilon+\varepsilon'\cos 2\alpha\tau & \varepsilon'\sin 2\alpha\tau\\ \varepsilon'\sin 2\alpha\tau & 1-\varepsilon-\varepsilon'\cos 2\alpha\tau\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}_2=\begin{pmatrix}\varepsilon'\left(2r'-r\right)\sin 2\alpha\tau & -1+r(\varepsilon-1)-\varepsilon'\left(2r'-r\right)\cos 2\alpha\tau\\ 1-r\left(\varepsilon+1\right)-\varepsilon'\left(2r'-r\right)\cos 2\alpha\tau & -\varepsilon'\left(2r'-r\right)\sin 2\alpha\tau\end{pmatrix}$$

Малым параметром ε является мера несимметричности одного из тел, характеризуемая приведенной разностью моментов инерции относительно осей, ортогональных оси вращения. Декомпозиция типа (7) коэффициентов ЛНС на интегрируемую и малую составляющие такова:

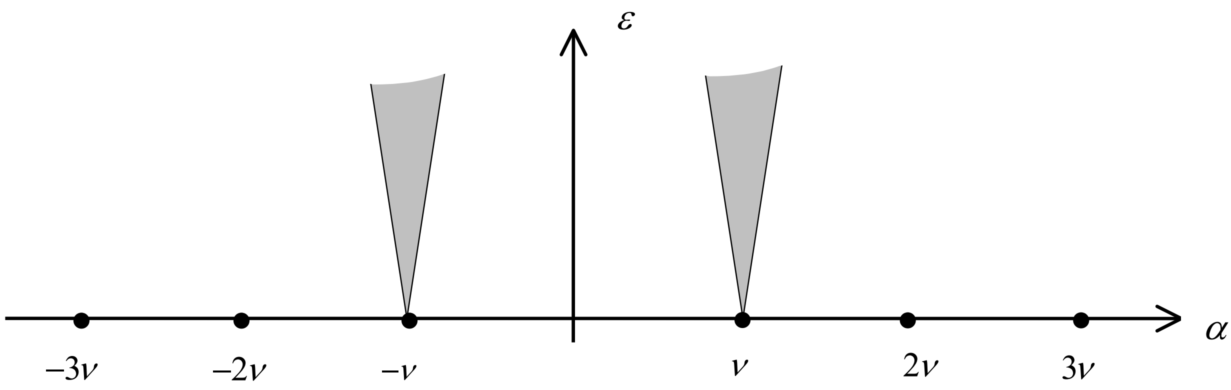
$$\mathbf{M}_1(\tau) = \mathbf{M}_{11}(\tau) + \varepsilon\mathbf{M}_{12}(\tau), \qquad \mathbf{M}_2(\tau) = \mathbf{M}_{21}(\tau) + \varepsilon\mathbf{M}_{22}(\tau)$$

Невозмущенная $(\varepsilon = 0)$ система принадлежит к специальному классу (3), следовательно, интегрируема; для нее получены необходимые условия устойчивости. При $\varepsilon > 0$ в окрестности некоторых значений частоты α относительного вращения двух тел возможен параметрический резонанс. Для этого случая найдены поправки χ_1 к характеристическим показателям $\chi(\varepsilon)$ системы с точностью до членов первого порядка малости по ε:

$$\chi(\varepsilon) = \chi_0 + \varepsilon\chi_1 + \ldots, \qquad \chi_1 = \pm\left|\frac{r(1+r-2r')}{2(r'-r)(1-\varepsilon'^2)}\right|,$$

и определены области неустойчивости в пространстве параметров α, ε (см. Рис. 3).

Рис. 3



В разделе 3.3 рассмотрена двухканальная гироскопическая следящая система с модуляцией и одним безынерционным каналом переменного тока. Уравнения движения такой системы при отсутствии случайных воздействий получены в работе Ю.Г. Бондарос:

$$\ddot{\alpha} + k_0\omega\dot{\beta} = -u(t)\sin\omega t, \quad \ddot{\beta} - k_0\omega\dot{\alpha} = u(t)\cos\omega t$$

Здесь α и β – углы, определяющие положение оси гироскопа; ω – угловая скорость вращения ротора гироскопа; $k_0\omega$ – относительный кинетический момент, $k_0 = \text{const} > 0$; $u(t)$ – управляющий момент, выражение для которого принято в виде

$$u(t) = 2k_2\left(\dot{\beta}\cos\omega t - \dot{\alpha}\sin\omega t\right) + 2k_1\left(\alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t\right),$$

где постоянные коэффициенты k_1 и k_2 подлежат выбору.

Такую ЛНС можно записать в виде системы 2-го порядка специального класса (11) $\mathbf{N}_1(t)\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{N}_2(t)\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{N}_3(t)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, где $\mathbf{x} = (\alpha, \beta)^T$, $\mathbf{N}_1(t) = \mathbf{E}$,

$$\mathbf{N}_2 = \begin{pmatrix} -k_2\left(1-\cos 2\omega t\right) & k_0\omega + k_2\sin 2\omega t \\ -k_0\omega + k_2\sin 2\omega t & -k_2\left(1+\cos 2\omega t\right) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N}_3 = k_1\Omega\begin{pmatrix} \sin 2\omega t & 1-\cos 2\omega t \\ -1-\cos 2\omega t & -\sin 2\omega t \end{pmatrix}.$$

Для этой системы приведено преобразование Ляпунова, приводящее ее к стационарной системе. Получены необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости: $k_2 < 0$, $0 < k_1 < -k_0 k_2$ при $k_0 \neq 1$ и $k_0 \neq 2$; при $k_0 = 1$ или $k_0 = 2$ система будет просто устойчива.

В разделе 3.4. рассматривается задача о пространственном гирогоризонткомпасе, уравнения малых колебаний которого в рамках прецессионной теории гироскопов, представляют собой ЛНС вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}, \quad \mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & \omega_0 & 0 & \Omega(t) \\ -\omega_0 & 0 & \Omega(t) & 0 \\ 0 & -\Omega(t) & 0 & -\omega_0 \\ -\Omega(t) & 0 & \omega_0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{16}$$

где переменными $\mathbf{x} = \left(x_1, x_2, x_3, x_4\right)^T$ обозначены следующие величины: $x_1 = \left(V(t)\big/\sqrt{gR}\right)\delta_1$, $x_2 = \delta_2$, $x_3 = \delta_3$, $x_4 = \left(2B\sin\varepsilon_0\big/ml\sqrt{gR}\right)\delta_4$; δ_i – углы, определяющие ориентацию осей чувствительности элемента в некоторой неподвижной системе координат; $V(t)$ – величина абсолютной скорости точки подвеса гирогоризонткомпаса; $\Omega(t)$ –проекция абсолютной угловой скорости чувствительного элемента гироскопа на вертикаль; $\omega_0 = \sqrt{g/R}$ – частота Шулера; m, l, ε_0, B – величины, связанные с параметрами конструкции гирокомпаса.

Эти уравнения были получены в работе А.Ю. Ишлинского и решены при помощи метода «комплексной компрессии», а их приводимость была исследована в работе В.Н. Кошлякова. Такая ЛНС является функционально-коммутативной системой (2), которая преобразуется к стационарной. При наличии диссипативных сил система (16) уже не является функционально-коммутативной, но может быть рассмотрена как «почти приводимая». Устойчивость этой ЛНС исследована в разделе 3.4. методами, изложенными во второй главе, а также при помощи функции Ляпунова, построенной для нестационарной системы.

В заключении кратко сформулированы основные результаты работы:

1. Сформулированы и доказаны принципиальные утверждения о том, что в пространстве параметров ЛНС с периодическими коэффициентами специального и функционально-коммутативного классов число областей устойчивости и неустойчивости конечно.
2. Предложен новый подход к анализу устойчивости ЛНС, основанный на декомпозиции матрицы коэффициентов на две части, одна их которых соответствует ЛНС, интегрируемой в замкнутой форме, а другая является малой. Применение предлагаемого метода оказывается более эффективным, так как информация о динамическом объекте, содержащаяся в коэффициентах исходной матрицы, используется более полно, и полученное заключение об устойчивости является более точным.
3. Рассмотрен класс систем второго порядка, приводимых к стационарным системам при помощи конструктивного преобразования. Для таких систем исследование устойчивости проводится на основании анализа характеристического уравнения стационарной системы или при помощи теорем Кельвина-Четаева и их обобщений. Для систем, близких к приводимым, сформулированы и доказаны утверждения аналогичные известным теоремам для систем с почти постоянной матрицей коэффициентов.
4. В рассмотренных механических задачах применение предложенных методов позволило получить новые результаты:

1) в задаче о колебаниях опоры вала получены точные области устойчивости и неустойчивости;

2) в задаче о движении космического аппарата с двойным вращением получены аналитические выражения для границ областей устойчивости и неустойчивости;

3) в задаче о движении гирогоризонткомпаса исследовано влияние диссипативных сил и получены достаточные условия устойчивости.

По теме диссертации опубликованы следующие работы:

1. В.М.Морозов, В.И.Каленова, П.М.Соболевский. Об устойчивости нестационарных механических систем специального класса// Труды IX Междунар. Четаевской конф. «Аналитическая механика, устойчивость и управление движением». Иркутск. Т.2. С. 101-107.
2. В.И.Каленова, В.М.Морозов, П.М.Соболевский. Об устойчивости механических систем определенного класса. ПММ. Т.72. Вып.8. 2008. С. 251-259.
3. В.И.Каленова, В.М.Морозов, П.М.Соболевский. К вопросу об исследовании линейных нестационарных систем. Вестник МГУ. 2009. №1 С. 51-61. (в печати).
4. В.М.Морозов, П.М.Соболевский. К задаче об устойчивости стационарного движения спутника с двойным вращением. Сборник трудов «Пятый международный аэрокосмический конгресс IAC'06». Информ. № 0320702706. 2007. С.242-244.
5. В.И.Каленова, В.М.Морозов, П.М.Соболевский. Об устойчивости многомерных нестационарных линейных систем второго порядка. Международная конф. по механике и баллистике «Шестые Окуневские чтения». Материалы докл. Т.1. Санкт-Петербург: Балт. гос. техн. ун-т. 2008. С. 124-126.
6. В.М.Морозов, В.И.Каленова, П.М.Соболевский. Устойчивость нестационарных динамических систем определенного класса. // Тез.докл.

международн. конгресса «Нелинейный Динамический Анализ-2007» Санкт-Петербург. 2007. С. 155.

7. В.М.Морозов, В.И.Каленова, П.М.Соболевский. Многомерные нестационарные системы второго порядка и их приложения в механике. Тез. докл. Устойчивость, управление и динамика твердого тела. Донецк. 2008. С. 69-70.