МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 517.957

Жарова Наталия Валентиновна

ИССЛЕДОВАНИЕ ПО ПРОБЛЕМЕ ОБОБЩЕННОГО И НЕПОЛНОГО РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ В НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ

01.01.02 — дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2008

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	кандидат физико-математических наук, доцент Эмиль Ренольдович Розендорн.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Валентин Федорович Зайцев, Российский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена;
	доктор физико-математических наук, профессор Дмитрий Дмитриевич Соколов, МГУ имени М.В. Ломоносова.
Ведущая организация:	Институт математического моделирования РАН

Защита состоится 26 декабря 2008 года в 16 часов 40 минут на заседании диссертационного совета Д.501.001.85 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 26 ноября 2008 года.

Ученый секретарь диссертационного совета
Д.501.001.85 при МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор И.Н. Сергеев

Общая характеристика работы.

Актуальность темы. Математическое описание многих физических процессов приводит к уравнениям с частными производными, одним из основных методов поиска точных решений которых является метод Фурье разделения переменных, когда после подстановки специального вида решения $u(x)+v(y)$ или $u(x)v(y)$ получается уравнение, левая часть которого не зависит от x, а правая — от y. Будучи равными между собой, обе части уравнения не зависят ни от x, ни от y, и, следовательно, равны некоторой произвольной постоянной; поэтому мы приходим к дифференциальным уравнениям на функции одного переменного. Если же после подстановки специального вида решения правая часть равна 0, а левая часть является суммой произведений функций одного переменного, содержащей более двух слагаемых, то применение леммы Фурье невозможно. В этом случае мы будем говорить об обобщенном разделении переменных.

В данной работе использован метод обобщенного разделения переменных, основанный на лемме Э.Р. Розендорна[1]:

Лемма. *Пусть* $\overline{\alpha} = \{\alpha_1(x_1), \ldots, \alpha_n(x_1)\}$ *- система* n *функций, заданных на промежутке* I_1 *числовой оси* OX, $\overline{\beta} = \{\beta_1(x_2), \ldots, \beta_n(x_2)\}$ *система* n *функций, заданных на промежутке* I_2 *числовой оси* OY. *Пусть, кроме того,*

$$\alpha_1(x_1)\beta_1(x_2) + \ldots + \alpha_n(x_1)\beta_n(x_2) = 0 \quad \text{на } I_1 \times I_2, \tag{1}$$

тогда $\operatorname{rank}\overline{\alpha} + \operatorname{rank}\overline{\beta} \leq n$.

Если при этом $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}$ *максимальная линейная независимая подсистема в* $\overline{\alpha}$, *причем*

$$\alpha_{p+k} = \sum_{i=1}^{p} d_{ki}\alpha_i, \quad k = \overline{1,q}, \quad q = n - p,$$

то функции $\beta_1, \ldots, \beta_p$ *линейно выражаются через* $\beta_{p+1}, \ldots, \beta_n$, *а именно*

$$\beta_i = -\sum_{k=1}^{q} d_{ki}\beta_{p+k}, \quad i = \overline{1,p}.$$

Ранее уравнение вида (1) было рассмотрено в работах М.Х. Мартина[2,3]. Однако в них применялся несколько иной, геометрический подход для поиска

[1] *Розендорн Э.Р.* Некоторые классы частных решений уравнения $z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 + a\,\mathrm{grad}\,z = 0$ и их приложение к задачам метеорологии. // Вестник МГУ. Мат., мех., 1984, № 2, С. 56-58.

[2] *Martin M.H.* A Generalization of the method of separation of variables // J. Rational Mech. and Analysis, 2, № 2, 1953, P. 315-327.

[3] *Martin M.H.* The fundamental solution of $\triangle\psi + e(y)\psi_y = 0$ // Duke Mathematical Journal, 18, 1951, P. 845-858.

решений с разделяющимися переменными. Продолжением работ М.Х. Мартина являются работы П.И. Каленюка[4].

Те или иные виды частных решений и уравнений, допускающих разделение переменных, рассматривались многими авторами.

С.С. Титовым[5] сформулирован метод "конечных колец", и для ряда уравнений получены решения, не являющиеся многочленами ни по одной из переменных. В качестве примеров найдены новые точные решения преобразованного уравнения минимальных поверхностей и уравнения Трикоми.

В.А. Галактионвым и С.А. Посашковым[6] предложен способ построения решений вида $v(t,x) = \varphi(t)[\psi(t)+\theta(x)]$ квазилинейных параболических уравнений нелинейной теплопроводности с источником.

Позднее авторами[7,8] был представлен более общий подход к поиску решений для нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными вида $T^p(v) = X^q(v)$, где $T^p(v)$ — многочлен степени p от функции $v(x,t)$ и ее производных по t, а $X^q(v)$ — многочлен степени q от функции v и ее производных по x. Решения искались в виде $v(x,t) = \sum\limits_{i=1}^{k} f_i(x)a_i(t)$, где $f_i(x), a_i(t)$, $i = \overline{1,k}$, — гладкие функции, подлежащие определению.

В работах А.Д. Полянина, В.Ф. Зайцева, А.И. Журова[9,10,11,12] рассмотрено много нелинейных уравнений математической физики разных типов (в том числе и уравнений, зависящих от произвольных функций), которые допускают решения с обобщенным разделением переменных.

Уравнения с разделяющимися переменными возникают, в частности, в метеорологии при построении моделей тропических циклонов, если принять некоторые дополнительные допущения. Описание движения циклонов, скоростей ветра внутри циклона, а также температуры, давления, влажности в зоне циклона всегда являлось важной задачей с точки зрения уменьшения

---

[4] *Каленюк П.И.* Обобщение метода разделения переменных. // Укр. матем. журнал, 1974, Т. 26, № 5, С. 652-657.

[5] *Титов С.С.* О представлении решений линейных уравнений с частными производными в виде конечных сумм. // Матем. заметки, 1976, Т. 20, № 3, С. 359–363.

[6] *Галактионов В.А., Посашков С.А.* О новых точных решениях параболических уравнений с квадратичными нелинейностями. // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1989, Т. 29, № 4, С. 497–506.

[7] *Galaktionov V.A.* Invariant subspaces and new explicit solutions to evolution equations with quadratic nonlinearities. // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect. A. 1995, V. 125, № 2, P. 225–246.

[8] *Галактионов В.А., Посашков С.А., Свирщевский С.Р.* Обобщенное разделение переменных для дифференциальных уравнений с полиномиальными нелинейностями. // Дифференц. уравнения, 1995, Т. 31, № 2, С. 253–261.

[9] *Полянин А.Д., Журов А.И.* Точные решения нелинейных уравнений механики и математической физики. // Докл. РАН. 1998, Т. 360, № 5, С. 640–644.

[10] *Полянин А.Д., Журов А.И.* Обобщенное и функциональное разделение переменных в математической физике и механике. // Докл. РАН. 2002, Т. 382, № 5, С. 606–611.

[11] *Зайцев В.Ф., Полянин А.Д.* Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными: Точные решения.– М.: Междунар. программа образования, 1996, 496 с.

[12] *Полянин А.Д., Зайцев В.Ф.* Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: Точные решения.– М.: Физматлит, 2000, 432 с.

вредоносного действия циклонов и предотвращения разрушений и человеческих жертв. При этом ряд исследований направлен на численное решение возникающих систем уравнений, другие же авторы идут по пути поиска таких условий на данные задачи, чтобы удалось найти либо сразу точное решение полученной системы, либо получать точное выражение на каждом шаге некоторого итерационного процесса. Ко второму направлению относяся работы В.В. Шулейкина[13], А.П. Хаина и Е.А. Агренича[14], Э.Р. Розендорна и В.Н. Сидякиной[15], Х.Л. Куо[16], Н.А. Слезкина[17]. В последней работе строится решение с разделенными переменными.

Кроме обобщенного разделения переменных, А.Д. Поляниным[18,19] применяется метод неполного разделения переменных, то есть решения ищутся в виде $w(x_1,\ldots,x_n,t)=\sum\limits_{k=1}^{n} w_k(x_k,t)$ или $w(x_1,\ldots,x_n,t)=\prod\limits_{k=1}^{n} w_k(x_k,t)$ с разделенными простанственными переменными $x_1,\ldots,x_n$, но без выделенного в отдельное слагаемое или множитель члена, зависящего от времени t.

Цель работы. Цель диссертации исследовать методы неполного и обобщенного разделения переменных; найти новые классы уравнений, допускающих применение этих методов, а также найти решения конкретных систем уравнений, возникающих в приложениях.

Методы исследований. В диссертации использованы современные методы теории уравнений с частными производными.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. найдены решения с разделенными переменными для некоторого класса нелинейных систем уравнений;

2. для одной модели тропического циклона найдены выражения для скоростей движения воздушных масс, согласующиеся с реально наблюдаемыми явлениями;

3. для некоторых классов уравнений показано, что влияние на результат неполного разделения переменных произвольных функций переменно-

[13] *Шулейкин В.В.* Расчет развития, движения и затухания тропических ураганов и главных волн, создаваемых ураганами.– Л: Гидрометеоиздат, 1978, 96 с.

[14] *Хаин А.П., Агренич Е.А.* О способах расчета угла поворота ветра в пограничном слое тропического циклона. // Труды ГМЦ СССР, 1981, вып. 224, С. 64-70.

[15] *Розендорн Э.Р., Сидякина В.Н.* К вопросу о вычислении радиальной составляющей скорости ветра в модели тропического циклона. // Труды ГМЦ СССР, 1979, вып. 190, С. 111-119.

[16] *Куо Х.Л.* Динамика конвективных вихрей и образование галаза. В кн.: Атмосфера и океан в движении.– М., Изд-во иностр. лит-ры, 1963, С. 237-251.

[17] *Слезкин Н.А.* Гидродинамическая модель тайфуна с учетом вращения Земли. // Изв. АН СССР, Физика атм. и океана. 1990, Т. 26, № 5, С. 493-501.

[18] *Полянин А.Д.* Преобразованные и точные решения уравнений пограничного слоя, содержащие произвольные функции. // Докл. РАН. 2001, Т. 379, № 3, С. 334–339.

[19] *Полянин А.Д.* Неполное разделение переменных в нестационарных задачах механики и математической физики. // Докл. РАН. 2000, Т. 375, № 4, С. 476–480.

го t, возникающих в методе А.Д. Полянина, определяется решением вспомогательного дифференциального уравнения; для тех же классов сформулированы и доказаны достаточные условия существования решений с неполным разделением переменных.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит как теоретический, так и практический характер. Результаты диссертации могут быть использованы при поиске точных решений нелинейных систем уравнений, возникающих в приложениях. Полученные таким образом решения имеют значительную ценность, поскольку они получены без использования численных методов; по ним легче проследить зависимость от тех или иных параметров задачи; их можно использоваться для проверки работоспособности численных моделей, а также для построения начальных приближений в численных методах.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на следующих семинарах

"Асимптотические методы в теории дифференциальных уравнений" под рук-вом проф. А.С. Шамаева, проф. Т.А. Шапошниковой, проф. В.В. Жикова механико-математического ф-та МГУ им. М.В. Ломоносова, 2003;

на межфакультетском семинаре "Математические вопросы динамики атмосферы и гидросферы" под рук-вом проф. А.В. Кислова, доц. Э.Р. Розендорна в МГУ им. М.В.Ломоносова, 2003-2006 (неоднократно);

на семинаре Научно-Исследовательского Вычислительного Центра МГУ под рук-вом проф. Д.Д. Соколова, 2008;

а также на Шестом Всероссийском Симпозиуме по прикладной и промышленной математике, г. Сочи - Дагомыс, 2005 г.

Публикации. Основные результаты опубликованы в трех работах, одна из них в журнале из перечня ВАК.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, содержащего 46 наименований. Общий объем диссертации составляет 96 страниц.

Краткое содержание диссертации.

Во **введении** содержится обзор исследований по тематике настоящей диссертации, приводятся формулировки лемм и методов, непосредственно связанных с темой диссертации.

Первая глава состоит из 7 параграфов и посвящена методу обобщенного разделения переменных.

В §1.1 обсуждаются леммы Э.Р. Розендора и М.Х. Мартина. Обе леммы дают необходимые и достаточные условия, которые требуется наложить на функции $\alpha_1(x), \ldots, \beta_n(y)$, чтобы выполнялось равенство $\sum\limits_{m=1}^{n} \alpha_m(x)\beta_m(y) = 0$.

В этом смысле леммы равносильны, и, следовательно, между условиями на функции $\alpha_1(x), \ldots, \beta_n(y)$ из обеих лемм должна существовать алгебраическая взаимосвязь. В § 1.1 эта взаимосвязь получена.

В §§ 1.2 и 1.3 описаны классы линейных уравнений и уравнений со степенными нелинейностями, допускающих применение метода обобщенного разделения переменных. В §1.4 выделяются некоторые классы нелинейных уравнений с частными производными и тех их решений, которые допускают представление в виде (1). А именно, положим

$$\mathbb{F}_s^T(\varphi_1, \ldots, \varphi_s) = \sum_{k=1}^{T} a_k b_k f_k^1(\varphi_1) \cdot \ldots \cdot f_k^s(\varphi_s), \tag{2}$$

где $s, T \in \mathbb{N}$, $f_k^i, i = \overline{1, s}$, — непрерывные функции одного аргумента; a_k, b_k — непрерывные функции переменных x_1, x_2 соответственно.

С помощью функции $\mathbb{F}_s^T$ зададим нелинейное уравнение с частными производными:

$$\mathbb{F}_s^T\left(\frac{\partial^m z}{\partial x_1^m}, \frac{\partial^m z}{\partial x_1^{m-1} \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, z\right) = F_1(x_1) F_2(x_2). \tag{3}$$

Рассмотрим дополнительные условия на функции f_k^i в (2).

(А) Для $\forall k \in \{1, \ldots, T\}$ существует число $n_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и набор непрерывных функций $h_k^{(i,j)}$, $i = \overline{1, n_k}$, $j = 1, 2$, такие что для любых чисел y_1, y_2, принадлежащих областям определения функций $h_k^{(i,1)}$ и $h_k^{(i,2)}$ соответственно, число $y_1 + y_2$ принадлежит области определения f_k^s, и

$$f_k^s(y_1 + y_2) = \sum_{i=0}^{n_k} h_k^{(i,1)}(y_1) h_k^{(i,2)}(y_2).$$

(Б) Для $\forall k \in \{1, \ldots, T\}$ существует число $n_{k,l} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и набор непрерывных функций $h_{k,l}^{(i,j)}$, $i = \overline{1, n_{k,l}}$, $j = 1, 2$, такие что для любых чисел y_1, y_2, принадлежащих областям определения функций $h_{k,l}^{(i,1)}$ и $h_{k,l}^{(i,2)}$ соответственно, число $y_1 \cdot y_2$ принадлежит области определения f_k^l, и

$$f_k^l(y_1 \cdot y_2) = \sum_{i=0}^{n_{k,l}} h_{k,l}^{(i,1)}(y_1) h_{k,l}^{(i,2)}(y_2).$$

Теперь введем 3 класса нелинейных уравнений и соответствующие им частные решения.

I. Уравнение (2),(3) при условии $\frac{\partial}{\partial z} \mathbb{F}_s^T(\frac{\partial^m z}{\partial x_1^m}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_2}, z) \equiv 0$; решение вида

$$z(x_1, x_2) = u(x_1) + v(x_2); \tag{4}$$

II. Уравнение (2),(3) при условии (А); решение вида (4);

III. Уравнение (2),(3) при условии (Б); решение вида

$$z(x_1, x_2) = u(x_1)v(x_2). \tag{5}$$

Теорема 1.1. *В случаях I-III уравнения, полученные после подстановки соответствующих специальных видов решений, допускают представления в виде (1).*

В качестве примера применения метода обобщенного разделения переменных и теоремы 1.1 найдены все решения уравнения

$$\frac{\partial^2 z}{\partial {x_1}^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial {x_2}^2} = a\frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial z}{\partial x_2}\sin z,$$

представимые в виде (4).

В §§ 1.5, 1.6 найдены некоторые классы уравнений, заведомо не имеющих решений в виде суммы или произведения функций одного переменного, не смотря на то, что после подстановки специального вида решения они приводятся к виду (1). В этих параграфах рассматриваются уравнения вида

$$\mathbb{F}_s^T\left(\frac{\partial^m z}{\partial x_1^m}, \frac{\partial^m z}{\partial x_1^{m-1}\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, z\right) = 0. \tag{6}$$

Теорема 1.2. *Пусть в (2) функции* $f_k^s(y) = A_k e^{B_k y}$ *при* $k \neq T$, *и* $A_k, B_k \in \mathbb{R}$, *а функция* $f_T^s(y_1 + y_2) = \sum\limits_{i=0}^{n_T} h_T^{(i,1)}(y_1)h_T^{(i,2)}(y_2)$, *причем компоненты* $h_T^{(0,j)}(y), \ldots, h_T^{(n_T,j)}(y)$, $j = 1, 2$, *— линейно независимы. Тогда, если* $T \leq n_T + 1$, *то уравнение (6) не имеет решений вида (4) при* $u'(x_1) \neq 0$, $v'(x_2) \neq 0$.

Теорема 1.3. *Пусть в (2) функции* $f_k^l = A_{k,l} y^{B_{k,l}}$ *при* $(l, k) \neq (s, T)$, *и* $A_{k,l}, B_{k,l} \in \mathbb{R}$, *а функция* $f_T^s(y_1 y_2) = \sum\limits_{i=0}^{n_{T,s}} h_{T,s}^{(i,1)}(y_1)h_{T,s}^{(i,2)}(y_2)$, *причем компоненты* $h_{T,s}^{(0,j)}(y), \ldots, h_{T,s}^{(n_T,j)}(y)$, $j = 1, 2$ *- линейно независимы. Тогда, если* $T \leq n_{T,s} + 1$, *то уравнение (6) не имеет решений вида (5) при* $u'(x_1) \neq 0$, $v'(x_2) \neq 0$.

Применение леммы Э.Р. Розендорна приводит к необходимости рассматривать системы функций одного переменного и находить их базисные подсистемы. Ситуации, когда по виду систем функций можно определить, какие из их подсистем не могут являться базисными, сокращают перебор возможных вариантов. В § 1.7 рассмотрены системы специального вида и указаны такие их подсистемы, которые заведомо не являются базисными.

Во **второй главе** для некоторого класса систем нелинейных уравнений с двумя неизвестными функциями сформулированы необходимые и достаточные условия на известные (заданные) функции, при выполнении которых

существуют решения системы в виде произведения функций с разделенными переменными. Для этого класса найдены все такие решения.

Подробнее, пусть $\xi_{ij}(x), \eta_{ij}(y)$ — фиксированные элементы линейных пространств функций $L(I_1)$, $L(I_2)$, где I_1,I_2 — открытые множества в линейных пространствах размерности σ и τ соответственно; x, y — независимые аргументы, $x = (x_1, \ldots, x_\sigma) \in I_1$, $y = (y_1, \ldots, y_\tau) \in I_2$;

$U_1(x,y), U_2(x,y)$ — искомые функции на множестве $I_1 \times I_2$, то есть принадлежащие линейному пространству $L(I_1 \times I_2)$;

$G_i(U_1, U_2)$, $i = 1, 2$ — операторы, действующие из $L(I_1 \times I_2) \times L(I_1 \times I_2)$ в $L(I_1 \times I_2)$.

Рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} (\xi_{11}(x)\eta_{11}(y) + \xi_{12}(x)\eta_{12}(y))U_1(x,y) + G_1(U_1(x,y); U_2(x,y)) = \\ = \xi_{13}(x)\eta_{13}(y) + \xi_{14}(x)\eta_{14}(y), \\ (\xi_{21}(x)\eta_{21}(y) + \xi_{22}(x)\eta_{22}(y))U_2(x,y) + G_2(U_1(x,y); U_2(x,y)) = \\ = \xi_{23}(x)\eta_{23}(y) + \xi_{24}(x)\eta_{24}(y). \end{cases} \tag{7}$$

Пусть $\Lambda_i = \{\lambda_{ij}, \mu_{ij},\ i = 1, 2,\ j = \overline{1,3}\}$ — некоторые постоянные; $\zeta_i \in L(I)$, $i = \overline{1,4}$ ($I = I_1$ или $I = I_2$). Положим

$$\Delta^{(3)}(\zeta_1, \zeta_2, \Lambda_i) = \det \begin{Vmatrix} \lambda_{i1}\zeta_1 + \mu_{i1}\zeta_2 & 0 & 0 \\ \lambda_{i2}\zeta_1 + \mu_{i2}\zeta_2 & -1 & 0 \\ \lambda_{i3}\zeta_1 + \mu_{i3}\zeta_2 & 0 & -1 \end{Vmatrix},$$

$$\Delta^{(2)}(\zeta_1, \zeta_2, \Lambda_i) = \det \begin{Vmatrix} \zeta_1 & \lambda_{i3} \\ \zeta_2 & \mu_{i3} \end{Vmatrix}.$$

Кроме того, пусть $\Delta_j^{(3)}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \Lambda_i)$, $j = \overline{1,3}$, получается из $\Delta^{(3)}(\zeta_1, \zeta_2, \Lambda_i)$ подстановкой столбца $(\zeta_3,\ 0, 0)^T$ вместо столбца с номером j;

$\Delta_j^{(2)}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \Lambda_i)$, $j = \overline{1,2}$, получается из $\Delta^{(2)}(\zeta_1, \zeta_2, \Lambda_i)$ подстановкой столбца $(\lambda_{i1}\zeta_3 + \lambda_{i2}\zeta_4,\ \mu_{i1}\zeta_3 + \mu_{i2}\zeta_4)^T$ вместо столбца с номером j.

Предположим, что для операторов G_i существуют такие операторы F_{ij}, что для функций вида

$$U_1(x,y) = A_1(x)B_1(y), \qquad U_2(x,y) = A_2(x)B_2(y), \tag{8}$$

где A_i, $B_i \not\equiv 0$, выполняются тождества

$$G_i(U_1, U_2) = F_{i1}(A_1,\ A_2) \cdot F_{i2}(B_1,\ B_2), \quad i = 1, 2. \tag{9}$$

В диссертации сформулированы условия А), Б), В), Г), участвующие в формулировках теорем 2.1–2.2:

А) $\quad \xi_{14} = \frac{\Delta_2^{(3)}(\xi_{11},\xi_{12},\xi_{13},\Lambda_1)}{\Delta^{(3)}(\xi_{11},\xi_{12},\Lambda_1)}$, $\xi_{24} = \frac{\Delta_2^{(3)}(\xi_{21},\xi_{22},\xi_{23},\Lambda_2)}{\Delta^{(3)}(\xi_{21},\xi_{22},\Lambda_2)}$,

$$F_{11}\left(\frac{\Delta_1^{(3)}(\xi_{11},\xi_{12},\xi_{13},\Lambda_1)}{\Delta^{(3)}(\xi_{11},\xi_{12},\Lambda_1)}, \quad \frac{\Delta_1^{(3)}(\xi_{21},\xi_{22},\xi_{23},\Lambda_2)}{\Delta^{(3)}(\xi_{21},\xi_{22},\Lambda_2)}\right) = \frac{\Delta_3^{(3)}(\xi_{11},\xi_{12},\xi_{13},\Lambda_1)}{\Delta^{(3)}(\xi_{11},\xi_{12},\Lambda_1)},$$

$$F_{21}\left(\frac{\Delta_1^{(3)}(\xi_{11},\xi_{12},\xi_{13},\Lambda_1)}{\Delta^{(3)}(\xi_{11},\xi_{12},\Lambda_1)},\quad \frac{\Delta_1^{(3)}(\xi_{21},\xi_{22},\xi_{23},\Lambda_2)}{\Delta^{(3)}(\xi_{21},\xi_{22},\Lambda_2)}\right) = \frac{\Delta_3^{(3)}(\xi_{21},\xi_{22},\xi_{23},\Lambda_2)}{\Delta^{(3)}(\xi_{21},\xi_{22},\Lambda_2)},$$

$$F_{12}\left(\frac{\Delta_1^{(2)}(\eta_{11},\eta_{12},\eta_{13},\eta_{14},\Lambda_1)}{\Delta^{(2)}(\eta_{11},\eta_{12},\Lambda_1)},\quad \frac{\Delta_1^{(2)}(\eta_{21},\eta_{22},\eta_{23},\eta_{24},\Lambda_2)}{\Delta^{(2)}(\eta_{21},\eta_{22},\Lambda_2)}\right) = \frac{\Delta_2^{(2)}(\eta_{11},\eta_{12},\eta_{13},\eta_{14},\Lambda_1)}{\Delta^{(2)}(\eta_{11},\eta_{12},\Lambda_1)},$$

$$F_{22}\left(\frac{\Delta_1^{(2)}(\eta_{11},\eta_{12},\eta_{13},\eta_{14},\Lambda_1)}{\Delta^{(2)}(\eta_{11},\eta_{12},\Lambda_1)},\quad \frac{\Delta_1^{(2)}(\eta_{21},\eta_{22},\eta_{23},\eta_{24},\Lambda_2)}{\Delta^{(2)}(\eta_{21},\eta_{22},\Lambda_2)}\right) = \frac{\Delta_2^{(2)}(\eta_{21},\eta_{22},\eta_{23},\eta_{24},\Lambda_2)}{\Delta^{(2)}(\eta_{21},\eta_{22},\Lambda_2)},$$

Б) $$\xi_{14} = \frac{\Delta_2^{(3)}(\xi_{11},\xi_{12},\xi_{13},\Lambda_1)}{\Delta^{(3)}(\xi_{11},\xi_{12},\Lambda_1)},\qquad \eta_{24} = \frac{\Delta_2^{(3)}(\eta_{21},\eta_{22},\eta_{23},\Lambda_2)}{\Delta^{(3)}(\eta_{21},\eta_{22},\Lambda_2)},$$

$$F_{11}\left(\frac{\Delta_1^{(3)}(\xi_{11},\xi_{12},\xi_{13},\Lambda_1)}{\Delta^{(3)}(\xi_{11},\xi_{12},\Lambda_1)},\quad \frac{\Delta_1^{(2)}(\xi_{21},\xi_{22},\xi_{23},\xi_{24},\Lambda_2)}{\Delta^{(2)}(\xi_{21},\xi_{22},\Lambda_2)}\right) = \frac{\Delta_3^{(3)}(\xi_{11},\xi_{12},\xi_{13},\Lambda_1)}{\Delta^{(3)}(\xi_{11},\xi_{12},\Lambda_1)},$$

$$F_{21}\left(\frac{\Delta_1^{(3)}(\xi_{11},\xi_{12},\xi_{13},\Lambda_1)}{\Delta^{(3)}(\xi_{11},\xi_{12},\Lambda_1)},\quad \frac{\Delta_1^{(2)}(\xi_{21},\xi_{22},\xi_{23},\xi_{24},\Lambda_2)}{\Delta^{(2)}(\xi_{21},\xi_{22},\Lambda_2)}\right) = \frac{\Delta_2^{(2)}(\xi_{21},\xi_{22},\xi_{23},\xi_{24},\Lambda_2)}{\Delta^{(2)}(\xi_{21},\xi_{22},\Lambda_2)},$$

$$F_{12}\left(\frac{\Delta_1^{(2)}(\eta_{11},\eta_{12},\eta_{13},\eta_{14},\Lambda_1)}{\Delta^{(2)}(\eta_{11},\eta_{12},\Lambda_1)},\quad \frac{\Delta_1^{(3)}(\eta_{21},\eta_{22},\eta_{23},\Lambda_2)}{\Delta^{(3)}(\eta_{21},\eta_{22},\Lambda_2)}\right) = \frac{\Delta_2^{(2)}(\eta_{11},\eta_{12},\eta_{13},\eta_{14},\Lambda_1)}{\Delta^{(2)}(\eta_{11},\eta_{12},\Lambda_1)},$$

$$F_{22}\left(\frac{\Delta_1^{(2)}(\eta_{11},\eta_{12},\eta_{13},\eta_{14},\Lambda_1)}{\Delta^{(2)}(\eta_{11},\eta_{12},\Lambda_1)},\quad \frac{\Delta_1^{(3)}(\eta_{21},\eta_{22},\eta_{23},\Lambda_2)}{\Delta^{(3)}(\eta_{21},\eta_{22},\Lambda_2)}\right) = \frac{\Delta_3^{(3)}(\eta_{21},\eta_{22},\eta_{23},\Lambda_2)}{\Delta^{(3)}(\eta_{21},\eta_{22},\Lambda_2)},$$

В) $$\eta_{14} = \frac{\Delta_2^{(3)}(\eta_{11},\eta_{12},\eta_{13},\Lambda_1)}{\Delta^{(3)}(\eta_{11},\eta_{12},\Lambda_1)},\qquad \xi_{24} = \frac{\Delta_2^{(3)}(\xi_{21},\xi_{22},\xi_{23},\Lambda_2)}{\Delta^{(3)}(\xi_{21},\xi_{22},\Lambda_2)},$$

$$F_{11}\left(\frac{\Delta_1^{(2)}(\xi_{11},\xi_{12},\xi_{13},\xi_{14},\Lambda_1)}{\Delta^{(2)}(\xi_{11},\xi_{12},\Lambda_1)},\quad \frac{\Delta_1^{(3)}(\xi_{21},\xi_{22},\xi_{23},\Lambda_2)}{\Delta^{(3)}(\xi_{21},\xi_{22},\Lambda_2)}\right) = \frac{\Delta_2^{(2)}(\xi_{11},\xi_{12},\xi_{13},\xi_{14},\Lambda_1)}{\Delta^{(2)}(\xi_{11},\xi_{12},\Lambda_1)},$$

$$F_{21}\left(\frac{\Delta_1^{(2)}(\xi_{11},\xi_{12},\xi_{13},\xi_{14},\Lambda_1)}{\Delta^{(2)}(\xi_{11},\xi_{12},\Lambda_1)},\quad \frac{\Delta_1^{(3)}(\xi_{21},\xi_{22},\xi_{23},\Lambda_2)}{\Delta^{(3)}(\xi_{21},\xi_{22},\Lambda_2)}\right) = \frac{\Delta_3^{(3)}(\xi_{21},\xi_{22},\xi_{23},\Lambda_2)}{\Delta^{(3)}(\xi_{21},\xi_{22},\Lambda_2)},$$

$$F_{12}\left(\frac{\Delta_1^{(3)}(\eta_{11},\eta_{12},\eta_{13},\Lambda_1)}{\Delta^{(3)}(\eta_{11},\eta_{12},\Lambda_1)},\quad \frac{\Delta_1^{(2)}(\eta_{21},\eta_{22},\eta_{23},\eta_{24},\Lambda_2)}{\Delta^{(2)}(\eta_{21},\eta_{22},\Lambda_2)}\right) = \frac{\Delta_3^{(3)}(\eta_{11},\eta_{12},\eta_{13},\Lambda_1)}{\Delta^{(3)}(\eta_{11},\eta_{12},\Lambda_1)},$$

$$F_{22}\left(\frac{\Delta_1^{(3)}(\eta_{11},\eta_{12},\eta_{13},\Lambda_1)}{\Delta^{(3)}(\eta_{11},\eta_{12},\Lambda_1)},\quad \frac{\Delta_1^{(2)}(\eta_{21},\eta_{22},\eta_{23},\eta_{24},\Lambda_2)}{\Delta^{(2)}(\eta_{21},\eta_{22},\Lambda_2)}\right) = \frac{\Delta_2^{(2)}(\eta_{21},\eta_{22},\eta_{23},\eta_{24},\Lambda_2)}{\Delta^{(2)}(\eta_{21},\eta_{22},\Lambda_2)},$$

Г) $$\eta_{14} = \frac{\Delta_2^{(3)}(\eta_{11},\eta_{12},\eta_{13},\Lambda_1)}{\Delta^{(3)}(\eta_{11},\eta_{12},\Lambda_1)},\qquad \eta_{24} = \frac{\Delta_2^{(3)}(\eta_{21},\eta_{22},\eta_{23},\Lambda_2)}{\Delta^{(3)}(\eta_{21},\eta_{22},\Lambda_2)},$$

$$F_{11}\left(\frac{\Delta_1^{(2)}(\xi_{11},\xi_{12},\xi_{13},\xi_{14},\Lambda_1)}{\Delta^{(2)}(\xi_{11},\xi_{12},\Lambda_1)},\quad \frac{\Delta_1^{(2)}(\xi_{21},\xi_{22},\xi_{23},\xi_{24},\Lambda_2)}{\Delta^{(2)}(\xi_{21},\xi_{22},\Lambda_2)}\right) = \frac{\Delta_2^{(2)}(\xi_{11},\xi_{12},\xi_{13},\xi_{14},\Lambda_1)}{\Delta^{(2)}(\xi_{11},\xi_{12},\Lambda_1)},$$

$$F_{21}\left(\frac{\Delta_1^{(2)}(\xi_{11},\xi_{12},\xi_{13},\xi_{14},\Lambda_1)}{\Delta^{(2)}(\xi_{11},\xi_{12},\Lambda_1)},\quad \frac{\Delta_1^{(2)}(\xi_{21},\xi_{22},\xi_{23},\xi_{24},\Lambda_2)}{\Delta^{(2)}(\xi_{21},\xi_{22},\Lambda_2)}\right) = \frac{\Delta_2^{(2)}(\xi_{21},\xi_{22},\xi_{23},\xi_{24},\Lambda_2)}{\Delta^{(2)}(\xi_{21},\xi_{22},\Lambda_2)},$$

$$F_{12}\left(\frac{\Delta_1^{(3)}(\eta_{11},\eta_{12},\eta_{13},\Lambda_1)}{\Delta^{(3)}(\eta_{11},\eta_{12},\Lambda_1)},\quad \frac{\Delta_1^{(3)}(\eta_{21},\eta_{22},\eta_{23},\Lambda_2)}{\Delta^{(3)}(\eta_{21},\eta_{22},\Lambda_2)}\right) = \frac{\Delta_3^{(3)}(\eta_{11},\eta_{12},\eta_{13},\Lambda_1)}{\Delta^{(3)}(\eta_{11},\eta_{12},\Lambda_1)},$$

$$F_{22}\left(\frac{\Delta_1^{(3)}(\eta_{11},\eta_{12},\eta_{13},\Lambda_1)}{\Delta^{(3)}(\eta_{11},\eta_{12},\Lambda_1)},\quad \frac{\Delta_1^{(3)}(\eta_{21},\eta_{22},\eta_{23},\Lambda_2)}{\Delta^{(3)}(\eta_{21},\eta_{22},\Lambda_2)}\right) = \frac{\Delta_3^{(3)}(\eta_{21},\eta_{22},\eta_{23},\Lambda_2)}{\Delta^{(3)}(\eta_{21},\eta_{22},\Lambda_2)}.$$

Теорема 2.1. *Пусть тождества (9) выполнены, тогда система уравнений (7) имеет решения в виде (8) при выполнении любой из четырех групп условий А,..,Г. При этом:*

в случае А
$$U_1(x,y) = \frac{\Delta_1^{(3)}(\xi_{11},\xi_{12},\xi_{13},\Lambda_1)}{\Delta^{(3)}(\xi_{11},\xi_{12},\Lambda_1)} \cdot \frac{\Delta_1^{(2)}(\eta_{11},\eta_{12},\eta_{13},\eta_{14},\Lambda_1)}{\Delta^{(2)}(\eta_{11},\eta_{12},\Lambda_1)},$$
$$U_2(x,y) = \frac{\Delta_1^{(3)}(\xi_{21},\xi_{22},\xi_{23},\Lambda_2)}{\Delta^{(3)}(\xi_{21},\xi_{22},\Lambda_2)} \cdot \frac{\Delta_1^{(2)}(\eta_{21},\eta_{22},\eta_{23},\eta_{24},\Lambda_2)}{\Delta^{(2)}(\eta_{21},\eta_{22},\Lambda_2)},$$

в случае Б
$$U_1(x,y) = \frac{\Delta_1^{(3)}(\xi_{11},\xi_{12},\xi_{13},\Lambda_1)}{\Delta^{(3)}(\xi_{11},\xi_{12},\Lambda_1)} \cdot \frac{\Delta_1^{(2)}(\eta_{11},\eta_{12},\eta_{13},\eta_{14},\Lambda_1)}{\Delta^{(2)}(\eta_{11},\eta_{12},\Lambda_1)},$$
$$U_2(x,y) = \frac{\Delta_1^{(2)}(\xi_{21},\xi_{22},\xi_{23},\xi_{24},\Lambda_2)}{\Delta^{(2)}(\xi_{21},\xi_{22},\Lambda_2)} \cdot \frac{\Delta_1^{(3)}(\eta_{21},\eta_{22},\eta_{23},\Lambda_2)}{\Delta^{(3)}(\eta_{21},\eta_{22},\Lambda_2)},$$

в случае В $\quad U_1(x,y) = \frac{\Delta_1^{(2)}(\xi_{11},\xi_{12},\xi_{13},\xi_{14},\Lambda_1)}{\Delta^{(2)}(\xi_{11},\xi_{12},\Lambda_1)} \cdot \frac{\Delta_1^{(3)}(\eta_{11},\eta_{12},\eta_{13},\Lambda_1)}{\Delta^{(3)}(\eta_{11},\eta_{12},\Lambda_1)},$

$$U_2(x,y) = \frac{\Delta_1^{(3)}(\xi_{21},\xi_{22},\xi_{23},\Lambda_2)}{\Delta^{(3)}(\xi_{21},\xi_{22},\Lambda_2)} \cdot \frac{\Delta_1^{(2)}(\eta_{21},\eta_{22},\eta_{23},\eta_{24},\Lambda_2)}{\Delta^{(2)}(\eta_{21},\eta_{22},\Lambda_2)},$$

в случае Г $\quad U_1(x,y) = \frac{\Delta_1^{(2)}(\xi_{11},\xi_{12},\xi_{13},\xi_{14},\Lambda_1)}{\Delta^{(2)}(\xi_{11},\xi_{12},\Lambda_1)} \cdot \frac{\Delta_1^{(3)}(\eta_{11},\eta_{12},\eta_{13},\Lambda_1)}{\Delta^{(3)}(\eta_{11},\eta_{12},\Lambda_1)},$

$$U_2(x,y) = \frac{\Delta_1^{(2)}(\xi_{21},\xi_{22},\xi_{23},\xi_{24},\Lambda_2)}{\Delta^{(2)}(\xi_{21},\xi_{22},\Lambda_2)} \cdot \frac{\Delta_1^{(3)}(\eta_{21},\eta_{22},\eta_{23},\Lambda_2)}{\Delta^{(3)}(\eta_{21},\eta_{22},\Lambda_2)}.$$

Теорема 2.2. *Пусть тождества (9) выполнены и пусть заданные функции ξ_{ij}, η_{ij} таковы, что системы*

$$\{\xi_{11};\xi_{12}\}, \qquad \{\eta_{11};\eta_{12}\}, \qquad \{\xi_{21};\xi_{22}\} \quad \text{и} \quad \{\eta_{21};\eta_{22}\}$$

линейно независимы.

Если ни одна из четырех групп условий А-Г не имеет место, то система уравнений (7) не имеет решений в виде (8).

В этой же главе обсуждается стационарная осесимметричная модель тропического циклона. Приняты допущения относительно физических величин, задействованных в модели, при которых система, описывающая движение воздушных масс внутри циклона, приводится к классу из теоремы 2.1. При принятых допущениях найдены явные выражения для скоростей, зависящие от ряда произвольных констант и функций, которые предполагается выбирать в соответствии с реальными физическими условиями.

Более подробно, введем обозначения: $(r,\, \alpha,\, \sigma,\, t)$ — цилиндрические σ-координаты; $\sigma = \frac{p(r,z)}{p^*(r)}$, $p(r,z)$ — давление воздуха; p^* — приземное давление; $z = h(r,\sigma)$ — функция, обратная к $\sigma = \sigma(r,z)$.

В этих координатах $\{v_r,\, v_\alpha,\, \dot\sigma\}$ — компоненты скорости ветра $\overline{v}$. В модели использованы уравнения (а) неразрывности, (б) состояния влажного воздуха $p = R\rho T_{\text{В}}$, где $T_{\text{В}}$ — так называемая виртуальная температура (при нулевой влажности $T_{\text{В}} = T$ — температуре по шкале Кельвина), $\rho = \text{const}$ — плотность, (в) движения сплошной среды в гидростатическом приближении с учетом стационарности и осесимметричности:

$$\begin{cases} v_r(v_r)'_r + \dot\sigma(v_r)'_\sigma - \frac{1}{r}v_\alpha^2 - lv_\alpha + RT_{\text{В}}(\ln p^*)'_r + gh'_r = N_r, \\ v_r(v_\alpha)'_r + \dot\sigma(v_\alpha)'_\sigma + \frac{1}{r}v_r v_\alpha + lv_r = N_\alpha. \end{cases}$$

Обозначим $c(r,\sigma)$ — градиентный ветер; в цилиндрических σ-координатах он описывается уравнением: $c + \frac{1}{lr}c^2 = \frac{1}{l}\left(gh'_r + RT_{\text{В}}(\ln p^*)'_r\right)$. Пусть функции $T_{\text{В}}(r,\sigma)$, $h(r,\sigma)$, $p^*(r)$ таковы, что градиентный ветер представим в виде произведения функций одного переменного: $c(r,\sigma) = c^*(r)\hat{c}(\sigma)$.

Введем малый параметр ε, по степеням которого разложим компоненты скорости $\overline{v}$, предполагая, что они представимы в виде произведения функций одного аргумента:

$$v_r = \varepsilon R_1(r)Z_1(\sigma), \quad v_\alpha = c^*(r)\hat{c}(\sigma) + \varepsilon R_2(r)Z_2(\sigma), \quad \dot\sigma = \varepsilon R_3(r)Z_3(\sigma).$$

Кроме того, примем предположение относительно вида вязкости:

$$N_r = \varepsilon(\xi_1(r)\eta_1(\sigma) + \xi_2(r)\eta_2(\sigma)), \quad N_\alpha = \varepsilon(\xi_3(r)\eta_3(\sigma) + \xi_4(r)\eta_4(\sigma)).$$

Тогда при выполнении условий:

$$\xi_2 = \tfrac{2\lambda_2 c^* + \mu_2 l\, r}{2\lambda_1 c^* + \mu_1 l\, r}\xi_1, \quad \eta_2 = -\tfrac{\lambda_1 - \mu_1 \hat{c}}{\lambda_2 - \mu_2 \hat{c}}\eta_1, \quad \hat{\eta}_3 = \eta_3(\lambda_3 \hat{c} + \mu_3)^{\frac{\gamma_3}{\lambda_3} - 1}, \quad \int\limits_0^1 \hat{\eta}_3(\tilde{\sigma})\, d\tilde{\sigma} = 0,$$

$$\xi_3 = -\tfrac{B\,(r\,p^*)^{\beta_1}}{D_3^2 r^2\, p^*}(\lambda_4 l\, r - \mu_4 (r c^*)')\exp\Big(-\beta_2 \int\limits_{\mathrm{r_a}}^{\mathrm{r}} \tfrac{\mathrm{d\tilde{r}}}{\mathrm{c^*(\tilde{r})}}\Big),$$

$$\xi_4 = \tfrac{B\,(r\,p^*)^{\beta_1}}{D_3^2 r^2\, p^*}(\lambda_3 l\, r - \mu_3 (r c^*)')\exp\Big(-\beta_2 \int\limits_{\mathrm{r_a}}^{\mathrm{r}} \tfrac{\mathrm{d\tilde{r}}}{\mathrm{c^*(\tilde{r})}}\Big),$$

$$\eta_4 = (\lambda_4 \hat{c} + \mu_4)(\lambda_3 \hat{c} + \mu_3)^{-\frac{\gamma_3}{\lambda_3}}\hat{\eta}_3 - \hat{c}'(D_2^2 \hat{c} - D_1^2)(\lambda_3 \hat{c} + \mu_3)^{-\frac{\gamma_3}{\lambda_3} - 1} \int\limits_1^\sigma \hat{\eta}_3(\tilde{\sigma})\, d\tilde{\sigma},$$

где $A, B, \lambda_i, \mu_i, \gamma_i, D_j^i, \beta_1, \beta_2$ — постоянные, существует решение уравнений модели:

$$R_1(r) = -\tfrac{B(rc^*)^{\beta_1}}{rp^*}\exp\Big(-\beta_2 \int\limits_{r_a}^{r} \tfrac{d\tilde{r}}{c*(\tilde{r})}\Big),$$

$$Z_1(\sigma) = \hat{\eta}_3(\lambda_3 \hat{c} + \mu_3)^{-\frac{\gamma_3}{\lambda_3}} - \gamma_3 \hat{c}'(\lambda_3 \hat{c} + \mu_3)^{-\frac{\gamma_3}{\lambda_3} - 1} \int\limits_1^\sigma \hat{\eta}_3\, d\tilde{\sigma},$$

$$R_2(r) = \tfrac{r\xi_1}{2\lambda_1 c^* + \mu_1 l r}, \qquad Z_2(\sigma) = \tfrac{D_3^1 \eta_1}{\lambda_2 - \mu_2 \hat{c}},$$

$$R_3(r) = \tfrac{B(rc^*)^{\beta_1 - 1}(\beta_2 r - \beta_1 (rc*)')}{rp^*}\exp\Big(-\beta_2 \int\limits_{r_a}^{r} \tfrac{d\tilde{r}}{c*(\tilde{r})}\Big),$$

$$Z_3(\sigma) = -(\lambda_3 \hat{c} + \mu_3)^{-\frac{\gamma_3}{\lambda_3}} \int\limits_1^\sigma \hat{\eta}_3\, d\tilde{\sigma}.$$

В диссертации приведены результаты численного эксперимента, который показал, что в обсуждаемой модели в нижней части циклона имеет место втекание воздуха и вращение против часовой стрелки; а в верхней части — растекание воздуха и вращение по часовой стрелке. Кроме того, вблизи глаза циклона имеет место восходящее движение воздушных масс, а на внешней границе — нисходящее. Именно так наблюдается в реальных циклонах северного полушария.

В **третьей главе** речь идет о неполном разделении переменных, то есть решение разделяется по пространственным переменным $x_1, \ldots, x_n$, но не разделяется по времени t. В диссертации обобщаются классы уравнений, описанные А.Д. Поляниным, которые допускают решения с неполным разделением переменных. Для ряда случаев показано, что влияние на результат неполного разделения переменных произвольных функций переменного t, возникающих в методе А.Д. Полянина, определяется решением вспомогательного дифференциального уравнения.

А именно, обозначим $D(t;\frac{\partial}{\partial t})$ следующий дифференциальный оператор:

$$D(t;\frac{\partial}{\partial t}) = \alpha_n(t)\frac{\partial^n}{\partial t^n} + \dots + \alpha_2(t)\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \alpha_1(t)\frac{\partial}{\partial t},$$

где $\alpha_1(t),\dots,\alpha_n(t)$ — некоторые непрерывные функции одного аргумента t, $\alpha_n(t) \neq 0$.

В диссертации рассмотрены два класса нелинейных уравнений:

$$D(t;\frac{\partial}{\partial t})w + \sum_{k=1}^{n} F_k\left(x_k, t, \frac{\partial w}{\partial x_k}, \dots, \frac{\partial^m w}{\partial x_k^m}\right) + f_1(t,w) = 0, \tag{10}$$

$$D(t;\frac{\partial}{\partial t})w + w\sum_{k=1}^{n} F_k\left(x_k, t, \frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial x_k}, \dots, \frac{1}{w}\frac{\partial^m w}{\partial x_k^m}\right) + f_2(t,w) = 0, \tag{11}$$

где $n \geq 2$, $w = w(x_1,\dots,x_n,t)$, $f_i = f_i(t,w), i = 1,2,$ — непрерывные функции, и доказаны сформулированные ниже теоремы 3.1–3.4.

Теорема 3.1. *Пусть уравнение (10) допускает решение в виде суммы*

$$w(x_1,\dots,x_n,t) = \sum_{k=1}^{n} w_k(x_k,t) \tag{12}$$

при $\frac{\partial w_k}{\partial x_k} \neq 0$, *тогда*

$$f_1(t,w) = a(t)w + b(t), \tag{13}$$

где $a(t)$ *и* $b(t)$ *— функции одного аргумента* t.

Теорема 3.2. *Пусть* f_1 *задается формулой (13), где* $a(t), b(t)$ *— некоторые непрерывные функции переменного* t*; тогда выражение*

$$w(\mathbf{x},t) = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{w_k}(x_k,t) + \Phi(t)$$

задает общее решение уравнения (10),(13) с неполным разделением переменных вида (12). Здесь $\widetilde{w_k} = \widetilde{w_k}(x_k,t)$ *удовлетворяют уравнениям с одной пространственной переменной:*

$$D(t;\frac{\partial}{\partial t})\widetilde{w_k} + F_k\left(x_k, t, \frac{\partial \widetilde{w_k}}{\partial x_k}, \dots, \frac{\partial^m \widetilde{w_k}}{\partial x_k^m}\right) + a(t)\widetilde{w_k} = 0,$$

а функция $\Phi(t)$ *— дифференциальному уравнению*

$$\alpha_n(t)\Phi^{(n)}(t) + \dots + \alpha_1(t)\Phi'(t) + a(t)\Phi(t) + b(t) = 0.$$

Теорема 3.3. *Пусть уравнение (11) допускает решение в виде произведения*

$$w(x_1,\dots,x_n,t)=\prod_{k=1}^{n} w_k(x_k,t) \tag{14}$$

при $\frac{\partial w_k}{\partial x_k}\neq 0$, *тогда* $f_2(t,w)=a(t)w\ln w+b(t)w$, *где* $a(t)$ *и* $b(t)$ *— функции одного аргумента* t.

Теорема 3.4. *Общее решение с неполным разделением переменных вида (14) уравнения*

$$\frac{\partial w}{\partial t}+w\sum_{k=1}^{n}F_k\left(x_k,t,\frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial x_k},\dots,\frac{1}{w}\frac{\partial^m w}{\partial x_k^m}\right)+a(t)w\ln w+b(t)w=0$$

задается выражением

$$w(\mathbf{x},t)=\Big(\prod_{k=1}^{n}\widetilde{w_k}(x_k,t)\Big)\exp\Big(\Big(-\int\limits_B^t b(\tau)\,e^{\int\limits_A^\tau a(\xi)\,d\xi}d\tau+C\Big)\cdot e^{-\int\limits_A^t a(\tau)\,d\tau}\Big),$$

где C *— произвольная постоянная,* $A,B\in I\!R$, $\widetilde{w_k}=\widetilde{w_k}(x_k,t)$ *удовлетворяют уравнениям с одной пространственной переменной:*

$$\frac{\partial\widetilde{w_k}}{\partial t}+\widetilde{w_k}F_k\left(x_k,t,\frac{1}{\widetilde{w_k}}\frac{\partial\widetilde{w_k}}{\partial x_k},\dots,\frac{1}{\widetilde{w_k}}\frac{\partial^m\widetilde{w_k}}{\partial x_k^m}\right)+a(t)\widetilde{w_k}\ln\widetilde{w_k}=0.$$

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Эмилю Ренольдовичу Розендорну за плодотворные обсуждения поставленных задач и постоянную поддержку.

Публикации автора по теме диссертации.

[1]. "О неполном разделении переменных для некоторых классов уравнений с частными производными". // Вестн. Моск. Ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 2003, № 6, С. 42-46.

[2]. Обобщенное и неполное разделение переменных в некоторых классах уравнений с частными производными". // Деп. в ВИНИТИ 30.04.2003, № 846-В2003, 46 с.

[3]. "Частное решение системы уравнений для одной модели тропического циклона". // ОПиПМ, 2005, Т. 12, Вып. 4, С. 955-956.