Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
Механико–математический факультет

На правах рукописи

УДК 514.17

Гусев Никита Сергеевич

МНОГОГРАННИКИ–СЛЕДЫ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

01.01.04 — геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Москва
2008

Работа выполнена на кафедре дифференциальной геометрии и приложений Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук
профессор А. О. Иванов

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук
профессор И. Х. Сабитов
(Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова)

кандидат физико-математических наук
доцент Е. Г. Григорьева
(Волгоградский государственный университет)

Ведущая организация:

Санкт-Петербургский
государственный университет

Защита диссертации состоится 21 ноября 2008 г. в 16 ч. 40 мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 14–08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 21 октября 2008 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д.501.001.84 при МГУ,
доктор физико-математических наук
профессор А. О. Иванов

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Задачи, при изучении которых естественно возникают деформации с изменением топологической структуры рассматриваемых объектов[1], давно и хорошо известны в разных областях науки.

Например, деформации такого типа играют важную роль в многомерных геометрических вариационных задачах, таких как классическая проблема Плато и ее аналоги. Напомним, что проблема Плато состоит в поиске так называемых глобально минимальных поверхностей, т. е. поверхностей, имеющих наименьший возможный объем при заданной границе, или, скажем, в данном гомологическом (гомотопическом) классе. В 60—70-е годы XX века многомерная проблема Плато была решена (т.е. были доказаны теоремы существования) сразу для нескольких широких классов обобщенных поверхностей, таких как G-поверхности[2], целочисленные потоки[3], варифолды[4], спектральные многообразия и экстраординарные когомологии[5], мультиварифолды[6]. Отметим, что перечисленные подходы носят весьма абстрактный характер, и привлекают множество разнородных теорий, уводя от начальной простой и наглядной постановки задачи. Таким образом, естественно попытаться более ясно описать геометрические объекты, возникающие при изучении проблемы Плато. В данной диссертации предлагается наглядный геометрический подход к задачам такого типа, основанный на понятиях многогранника—следа, его объема и деформаций.

Деформации, изменяющие структуру объекта, давно изучаются в теории экстремальных сетей (одномерная проблема Плато). Около двадцати лет назад в теории сетей появилось понятие расщепления вершин при деформации, а также (как естественное средство моделирования их) — понятие сети—следа как класса специальных параметризаций сети[7]. Понятие многогранника—следа, рассматриваемое в диссертации, представляет собой естественное обобщение сети—следа на старшие размерности.

Кроме того, при построении многогранников—следов в диссертации рассматриваются только кусочно—аффинные отображения. Это связано с давней практи-

[1] См., например, обзор в Иванов А. О., Тужилин А. А. *Геометрия минимальных сетей и одномерная проблема Плато.*— Успехи матем. наук, **47**, № 2, С. 53—115, 1992.

[2] Reifenberg E. R. *Solution of the Plateau Problem for m—dimensional surfaces of varying topological type.*— Acta Mathematica, 1960, V. 104, P. 1—92.

[3] Federer H., Fleming W. H. *Normal and integral currents.*— Ann. Math., 1960, **72**, P. 458—520.

[4] Almgren F. J. *Existence and regularity almost everywhere of solutions to elliptic variational problem among surfaces of topological type and singularity structure.*— Ann. Math., Ser. 2, 1968, **87**, № 2, P. 321—391.

[5] Фоменко А. Т. *Вариационные методы в топологии.*— М.: Наука, 1982.

[6] Дао Чонг Тхи, *Мультиварифолды и классические многомерные задачи Плато.*— Известия АН СССР, 1980, 44, **5**, С. 1031—1065.

[7] См., например, Иванов А. О., Тужилин А. А. *Теория экстремальных сетей.*— Москва—Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.

кой приближать и характеризовать сложные отображения и пространства многогранниками и кусочно—аффинными отображениями (за их наглядность и простоту).

Таким образом, в диссертации строится новый класс “обощенных поверхностей”, изучаются его строение и основные свойства. Для многогранников—следов вводится аналог локальной минимальности в смысле функционала объема и изучаются локальные свойства локально минимальных многогранников-следов.

Цель работы

Построить класс обобщенных многомерных поверхностей, наглядно позволяющий моделировать сложные деформации с изменением топологии, и исследовать свойства полученных объектов в приложении к задаче о локально минимальных поверхностях.

Основные методы исследования

В работе используются методы кусочно—аффинной геометрии, выпуклой геометрии, дифференциальной геометрии, вариационного исчисления, теории графов, теории экстремальных сетей.

Научная новизна

Результаты диссертации являются новыми, и состоят в следующем:

- введены и изучены специальные типы кусочно—аффинных отображений (смятия и контракции) и установлена представимость (см. Теорему 1) произвольного кусочно—аффинного отображения в виде композиции смятия и контракции;

- построены и изучены понятия многогранника—следа, его объема (см. Теорему 2) и деформации (см. Теорему 3);

- изучены особенности локального строения локально—минимальных многогранников—следов (см. Теорему 4);

- получено доказательство принципов Плато в кусочно-линейной категории, в частности, построены явные деформации, уменьшающие объем для не минимальных случаев (см. Теорему 5).

Теоретическая, практическая и научная ценность работы

Диссертация носит теоретический характер и может быть полезна в исследовании минимальных сетей, обобщенных поверхностей, геометрических вариационных задач (таких, как задача Плато).

Апробация работы

Содержание и результаты диссертации доложены на

- семинаре профессора А. О. Иванова и профессора А. А. Тужилина по теории минимальных сетей (Механико-математический факультет Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова) в 2001—2004 гг.;
- семинаре профессора Г. Книпера (Рурский университет, г. Бохум, Германия) в 2003 г.;
- семинаре по геометрии в целом под руководством профессора И. Х. Сабитова и доцента Э. Р. Розендорна (Механико-математический факультет Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова) в 2005 г. и 2008г.;
- XXVII Конференции молодых ученых Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова в 2005 г.;
- кафедральном семинаре кафедры дифференциальной геометрии и приложений под руководством академика А. Т. Фоменко в 2008 г;
- топологическом семинаре имени В. А. Рохлина в СПО Математического Института РАН имени В. А. Стеклова под руководством профессора Н. Ю. Нецветаева в 2008 г.

Публикации по теме работы

Основные результаты диссертации опубликованы в трех работах автора, указанных в конце автореферата [1—3].

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения и двух глав. Объем диссертации — 94 страницы. Список литературы — 15 наименований.

Содержание работы

Обзор

Диссертация состоит из введения и двух глав.

Во введении кратко излагается история вопроса, обсуждается актуальность темы диссертации и связи с имеющимися исследованиями других авторов. Также там описана структура и основное содержание диссертации.

В первой главе даются основные определения и известные факты, после чего изучаются кусочно—аффинные отображения и их связь с симплициальными комплексами; вводятся особые классы этих отображений — смятия и контракции, и изучаются их некоторые свойства; далее показана представимость произвольного кусочно–аффинного отображения в виде композиции смятия и контракции; наконец, на основе этих построений вводится понятие многогранников–следов, их деформаций, объема и рассматривается поведение объема при деформации.

Во второй главе изучается локальная структура многогранников–следов в предположении локальной минимальности их объема. Рассмотрены некоторые особенности этой структуры в многомерном случае, а также проведен более подробный анализ для двумерного случая в трехмерном пространстве и показана возможность существования только классических структур Плато.

Предварительные сведения

°Считаются известными обычные понятия топологии, теории аффинных пространств над $\mathbb{R}$, теории сетей[8], некоторые сведения о выпуклых множествах и многогранниках.

°Часто используются следующие общие обозначения.

- Для произвольного множества A обозначим ${}^{\cup}\mathrm{A} := \bigcup\limits_{\mathrm{a}:\mathrm{a}\in\mathrm{A}} \mathrm{a}$,— объединение всех элементов множества A, его "тело" (заметим, что тело пустого множества — пустое множество).

- Для бинарного отношения (т. е. множества упорядоченных пар, например, функции или отображения, то есть функционального бинарного отношения) $\mathfrak{f}$ обозначаются $\operatorname{im}\mathfrak{f} = \{\mathrm{a} : \exists \mathrm{b}(\langle \mathrm{b}, \mathrm{a}\rangle \in \mathfrak{f})\}$ — образ его, и $\operatorname{dom}\mathfrak{f} = \{\mathrm{a} : \exists \mathrm{b}(\langle \mathrm{a}, \mathrm{b}\rangle \in \mathfrak{f})\}$ — область действия или определения его.

- Для четкости формулировок сопоставим бинарному отношению $\mathfrak{f}$ функциональное бинарное отношение

$$\mathfrak{f}^{\circ} := \{\langle \mathrm{A}, \mathrm{B}\rangle : \mathrm{A} \subset \operatorname{dom}\mathfrak{f}, \mathrm{B} = \{\mathrm{b} : \exists \mathrm{a}(\mathrm{a} \in \mathrm{A}, \langle \mathrm{a}, \mathrm{b}\rangle \in \mathfrak{f})\}\},—$$

  естественное отображение, определенное на множестве всех подмножеств в $\operatorname{dom}\mathfrak{f}$.

°Если не оговорено противное, то всякий раз при рассмотрении композиции $\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}$ каких-либо бинарных отношений $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ предполагается их последовательная согласованность, то есть $\operatorname{dom}\mathfrak{a} = \operatorname{im}\mathfrak{b}$.

°Все построения проводятся в некотором бесконечномерном вещественном аффинном пространстве Uni, причем предполагается, что на нем задана некоторая топология такая, что на каждом конечномерном аффинном подпространстве A пространства Uni она порождает топологию обычного пространства $\mathbb{R}^{\dim \mathsf{A}}$.

[8]См., например, Иванов А. О., Тужилин А. А. *Теория экстремальных сетей*.— Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.

Глава 1

Введение

$^\circ$**Df** · У всякого подмножества A в $\mathrm{U}\textsc{ni}$ определим его *аффинную оболочку* $\operatorname{aff} A$ как совокупность всевозможных конечных аффинных комбинаций точек множества A, *относительную внутренность* $\operatorname{rint} A$ как внутренность множества A в его аффинной оболочке $\operatorname{aff} A$ и его *относительную границу* $\operatorname{rmrg} A$ как его границу в его аффинной оболочке.

$^\circ$**Df** · Множество P есть *выпуклый полиэдр*, если и только если найдется непустое конечное множество S точек в $\mathrm{U}\textsc{ni}$, относительная внутренность выпуклой оболочки которого совпадает с P.

$^\circ$**Df** · *Многогранником* или *многогранным множеством* или *полиэдром* называется объединение конечного числа выпуклых полиэдров. Далее будем считать, что все многогранники связны.

$^\circ$**Df** · *Простая ломаная* есть многогранник, гомеоморфный отрезку $[0, 1]$.

$^\circ$**Df** · Аффинное подпространство L пространства $\mathrm{U}\textsc{ni}$ зовется *опорною* к некоторому выпуклому полиэдру B плоскостью, если она пересекает замыкание полиэдра B и для всяких двух разных точек p и q из $\overline{B}$ если $(p, q) \cap L \neq \varnothing$, то $[p, q] \subset L$. *Грань* выпуклого полиэдра A есть всякий выпуклый полиэдр B, у которого найдется некоторая опорная к многограннику A плоскость C такая, что $\overline{A} \cap C = \overline{B}$ (обозначим через $A \lhd B$ отношение "A является гранью в B"). Также говорится, что выпуклый полиэдр A *инцидентен* выпуклому полиэдру B, если или A — грань у B или наоборот B — грань у A.

$^\circ$**Df** · *Вершина* есть всякий нульмерный выпуклый полиэдр. *Вершина выпуклого полиэдра* есть вершина, являющаяся его гранью, а точка x — *вершинная точка* выпуклого полиэдра, если множество $\{x\}$ — вершина его. Совокупность всех вершинных точек выпуклого полиэдра P обозначим через $\operatorname{vert} P$. А совокупность всех вершинных точек всех выпуклых полиэдров из некоторого их набора $\mathbf{P}$ обозначим через $\operatorname{Vert} \mathbf{P} = {}^{\cup}(\operatorname{vert}^\circ(\mathbf{P}))$.

Ребро есть одномерный выпуклый полиэдр.

$^\circ$**Df** · *Симплекс* есть выпуклый полиэдр с аффинно независимым множеством всех вершинных точек его.

$^\circ$**Df** · Для двух симплексов A и B, объединение вершинных множеств которых аффинно независимо, определяется их произведение $A*B$, также симплекс, по формуле

$$A * B = B * A := \operatorname{rint} \operatorname{conv}(\operatorname{vert} A \cup \operatorname{vert} B),$$

где conv обозначает выпуклую оболочку.

$^\circ$**Df** · Напомним, что два выпуклых полиэдра *согласованы*, если пересечение их замыканий или пусто или является замыканием некоторой грани в каждом из них.

Выпуклополиэдральный комплекс $\mathbf{A}$ есть конечное множество попарно согласованных выпуклых полиэдров. Выпуклополиэдральный комплекс $\mathbf{A}$ *полон*, если его *тело* $^{\cup}\mathbf{A}$ (то есть объединение всех его элементов) компактно, что эквивалентно принадлежности комплексу всякой грани всякого элемента комплекса.

°**Df** · Выпуклополиэдральный комплекс *симплициален*, если каждый элемент его — симплекс.

°**Df** · Отображение $\mathfrak{a}$ из некоторого компактного полиэдра — подмножества пространства Uni — в то же пространство назовем *аффинным* относительно набора $\mathbf{A}$ выпуклых полиэдров, если оно непрерывно, $^{\cup}\mathbf{A} = \operatorname{dom}\mathfrak{a}$ и отображение $\mathfrak{a}$ аффинно на каждом полиэдре из набора $\mathbf{A}$.

°**Df** · Отображение $\mathfrak{a}$ из некоторого подмножества пространства Uni в это же пространство назовем *кусочно-аффинным* (сокращенно будем писать “PA–отображение”), если оно аффинно относительно некоторого набора выпуклых полиэдров.

°Известен[9] и иной подход к кусочной аффинности, однако на компактных полиэдрах класс кусочно–аффинных отображений тот же, что здесь.

°**Df** · Если $\mathfrak{a}$ — некоторое PA–отображение, то

- скажем, что $\mathfrak{a}$ — *смятие*, если для всякого ребра A такого, что $A \subset \operatorname{dom}\mathfrak{a}$, верно, что множество $\mathfrak{a}^{\circ}(A)$ не одноточечно;
- в противном предыдущему случае скажем, что отображение — *консумпция*;
- скажем, что $\mathfrak{a}$ — *контракция*, если для всякой точки x из $\operatorname{im}\mathfrak{a}$ верно, что множество $(\mathfrak{a}^{-1})^{\circ}(\{x\})$ связно.

°**Df** · Скажем, что тройка $\langle \mathbf{K}, \mathfrak{f}, \mathbf{L}\rangle$ двух полных симплициальных комплексов $\mathbf{K}$ и $\mathbf{L}$ и отображения $\mathfrak{f}$, заданного на $^{\cup}\mathbf{K}$, *симплициальна*, если отображение $\mathfrak{f}$ аффинно относительно комплекса $\mathbf{K}$, и для каждого симплекса $K \in \mathbf{K}$ его образ $\mathfrak{f}^{\circ}(K) \in \mathbf{L}$.

Скажем, что отображение $\mathfrak{a}$ *симплициально* относительно полного симплициального комплекса $\mathbf{K}$, если найдется полный симплициальный комплекс $\mathbf{L}$ такой, что тройка $\langle \mathbf{K}, \mathfrak{a}, \mathbf{L}\rangle$ симплициальна.

Разложение кусочно–аффинного отображения

1 °**Теорема** · Для всякого PA–отображения $\mathfrak{f}$ найдется PA–контракция $\mathfrak{h}$ и PA–смятие $\mathfrak{g}$, в композиции дающие $\mathfrak{f}$, то есть $\mathfrak{f} = \mathfrak{g} \circ \mathfrak{h}$.

Определение многогранника–следа

°**Df** · Если $\mathfrak{a}$ — PA–отображение, то его *редуктом* назовем всякое PA–смятие $\mathfrak{b}$ такое, что найдется PA–контракция $\mathfrak{c}$, в композиции с $\mathfrak{b}$ дающая отображение $\mathfrak{a}$ (то есть $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \circ \mathfrak{c}$).

[9] Рурк К., Сандерсон Б. *Введение в кусочно линейную топологию.*— М.: Мир, 1974.

°**Df** · Скажем, что два PA–отображения $\mathfrak{a}'$ и $\mathfrak{a}''$ *редуктивно–эквивалентны*, если у них есть общий редукт. То есть найдутся PA–смятие $\mathfrak{b}$, PA–контракции $\mathfrak{c}'$ и $\mathfrak{c}''$ такие, что $\mathfrak{a}' = \mathfrak{b} \circ \mathfrak{c}'$ и $\mathfrak{a}'' = \mathfrak{b} \circ \mathfrak{c}''$.

°**Th** · Отношение редуктивной эквивалентности рефлексивно, симметрично и транзитивно.

°**Df** · Произвольное множество PA–отображений назовем *редуктивно содержательным*, если у всякого элемента того множества есть редукт в том множестве.

Обозначать будем кратко: rd-ct-множество.

°**Df** · Если A — некоторое rd-ct-множество, то классы редуктивно-эквивалентных элементов того множества назовем *A–многогранниками–следами*.

°Заметим, что всякий элемент всякого A–многогранника–следа обладает редуктом из того же многогранника–следа, а всякие два элемента его обладают общим редуктом из него же.

°**Df** · Для некоторого PA–отображения $\mathfrak{a}$ скажем, что некоторый замкнутый многогранник P — *аффиктура* к отображению $\mathfrak{a}$, если $P \subset \operatorname{dom} \mathfrak{a}$.

°**Df** · Если $\mathfrak{a}$ — PA–отображение и P — некоторая аффиктура к отображению $\mathfrak{a}$, то af-*редуктом* пары $\langle \mathfrak{a}, P \rangle$ назовем всякую пару $\langle \mathfrak{b}, Q \rangle$ такую, что $\mathfrak{b}$ — PA–смятие, Q — аффиктура к отображению $\mathfrak{b}$, и найдется PA–контракция $\mathfrak{c}$ такая, что $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \circ \mathfrak{c}$ и $\mathfrak{c}^{\circ}(P) = Q$.

°**Df** · Скажем, что две пары $\langle \mathfrak{a}', P' \rangle$ и $\langle \mathfrak{a}'', P'' \rangle$, где $\mathfrak{a}'$ и $\mathfrak{a}''$ — PA–отображения, P' — аффиктура к $\mathfrak{a}'$, P'' — аффиктура к $\mathfrak{a}''$, af-*редуктивно–эквивалентны*, если у них есть общий af-редукт.

°**Th** · Отношение af-редуктивной–эквивалентности рефлексивно, симметрично, транзитивно.

°**Df** · Произвольное множество пар PA–отображений и аффиктур к ним назовем af-*редуктивно содержательным*, если у всякого элемента того множества есть af-редукт в том множестве.

Обозначать будем кратко: af-rd-ct-множество.

°**Df** · Если A — некоторое af-rd-ct-множество, то классы af-редуктивно–эквивалентных элементов того множества назовем A–af-многогранниками–следами.

Деформации многогранников–следов

°**Df** · Возьмем некоторые разные числа α и β из $\mathbb{R}$, некоторый полный симплициальный комплекс $\mathbf{A}$ и некоторое rd-ct-множество W. Тогда непрерывное отображение $\mathfrak{a}$ из $[\alpha, \beta] \times {}^{\cup}\mathbf{A}$ в $\textsc{Uni}$ —

- *элементарная деформация* относительно четверки $\langle \alpha, \beta, \mathbf{A}, W \rangle$, если
    - при каждом τ из $[\alpha, \beta]$ отображение $\mathfrak{a}(\tau, \cdot)$ симплициально относительно комплекса $\mathbf{A}$ и принадлежит классу W;

– при всяких числах σ и τ из $(\alpha, \beta]$ и всяких точках ν и w из $\mathrm{Vert}(\mathbf{A})$ верно, что если $\mathfrak{a}(\sigma, \nu) = \mathfrak{a}(\sigma, w)$, то $\mathfrak{a}(\tau, \nu) = \mathfrak{a}(\tau, w)$.

- *аналитическая элементарная деформация* относительно четверки $\langle\alpha, \beta, \mathbf{A}, \mathrm{W}\rangle$, если оно элементарная деформация относительно той же четверки $\langle\alpha, \beta, \mathbf{A}, \mathrm{W}\rangle$ такая, что при каждой точке ν из $\mathrm{Vert}(\mathbf{A})$ отображение $\mathfrak{a}(\cdot, \nu)$ аналитично (то есть локально представимо степенным рядом с центром) в α и один раз непрерывно–дифференцируемо на $[\alpha, \beta]$.

°**Df** · Возьмем некоторые разные числа α и β из $\mathbb{R}$, некоторый полный симплициальный комплекс $\mathbf{A}$ и некоторый замкнутый полиэдр P, являющийся объединением симплексов из $\mathbf{A}$, и некоторое af-rd-ct-множество W. Тогда непрерывное отображение $\mathfrak{a}$ из $[\alpha, \beta] \times {}^{\cup}\mathbf{A}$ в $\mathrm{U{\scriptsize NI}}$ —

- *элементарная деформация* относительно пятерки $\langle\alpha, \beta, \mathbf{A}, \mathrm{P}, \mathrm{W}\rangle$, если
  – при каждой точке x из P отображение $\mathfrak{a}(\cdot, x)$ постоянно на $[\alpha, \beta]$;
  – при каждом τ из $[\alpha, \beta]$ отображение $\mathfrak{a}(\tau, \cdot)$ симплициально относительно комплекса $\mathbf{A}$ и пара $\langle\mathfrak{a}(\tau, \cdot), \mathrm{P}\rangle$ принадлежит классу W;
  – при всяких числах σ и τ из $(\alpha, \beta]$ и всяких точках ν и w из $\mathrm{Vert}(\mathbf{A})$ верно, что если $\mathfrak{a}(\sigma, \nu) = \mathfrak{a}(\sigma, w)$, то $\mathfrak{a}(\tau, \nu) = \mathfrak{a}(\tau, w)$.
- *аналитическая элементарная деформация* относительно пятерки $\langle\alpha, \beta, \mathbf{A}, \mathrm{P}, \mathrm{W}\rangle$, если оно элементарная деформация относительно той же пятерки $\langle\alpha, \beta, \mathbf{A}, \mathrm{P}, \mathrm{W}\rangle$ такая, что при каждой точке ν из $\mathrm{Vert}(\mathbf{A})$ отображение $\mathfrak{a}(\cdot, \nu)$ аналитично в α и один раз непрерывно–дифференцируемо на $[\alpha, \beta]$.

°**Df** · Возьмем некоторые разные числа α и β из $\mathbb{R}$ и некоторое [af-]rd-ct-множество W. Тогда отображение $\mathfrak{b}$ из $[\alpha, \beta]$ в совокупность W–многогранников–следов — *элементарная* W*–деформация* относительно пары $\langle\alpha, \beta\rangle$, если найдется полный симплициальный комплекс $\mathbf{A}$[и некоторый замкнутый полиэдр P, являющийся объединением симплексов из $\mathbf{A}$] и непрерывное отображение $\mathfrak{a}$ из $[\alpha, \beta] \times {}^{\cup}\mathbf{A}$ в $\mathrm{U{\scriptsize NI}}$ такие, что отображение $\mathfrak{a}$ — элементарная деформация относительно четверки $\langle\alpha, \beta, \mathbf{A}, \mathrm{W}\rangle$ [пятерки $\langle\alpha, \beta, \mathbf{A}, \mathrm{P}, \mathrm{W}\rangle$] и при каждом τ из $[\alpha, \beta]$ отображение $\mathfrak{a}(\tau, \cdot)$ принадлежит множеству $\mathfrak{b}(\tau)$.

°**Df** · Возьмем некоторые числа α и β из $\mathbb{R}$, причем $\alpha < \beta$, и некоторое [af-]rd-ct-множество W. Тогда отображение $\mathfrak{a}$ из $[\alpha, \beta]$ в совокупность W–многогранников–следов — W*–деформация* на отрезке $[\alpha, \beta]$, если найдется набор чисел $\alpha = \tau_0 < \ldots < \tau_\nu = \beta$ таких, что при каждом $\iota = 1, \ldots, \nu$ отображение $\mathfrak{a}\big|_{[\tau_{\iota-1}, \tau_\iota]}$ — элементарная W–деформация относительно пары $\langle\tau_{\iota-1}, \tau_\iota\rangle$ или пары $\langle\tau_\iota, \tau_{\iota-1}\rangle$.

Объем многогранника–следа

°Выберем некоторое конечномерное аффинное подпространство Y, в нем некоторое скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и порожденный им объем mes_ι (размерностей $\iota = 0\ldots\dim \mathrm{Y}$).

°**Df** · Для всяких кусочно–аффинного отображения $\mathfrak{f}$ с образом в выбранном пространстве Y, и полного симплициального комплекса $\mathbf{K}$, относительно которого отображение $\mathfrak{f}$ симплициально, определим объем $\mathrm{vol}_{\mathbf{K}}''' \mathfrak{f}$ по формуле

$$\mathrm{vol}_{\mathbf{K}}''' \mathfrak{f} := \sum_{K:K\in\mathbf{K}} \mathrm{mes}_\nu \mathfrak{f}^\circ(K),$$

где $\nu = \max\limits_{K:K\in\mathbf{K}} \dim K$.

2 °**Теорема** · Если $\mathfrak{f}$ — некоторое PA–отображение с образом в Y, то число $\mathrm{vol}_{\mathbf{K}}''' \mathfrak{g}$ не зависит от выбора отображения $\mathfrak{g}$ и комплекса $\mathbf{K}$ из всех таких, что $\mathfrak{g}$ — симплициальный относительно полного симплициального комплекса $\mathbf{K}$ редукт отображения $\mathfrak{f}$.

°**Df** · Для произвольного кусочно–аффинного отображения $\mathfrak{f}$, образ которого лежит в выбранном пространстве Y, определим его объем $\mathrm{vol}\,\mathfrak{f}$ как число $\mathrm{vol}_{\mathbf{K}}''' \mathfrak{g}$ при некотором симплициальном относительно некоторого полного симплициального комплекса $\mathbf{K}$ редукте $\mathfrak{g}$ с образом в Y отображения $\mathfrak{f}$.

°**Df** · Для произвольного [af-]rd-ct-множества A определим для всякого A–многогранника–следа $\mathtt{A}$ его образ $\widetilde{\mathrm{im}}\,\mathtt{A}$ как образ некоторого представителя его ($\widetilde{\mathrm{im}}\,\mathtt{A} := \mathrm{im}\,\mathfrak{f}$, где $\mathfrak{f} \in \mathtt{A}$[или $\langle\mathfrak{f}, P\rangle \in \mathtt{A}$]), и если $\widetilde{\mathrm{im}}\,\mathtt{A}$ лежит в выбранном пространстве Y, то его объем $\mathrm{Vol}\,\mathtt{A}$ по формуле $\mathrm{Vol}\,\mathtt{A} := \mathrm{vol}\,\mathfrak{f}$, где $\mathfrak{f}$ [или $\langle\mathfrak{f}, P\rangle$] — некоторый представитель из $\mathtt{A}$.

°**Замечание** · При этом от представителя это число не зависит.

Объем многогранников–следов при деформации

°**Df** · Определим множество T — совокупность всех PA–отображений с образом в Y.

Скажем, что [аналитическая] элементарная деформация $\mathfrak{a}$ относительно некоторой четверки $\langle\alpha, \beta, \mathbf{A}, \mathrm{T}\rangle$ *проста*, если $\dim \mathrm{im}\,\mathfrak{a}(\tau,\cdot)$ не зависит от τ из $[\alpha,\beta]$.

3 °**Теорема**

I. Пусть $\mathfrak{a}$ — простая [аналитическая] элементарная деформация относительно некоторой четверки $\langle\alpha, \beta, \mathbf{A}, \mathrm{T}\rangle$;

тогда отображение $\mathfrak{p}$, определенное формулою $\mathfrak{p}(\tau) = \mathrm{vol}\,\mathfrak{a}(\tau,\cdot)$ при $\tau \in [\alpha,\beta]$, непрерывно, а при аналитичности C^1–гладко.

II. Пусть $\mathfrak{n}$ — [аналитическая] T–деформация на отрезке $[\alpha,\beta]$ с постоянною размерностью образа;

тогда отображение $\mathfrak{w}$, действующее по формуле $\mathfrak{w}(\tau) = \mathrm{Vol}\,\mathfrak{n}_\tau$, $\tau \in [\alpha,\beta]$, непрерывно, а при аналитичности кусочно–C^1–гладко.

Глава 2

Введение

°Возьмем некоторую конечномерную плоскость Y в пространстве Uni, на ней выберем некоторое положительно–определенное скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$, и рассмотрим порожденные этим скалярным произведением лебеговы меры (объемы) $\mathrm{mes}_0, \ldots, \mathrm{mes}_{\dim Y}$ соответствующих размерностей $0, \ldots, \dim Y$.

°**Df** · Скажем при каком–либо ν из чисел $0, \ldots, \dim Y$, что множество A — ν–*квазиповерхность*, если

- оно включено в плоскость Y, многогранно, компактно;
- ν–мерно всякое множество, открытое в множестве A.

Еще скажем, что множество A — *квазиповерхность*, если оно — ν–квазиповерхность для некоторого ν из $0, \ldots, \dim Y$.

°**Df** · Скажем, что точка x — точка *полуплоского типа* в многогранном множестве P, если $x \in P$, и найдется симплекс A такой, что A — открытое множество в P, есть симплекс B такой, что $\dim B + 1 = \dim A$ и $B \lhd A$ и $x \in B$ и $B \cup A$ — открытое в P множество.

°**Df** · Обозначим через F множество всех пар $\langle \mathfrak{a}, M\rangle$, у которых найдется представление вида $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \circ \mathfrak{c}$, где $\mathfrak{b}$ — PA–смятие; $\mathfrak{c}$ — PA–контракция; M — аффиктура в PA–отображении $\mathfrak{a}$; $\mathrm{im}\,\mathfrak{a}$ и $\mathrm{dom}\,\mathfrak{b} = \mathrm{im}\,\mathfrak{c}$ — квазиповерхности; и всякая точка x из $(\mathrm{dom}\,\mathfrak{a}) \setminus M$ не полуплоского типа в $\mathrm{dom}\,\mathfrak{a} = \mathrm{dom}\,\mathfrak{c}$ как только точка $\mathfrak{c}(x)$ не полуплоского типа в $\mathrm{im}\,\mathfrak{c} = \mathrm{dom}\,\mathfrak{b}$.

Из этого определения следует, что F — af-редуктивно содержательный класс.

°**Df** · Скажем, что пара $\langle \mathfrak{a}', M'\rangle$ из F *проецируема в* пару $\langle \mathfrak{a}'', M''\rangle$ из F, если найдется PA–контракция $\mathfrak{c}$ такая, что $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}'' \circ \mathfrak{c}$ и $\mathfrak{c}^\circ(M') = M''$.

°**Df** · Скажем, что пара $\langle A, x\rangle$ — *локальный конус*, если $x \in A$, множество A многогранно, компактно и такое, что для всякой точки y из множества A верно, что $[x, y] \subset A$.

°**Df** · Если $\langle A, x\rangle$ — некоторый локальный конус, то определим его *край* $\mathrm{fn}(A, x)$ по формуле

$$\mathrm{fn}(A, x) := \{z : \text{для всякой точки } w \text{ из множества } A \text{ верно, что } z \notin [x, w)\}.$$

°**Df** · Скажем, что тройка $\langle \mathfrak{a}, M, x\rangle$ — *коническая*, если

- $\langle \mathfrak{a}, M\rangle \in F$;
- $\langle \mathrm{dom}\,\mathfrak{a}, x\rangle$ — локальный конус;
- $M = \mathrm{fn}(\mathrm{dom}\,\mathfrak{a}, x)$.

$^{\circ}$**Df** $\cdot$ Скажем, что коническая тройка $\langle \mathfrak{a}, M, x\rangle$ *минимальна*, если при всякой элементарной простой аналитической деформации $\mathfrak{m}$ относительно некоторой пятерки $\langle 0, 1, \mathbf{A}, P, F\rangle$ и такой, что пара $\langle \mathfrak{m}(0, \cdot), P\rangle$ проецируема в пару $\langle \mathfrak{a}, M\rangle$, верно, что найдется некоторое ϵ из $(0, 1)$ такое, что при всяком τ из $[0, \epsilon)$ верно $\operatorname{vol} \mathfrak{m}(\tau, \cdot) \geqslant \operatorname{vol} \mathfrak{m}(0, \cdot) = \operatorname{vol} \mathfrak{a}$.

$^{\circ}$**Df** $\cdot$ Скажем, что пара $\langle \mathfrak{a}, M\rangle$ из F *локально—минимальна*, если для всякой точки x из множества $(\operatorname{dom} \mathfrak{a}) \setminus M$ найдется локальный конус $\langle C, x\rangle$ такой, что C — замкнутая окрестность точки x во множестве $\operatorname{dom} \mathfrak{a}$, $C \setminus \operatorname{fn} C \subset \operatorname{dom} \mathfrak{a} \setminus M$ и коническая тройка $\langle\, \mathfrak{a}|_C, \operatorname{fn}(C, x), x\rangle$ минимальна.

$^{\circ}$**Df** $\cdot$ Скажем, что F—многогранник—след *локально—минимален*, если таков каждый его элемент.

Многомерный случай

4 $^{\circ}$**Теорема** $\cdot$ Для всякой локально—минимальной пары $\langle \mathfrak{a}, M\rangle$ (при этом обозначим $\nu := \dim \operatorname{im} \mathfrak{a}$) и всякого симплициального комплекса $\mathbf{A}$ если отображение $\mathfrak{a}$ локально—инъективно на $(\operatorname{dom} \mathfrak{a}) \setminus M$, а также симплициально относительно комплекса $\mathbf{A}$, то

- если точка x лежит в множестве $(\operatorname{dom} \mathfrak{a}) \setminus M$, то не найдется $(\nu - 1)$—мерного симплекса A в комплексе $\mathbf{A}$ такого, что $x \in A$ и симплекс A инцидентен только одному ν—мерному симплексу комплекса $\mathbf{A}$;

- для всякого $(\nu - 1)$—мерного симплекса B' степени 2 в комплексе $\mathbf{A}$, лежащего в $(\operatorname{dom} \mathfrak{a}) \setminus M$, верно, что симплексы $\mathfrak{a}^{\circ}(A_1')$ и $\mathfrak{a}^{\circ}(A_2')$ лежат в одной ν—мерной плоскости, где A_1' и A_2' суть те два симплекса комплекса $\mathbf{A}$, которые инцидентны симплексу B' и имеют размерность ν;

- для всякого $(\nu$—$1)$—мерного симплекса B' комплекса $\mathbf{A}$, включеного в $(\operatorname{dom} \mathfrak{a})\setminus M$, и имеющего степень в комплексе $\mathbf{A}$ не менее трех верно, что
  - для произвольных двух ν—мерных симплексов A_1' и A_2', инцидентных симплексу B', двугранный угол между симплексами $\mathfrak{a}^{\circ}(A_1')$ и $\mathfrak{a}^{\circ}(A_2')$ не менее $\dfrac{2\pi}{3}$;
  - в тех же условиях степень симплекса B' равна трем, и тот двугранный угол равен $\dfrac{2\pi}{3}$.

Двумерный случай в трехмерном пространстве

5 $^{\circ}$**Теорема** $\cdot$ При условии $\dim Y = 3$ рассмотрим $\langle \mathfrak{a}, M\rangle$ — локально—минимальную пару из F такую, что отображение $\mathfrak{a}$ локально инъективно на $(\operatorname{dom} \mathfrak{a})\setminus M$; будем считать, что $\dim \operatorname{im} \mathfrak{a} = 2$. Еще рассмотрим некоторый полный симплициальный комплекс $\mathbf{A}$, относительно которого симплициально отображение $\mathfrak{a}$, и некоторую

точку x такую, что $\{x\} \in \mathbf{A}$ и $x \in (\operatorname{dom} \mathfrak{a}) \setminus M$. Тогда найдется локальный конус $\langle C, x \rangle$ такой, что C — замкнутая окрестность точки x в $\operatorname{dom} \mathfrak{a}$, отображение $\mathfrak{a}$ инъективно на C, и $\mathfrak{a}$–образ K множества $\operatorname{int}_{(\operatorname{dom} \mathfrak{a}) \setminus M} C$ имеет один из следующих трех видов:

тип I: множество K лежит в некоторой плоскости;

тип II: найдется симплициальный комплекс $\mathbf{K}$ такой, что тело комплекса $\mathbf{K}$ есть K, в $\mathbf{K}$ всего три двумерных симплекса, всего один одномерный симплекс, нет нульмерных симплексов, причем двумерные симплексы инцидентны одномерному, двугранный угол между каждыми двумя двумерными симплексами составляет $120°$, и точка $\mathfrak{a}(x)$ лежит в одномерном симплексе;

тип III: найдется симплициальный комплекс $\mathbf{K}$ такой, что тело комплекса $\mathbf{K}$ есть K, в $\mathbf{K}$ всего шесть двумерных симплексов, четыре одномерных и один нульмерный, причем каждый двумерный симплекс инцидентен двум и только двум одномерным, каждый одномерный симплекс инцидентен трем и только трем двумерным, нульмерный же симплекс инцидентен всем четырем одномерным симплексам, двугранный угол между каждыми двумя двумерными симплексами, инцидентными некоторому одномерному симплексу, составляет $120°$, и нульмерный симплекс есть $\{\mathfrak{a}(x)\}$.

Автор благодарит своего научного руководителя профессора А. О. Иванова и профессора А. А. Тужилина за постановку задач и внимание к работе; а также благодарит весь коллектив кафедры дифференциальной геометрии и приложений, возглавляемой академиком РАН А. Т. Фоменко, за возможность плодотворно заниматься научной работой.

Работы автора по теме диссертации

[1] Гусев Н. С. *Каноническое разложение кусочно-аффинных отображений и многогранники-следы* // Вестник МГУ, Сер. 1, Математика, Механика (краткое сообщение).— 2005.— № 5.— С. 72–77.

[2] Гусев Н. С. *Применение канонического представления кусочно-аффинных отображений к объему их при деформациях с изменением геометрии* // Труды XXVII Конференции молодых ученых Механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова. М.: Изд–во МГУ.— 2005.— С. 41–44.

[3] Гусев Н. С. *Каноническое разложение кусочно-аффинных функций, многогранники-следы и геометрические вариационные задачи* // Фундамент. и прикл. матем., 2006, 12:1, С. 57–94.