

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М. В. Ломоносова  
Механико–математический факультет

На правах рукописи  
УДК 517.984.55, 514.84

**Гальцев Сергей Валерьевич**  
КОМПЛЕКСНЫЕ ЛАГРАНЖЕВЫ МНОГООБРАЗИЯ И АНАЛОГИ ЛИНИЙ  
СТОКСА

01.01.04 — геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико–математических наук

Москва, 2008

Работа выполнена на кафедре дифференциальной геометрии и приложений Механико–математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

### **Научный руководитель**

доктор физико–математических наук,  
профессор А. И. Шафаревич.

### **Официальные оппоненты**

доктор физико–математических наук,  
профессор С. А. Степин,  
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова;  
кандидат физико–математических наук,  
доцент А. В. Перескоков,  
Московский энергетический институт (технический университет).

### **Ведущая организация**

Санкт–Петербургское отделение  
Математического института имени В. А. Стеклова РАН.

Защита диссертации состоится 21 ноября 2008 г. в 16 часов 40 минут на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991 Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Механико–математический факультет, аудитория 14–08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико–математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 21 октября 2008 г.

### **Ученый секретарь**

диссертационного совета  
Д.501.001.84 при МГУ  
доктор физико–математических наук,  
профессор

А. О. Иванов

**Актуальность темы.** Ряд вопросов, возникающих в спектральной теории дифференциальных операторов, приводит к исследованию спектра оператора

$$\mathfrak{D} = -h^2 \frac{d^2}{dx^2} + iV(x), \quad (1)$$

где  $V(x)$  — периодичная целая аналитическая функция, действительная на действительной оси, с вещественным периодом  $T$ . В частности, (1) возникает как “эталонный” оператор в теории гидродинамической устойчивости: его спектр при определенных условиях похож на спектр оператора Орра–Зоммерфельда. Другой пример — спектральная задача для оператора  $\varepsilon\Delta + (v(x), \nabla)$  на плоском торе (здесь  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{T}^2$ ). Если  $v(x)$  — бездивергентное поле вида  $v(x_1, x_2) = w(x_1)\frac{\partial}{\partial x_2}$ , спектральная задача допускает разделение переменных: собственная функция  $\varphi(x_1, x_2)$  имеет вид  $e^{imx_2}\psi(x_1)$ , причем  $\psi$  удовлетворяет спектральной задаче для оператора (1) при  $V(x_1) = mw(x_1)$  и  $\varepsilon = h^2$ .

Спектральная теория несамосопряженных операторов, сравнительно с самосопряженным случаем, разработана значительно менее полно; как структура спектра, так и свойства спектрального разложения могут в этом случае быть весьма экзотическими, что чрезвычайно затрудняет развитие общей теории (см., например [GK]<sup>1</sup>). В то же время, ряд важных задач, возникающих в различных областях математики, механики и физики, приводит к изучению спектров несамосопряженных операторов. Приведем несколько популярных примеров.

1. Оператор диффузии со сносом  $\varepsilon\Delta + \partial_v$ , где  $\Delta$  — оператор Лапласа–Бельтрами,  $\partial_v$  — производная вдоль гладкого векторного поля  $v$  на римановом многообразии ( $\varepsilon > 0$  — коэффициент диффузии), возникающий как в механике сплошных сред и кинетической теории, так и в задачах теории случайных процессов.

2. Оператор магнитной индукции  $\widetilde{M}$ , действующий на магнитное поле  $H$  в проводящей жидкости с полем скоростей  $v$  ( $H, v$  — векторные поля в  $\mathbb{R}^3$ ):

$$\widetilde{M}H = \{v, H\} - \varepsilon\Delta H,$$

где  $\{\cdot, \cdot\}$  — коммутатор векторных полей,  $\varepsilon > 0$  — проводимость. Исследование поведения спектра этого оператора при  $\varepsilon \rightarrow 0$  связано с известной проблемой магнитного динамо (см., например, [ZR]<sup>2</sup>).

3. Операторный пучок Орра–Зоммерфельда  $Q$ , возникающий в теории гидродинамической устойчивости (см., например, [DR]<sup>3</sup>); операторы этого пучка

<sup>1</sup>[GK] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов*, Москва, Наука, 1965.

<sup>2</sup>[ZR] Я. Б. Зельдович, А. А. Рузмайкин, *Гидромагнитное динамо как источник планетарного, солнечного и галактического магнетизма*, УФН, 1987, том 21, № 1, стр. 3–50.

<sup>3</sup>[DR] R. G. Drazin, W. H. Reid, *Hydrodynamic Stability*, Cambridge, 1981.

действуют на функцию  $u(x)$  по правилу

$$Qu = i\varepsilon \left( \frac{d^2}{dx^2} - p^2 \right)^2 u + p \left( (v(x) - \omega) \left( \frac{d^2}{dx^2} - p^2 \right) - v''(x) \right) u,$$

где  $v(x)$  — гладкая функция (невозмущенный профиль скорости),  $p$  — волновое число возмущения,  $\omega$  — частота (спектральный параметр),  $\varepsilon$  — коэффициент вязкости ( $\varepsilon^{-1}$  — число Рейнольдса).

Отметим, что во всех приведенных примерах присутствует параметр  $\varepsilon$ , который во многих типичных ситуациях бывает малым; тем самым, естественный вопрос состоит в изучении предельного поведения спектра при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Для самосопряженных задач такие пределы изучаются в теории квазиклассических асимптотик (см., например, [M1]<sup>4</sup> и [M2]<sup>5</sup>); в этой теории асимптотические собственные числа и собственные функции связываются с инвариантными изотропными многообразиями соответствующих классических гамильтоновых систем (как правило, определенных в  $\mathbb{R}^{2n}$  или в кокасательном расслоении к риманову многообразию). Собственные числа вычисляются из условий квантования Бора–Зоммерфельда–Маслова

$$\frac{1}{2\pi\varepsilon} \int_{\beta} (p, dx) = m(\beta) + l(\beta),$$

где  $\beta$  — произвольный цикл на изотропном многообразии,  $(p, x)$  — канонические координаты в фазовом пространстве,  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $l$  — числовая характеристика циклов, которая определяется по-разному в различных ситуациях; в частности, если изотропное многообразие лагранжево,  $l$  равно четверти от индекса Маслова. Асимптотические собственные функции строятся при помощи (вещественного или комплексного) канонического оператора Маслова; отметим, что они не обязательно приближают настоящие собственные функции исходной задачи, а лишь удовлетворяют с нужной точностью спектральному уравнению. В то же время, самосопряженность исходного оператора гарантирует наличие в его спектре точек, близких к асимптотическим собственным числам (решениям уравнений Бора–Зоммерфельда–Маслова).

Относительно квазиклассических асимптотик спектров несамосопряженных операторов известно гораздо меньше. В частности, в работах [DKO1]<sup>6</sup> и [DKO2]<sup>7</sup> построены спектральные серии оператора  $-\varepsilon\Delta + \partial_v$ , связанные с

<sup>4</sup>[M1] В. П. Маслов, *Асимптотические методы решения псевдодифференциальных уравнений*, Москва, Наука, 1987.

<sup>5</sup>[M2] В. П. Маслов, *Теория возмущений и асимптотические методы*, Москва, МГУ, 1965.

<sup>6</sup>[DKO1] С. Ю. Доброхотов, В. Н. Колокольцов, Виктор Мартинес Оливе, *Асимптотически устойчивые инвариантные торы векторного поля  $V(x)$  и квазимоды оператора диффузии*, Матем. заметки, 1995, том 58, № 2, стр. 880–884.

<sup>7</sup>[DKO2] Dobrokhotov S. Yu., V. N. Kolokoltsov, V. Martinez Olive, *Quasimodes of the diffusion operator  $-\varepsilon\Delta + v(x) \cdot \nabla$ , corresponding to asymptotically stable limit cycles of the field  $v$* , Sobretiro de Sociedad Matematica Mexicana, 1994, vol. 11, pp. 81–89.

асимптотически устойчивыми положениями равновесия, предельными циклами или инвариантными торами векторного поля  $v$ . (Спектральные серии, вообще говоря, определяют точки псевдоспектра, см. [T]<sup>8</sup> и [D1]<sup>9</sup>; в то же время, асимптотическая устойчивость соответствующих инвариантных множеств указывает на то, что, вероятно, эти серии приближают точные собственные числа — в явно решаемых примерах это действительно так.) В [S1]<sup>10</sup>, [S2]<sup>11</sup>, [Sh]<sup>12</sup>, [SA]<sup>13</sup> и [TSh]<sup>14</sup> исследовался спектр одномерного оператора Шредингера и задачи Орра–Зоммерфельда на отрезке (отметим, что ряд утверждений об условиях квантования содержался еще в работе [DK]<sup>15</sup>). В этих работах, основанных на технике ВКБ–асимптотики (см., например, [F]<sup>16</sup> и [EF]<sup>17</sup>) было обнаружено, что в квазиклассическом пределе спектр стягивается к некоторому графу на комплексной плоскости (так называемому спектральному графу), причем ребра этого графа задаются геометрическими условиями на линии Стокса (одна из этих линий должна проходить через конец отрезка, на котором рассматривается уравнение). В работах [D1], [D2]<sup>18</sup> и [P-S]<sup>19</sup> исследовался так называемый псевдоспектр — множество, состоящее из чисел, приближенно удовлетворяющих спектральному уравнению; в частности, отмечалось различие между псевдоспектром и асимптотикой точного спектра.

---

<sup>8</sup>[T] L. N. Trefethen, *SIAM 95: Proceedings of the Third Int. Congress of Industrial and Applied Math.*, Academic Verlag, Berlin, 1996, pp. 401–434.

<sup>9</sup>[D1] E. B. Davies, *Pseudospectra of differential operators*, Operator Theory, 2000, vol. 43, pp. 243–262.

<sup>10</sup>[S1] С. А. Степин, *Несамосопряженные сингулярные возмущения: модель перехода от дискретного спектра к непрерывному*, УМН, 1995, том 50, №6, стр. 219–220.

<sup>11</sup>[S2] С. А. Степин, *Несамосопряженные сингулярные возмущения и спектральные свойства задачи Орра–Зоммерфельда*, Матем. сборник, 1997, том 188, стр. 129–146.

<sup>12</sup>[Sh] А. А. Шкаликов, *О предельном поведении спектра при больших значениях параметра одной модельной задачи*, Матем. заметки, 1997, том 62, №6, стр. 950–953.

<sup>13</sup>[SA] С. А. Степин, А. А. Аржанов, *Квазиклассические спектральные асимптотики и явление Стокса для уравнения Вебера*, Доклады РАН, 2001, том 378, №1, стр. 18–21.

<sup>14</sup>[TSh] С. Н. Туманов, А. А. Шкаликов, *О предельном поведении спектра модельной задачи для уравнения Орра–Зоммерфельда с профилем Пуазейля*, Известия РАН, серия Математика, 2002, том 66, №4, стр. 177–204.

<sup>15</sup>[DK] Ю. Н. Днестровский, Д. П. Костомаров, *О задачах на собственные значения для уравнений второго порядка в случае нелинейной зависимости от параметра  $\lambda$* , ДАН, 1963, том 152, №1, стр. 28–30.

<sup>16</sup>[F] М. В. Федорюк, *Топология линий Стокса уравнений второго порядка*, Известия АН СССР, серия Математика, 1965, том 23, №3, стр. 645–656.

<sup>17</sup>[EF] М. А. Евграфов, М. В. Федорюк, *Асимптотика решений уравнения  $w'' - p(z, \lambda)w = 0$  при  $\lambda \rightarrow \infty$  в комплексной плоскости*, УМН, 1966, том 21, №1, стр. 3–50.

<sup>18</sup>[D2] E. B. Davies, *Semi-classical states for non-self-adjoint Shrödinger operators*, Commun. Math. Phys., 1999, vol. 200, pp. 35–41.

<sup>19</sup>[P-S] K. Pravda-Starov, *A general result about pseudo-spectrum for Shrödinger operators*, Proc. R. Soc. A, 2004, vol. 460, pp. 471–477.

В настоящей работе исследуется спектр и псевдоспектр одномерного оператора Шредингера на окружности с комплексным (чисто мнимым) потенциалом, заданного формулой (1). Оказывается, точки спектра в квазиклассическом пределе могут быть вычислены из условий Бора–Зоммерфельда–Маслова, отвечающих римановой поверхности уровня энергии; однако, в отличие от самосопряженного случая, достаточно требовать выполнения этих условий хотя бы на одном из базисных циклов этой поверхности, причем разные циклы дают в спектр вклад, соответствующий разным ребрам спектрального графа. Как и в [DK], [S1], [S2], [Sh], [SA] и [TSh] спектральный граф связан с топологией графа Стокса; именно, ребра спектрального графа соответствуют перестройкам графа Стокса. Отметим, что, в силу периодичности задачи, таких перестроек счетное число; оказывается однако, что в действительности ребрам спектрального графа отвечает лишь несколько из них.

Для одномерного оператора Шредингера на окружности с чисто мнимым аналитическим потенциалом показано, что при  $h \rightarrow 0$  его  $h^N$ -псевдоспектр для любого  $N$  заполняет полуполосу на комплексной плоскости, в то время как настоящий спектр  $\bmod O(h^2)$  концентрируется вблизи одномерного множества (графа). Ребра этого графа соответствуют различным спектральным сериям, которые могут быть вычислены при помощи условий Бора–Зоммерфельда–Маслова на комплексной кривой (римановой поверхности); в отличие от самосопряженного случая разные циклы на одной и той же поверхности определяют разные серии (другими словами, для конструкции асимптотики достаточно требовать выполнения условий квантования только на одном цикле).

**Цель работы.** Построить псевдоспектр оператора  $\mathfrak{D}$ , построить спектр оператора  $\mathfrak{D}$  в частном случае  $V(x) = \cos x$ . Показать, что в указанном случае псевдоспектр намного шире спектра, и не приближает его.

**Методы исследования.** При построении псевдоспектра соответствующие его точкам псевдособственные функции предъясвляются явно. Чтобы найти спектр оператора используется ВКБ-асимптотика (приближение Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна) для матрицы монодромии изучаемой задачи.

**Научная новизна.** Результаты диссертации являются новыми и заключаются в следующем:

- (1) псевдоспектр оператора  $\mathfrak{D}$  совпадает с замыканием его числового образа — полуполосой  $[0, +\infty) + i[\min V, \max V]$ ;
- (2) спектр оператора  $\mathfrak{D}$  в частном случае  $V(x) = \cos x$  асимптотически при  $h \rightarrow 0 + 0$  концентрируется в окрестности графа, который является объединением луча  $[E^*, +\infty)$  и двух симметричных кривых,

выходящих из точки  $E^*$  и уходящих в углы полуполосы числового образа ( $E^*$  является решением уравнения  $\operatorname{Re} \int_{z_-(E)}^{z_+(E)} \sqrt{i \cos z - E} dz = 0$  на  $E$  и  $E^* \in (0, \operatorname{sh} \frac{\pi}{2})$ , где  $z_{\pm}(E) = \pm \arccos(-iE)$ ).

**Теоретическая и практическая ценность.** Работа носит теоретический характер. Ее результаты и методы могут быть использованы специалистами в области функционального анализа, дифференциальных уравнений, дифференциальной геометрии и математической физики.

### Апробация диссертации.

- Работа обсуждалась на семинаре кафедры дифференциальной геометрии и приложений под руководством академика А. Т. Фоменко (2006 г.).
- Результаты, полученные в диссертации, докладывались на «XXVII конференции молодых ученых» (11–22 апреля 2005, Москва).
- А также, на международной конференции «Days on Diffraction» (30 мая – 2 июня 2006, Санкт–Петербург).
- В ходе выполнения работы, полученные результаты обсуждались на семинаре «Несамосопряженные операторы» под руководством профессора А. Г. Костюченко и профессора А. А. Шкаликова (2005 г.).
- А также, на семинаре «Теория рассеяния» под руководством профессора Р. А. Минлоса (2005, 2008 гг.).

**Публикации.** Основные результаты работы опубликованы в двух статьях, ссылки [1, 2] на которые приведены в конце автореферата.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения и двух глав, включающих в себя 19 разделов. Текст диссертации изложен на 74 страницах и дополняется 24 рисунками. Список литературы содержит 30 наименований.

### СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Введение.** Во введении приводится обзор ранее полученных результатов, связанных с темой диссертации. Вводится оператор

$$\mathfrak{D} = -h^2 \frac{d^2}{dx^2} + iV(x),$$

заданный на окружности ( $V(x)$  — аналитическая функция с действительными значениями, заданная на окружности) и зависящий от малого параметра  $h$ . Дается описание задач, приводящих к исследованию спектра оператора такого вида. Формулируются основные определения и результаты работы.

**Глава 1.** В первой главе строится псевдоспектр рассматриваемой задачи, показывается, что псевдоспектр заполняет полуполосу.

В разделе 2.1 приводится определение псевдоспектра и доказываются его основные, с точки зрения дальнейшего рассмотрения, свойства.

**Определение 1.** Пусть задано пространство функций, снабженное скалярным произведением:

$$\Phi = (\{\varphi(x)\}, (\cdot, \cdot)) .$$

Кроме того, пусть задан линейный (неограниченный) оператор

$$A = A(x, \varepsilon): \Phi_0 \rightarrow \Phi, \quad \overline{\Phi_0} = \Phi,$$

зависящий от параметра  $\varepsilon \in (0, +\infty)$ . Точка  $\lambda$  принадлежит  $\varepsilon$ -псевдоспектру оператора  $A = A(x, \varepsilon)$  тогда и только тогда, когда найдется функция  $\varphi = \varphi(x, \varepsilon)$ , принадлежащая единичной сфере пространства  $\Phi_0$  (то есть,  $\|\varphi(\cdot, \varepsilon)\| = 1$ ) для любого фиксированного  $\varepsilon \in (0, +\infty)$ , и обладающая свойством

$$\|A(x, \varepsilon)\varphi(x, \varepsilon) - \lambda\varphi(x, \varepsilon)\| = O(\varepsilon), \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0 + 0. \quad (6)$$

$\varepsilon$ -псевдоспектр оператора  $A$  будем обозначать  $\text{PSP}_\varepsilon(A)$ .

**Лемма 1.**  $\varepsilon$ -псевдоспектр замкнут.

**Определение 2.** Числовым образом оператора  $A$  называется множество

$$\{(A\psi, \psi) \mid \psi \in \Phi_0, \|\psi\| = 1\} .$$

**Лемма 2.**  $\varepsilon$ -псевдоспектр оператора  $A$  содержится в замыкании его числового образа.

**Следствие 1.** Пусть  $\varepsilon(h)$  — непрерывная обратимая функция параметра  $h$  и  $\varepsilon(0 + 0) = 0 + 0$ . Тогда  $\varepsilon(h)$ -псевдоспектр оператора  $\mathfrak{D}$  содержится в полуполосе, задающейся как  $[0, +\infty) + i[\min V, \max V]$ .

В разделе 2.2 конструктивно доказывается, что псевдоспектр рассматриваемого оператора плотен в его числовом образе. Обозначим  $A_V = \{a \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{S}^1 : V(x) = a, V'(x) \neq 0\}$ .  $A_V$  — плотное подмножество  $(\min V, \max V)$ .

**Лемма 3.** Для любого  $E \in (0, +\infty) + iA_V$  при любом натуральном  $N$  существует функция  $\psi_N$  с нормой  $\|\psi_N\| = 1$ , удовлетворяющая равенству (6), в котором  $\varepsilon = h^N$ .

В разделе 2.3, на основе результатов разделов 2.1 и 2.2 доказывается

**Теорема 1.** В случае непостоянной  $V(x)$  для любого  $N$  из натурального ряда  $h^N$ -псевдоспектр оператора  $-h^2 \frac{d^2}{dx^2} + iV(x)$ , заданного на окружности, равен полуполосе  $[0, +\infty) + i[\min V, \max V]$ .

**Глава 2.** Во второй главе проводится исследование спектра рассматриваемой задачи в частном случае  $V(x) = \cos x$ . Показывается связь между найденным спектром и геометрическими характеристиками римановой поверхности постоянной энергии задачи. А именно, показывается, что точки спектра выделяются условиями на интегралы формы  $p dx$  по циклам указанной римановой поверхности. Эти условия подобны условиям Бора–Зоммерфельда–Маслова для самосопряженного случая, но имеются и существенные отличия от самосопряженного случая.

В разделе 3.1 приводится план нахождения спектра. С помощью ВКБ–приближения построим асимптотику оператора монодромии, Условие “след равен определитель плюс один” на этот оператор выделяет точки спектра. Доказывается

**Лемма 4.** При любом  $h$  собственные значения оператора  $\mathfrak{D}$  с потенциалом  $iV(z) = i \cos z$  симметричны относительно оси  $\text{Re}$ .

В разделе 3.2 находятся точки поворота, необходимые в дальнейшем для построения ВКБ–приближения, и доказываются некоторые их свойства как функций параметра  $E$ .

**Лемма 5.** В случае  $V(z) = \cos z$  на периоде (на цилиндре  $\mathbb{C}/T\mathbb{Z}$ ) этих точек две (они совпадают при  $E = \pm i$ ). Это точки  $z_{\pm} = \pm \arccos(-iE)$ .

**Лемма 6.** Точки поворота  $z_{\pm}(E)$  являются непрерывными функциями параметра  $E$ .

**Лемма 7.** Функция

$$\xi(z_1(E), z_2(E)) = \int_{z_1(E)}^{z_2(E)} \sqrt{i \cos z - E} dz$$

непрерывно дифференцируема по параметру  $E \in \mathbb{C} \setminus (U(i) \cup U(-i))$ ,  $U(\pm i)$  — произвольные окрестности точек  $\pm i$ .

В разделе 3.3 доказываются вспомогательные утверждения, которые будут использованы в дальнейшем.

**Лемма 8.** Для любого  $a \in \mathbb{R}$ :

$$\int_{z_-(E)}^{z_+(E)+a} \sqrt{i \cos z - E} dz = \overline{\int_{z_-(\bar{E})}^{z_+(\bar{E})-a-2\pi} \sqrt{i \cos z - \bar{E}} dz} .$$

**Лемма 9.** При  $E \in \mathbb{C} \setminus i(-1, 1)$

$$I(E) = \text{Re} \int_0^{2\pi} \sqrt{i \cos x - E} dx = 0 ,$$

тогда и только тогда, когда  $E$  — действительное положительное число.

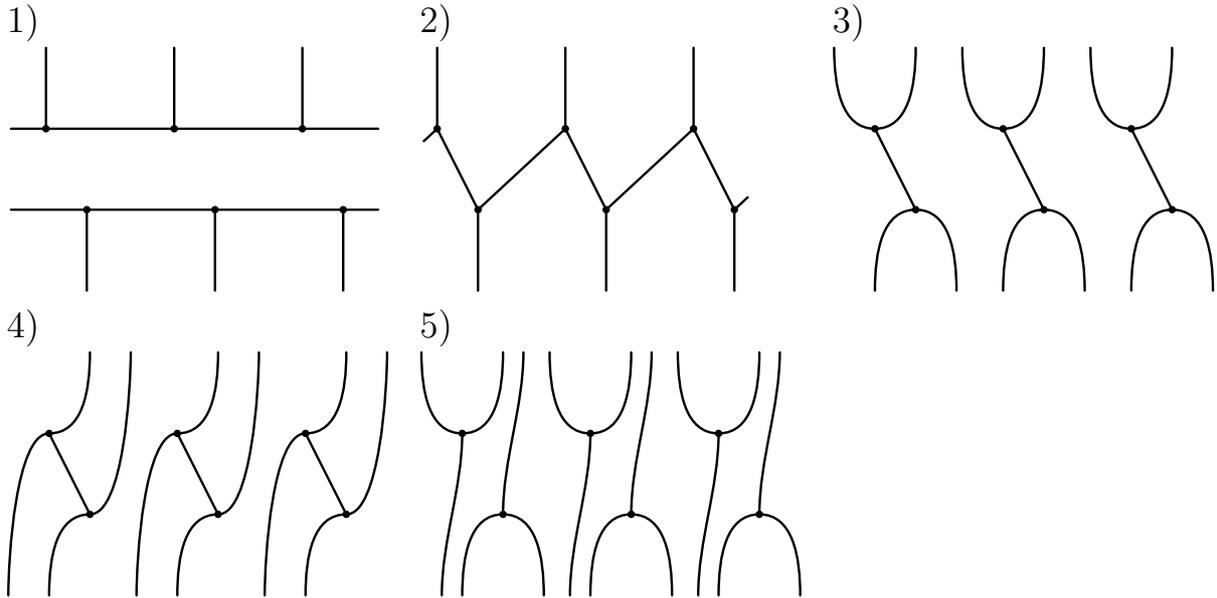
**Лемма 10.** Уравнение

$$J(E) = \operatorname{Re} \int_{z_-(E)}^{z_+(E)} \sqrt{i \cos z - E} dz = 0$$

на параметр  $E \in (0, +\infty)$  имеет ровно одно решение  $E = E^*$ . Причем  $E^* \in (0, \operatorname{sh} \frac{\pi}{2})$ .

В разделе 3.4 дается определение линий Стокса, необходимых для построения ВКБ-асимптотики, указываются их известные свойства и доказывается

**Лемма 11.** В случае  $iV(z) = i \cos z$  имеется пять топологически различных случаев взаимного расположения линий Стокса.



На основе вспомогательных утверждений доказываются

**Лемма 12.** Если точки  $z_+$  и  $z_+ + 2\pi$  соединены в графе Стокса (то есть, соединены криволинейной ломаной из линий Стокса), то

$$I(E) = \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \sqrt{i \cos x - E} dx = 0.$$

**Лемма 13.** Если точки  $z_+$  и  $z_-$  соединены в графе Стокса, то

$$J(E) = \operatorname{Re} \int_{z_-(E)}^{z_+(E)} \sqrt{i \cos x - E} dx = \xi(z_-, z_+) = 0.$$

Если соединены точки  $z_+ - 2\pi k$  и  $z_-$ , то

$$\xi(z_-, z_+ - 2\pi k) = 0.$$

В частности, при  $k = -1$  имеем:  $J(\overline{E}) = 0$ .

**Лемма 14.** *Случай 1 топологической конфигурации графа Стокса может реализоваться, только если  $E \in (0, +\infty)$ . Случай 2 топологической конфигурации графа Стокса может реализоваться только при  $E = E^*$ .*

**Лемма 15.** *Случаи 3 и 4 топологической конфигурации графа Стокса могут реализоваться только на аналитических кривых в  $E$ -плоскости, на каждой из которых выполняется условие*

$$\operatorname{Re} \int_{z_-(E)}^{z_+(E)-2\pi k} \sqrt{i \cos x - E} dx = 0,$$

для некоторого  $k \in \mathbb{Z}$ . Все эти кривые (обозначим их  $\eta_k$ ) проходят через точку  $E^*$  и пересекают луч  $(0, +\infty)$  только в этой точке. Кривые  $\eta_k$  и  $\eta_{-k-1}$  симметричны друг другу относительно оси  $\operatorname{Re} E$ :  $\eta_{-k-1} = \overline{\eta_k}$ . Кривая  $\eta_0$  проходит через точку  $i$ .

В разделе 3.5 изучается реализуемость топологических случаев.

**Лемма 16.** *В окрестности точки  $E^*$  топологический случай 4 реализуется только при  $k = 0$  и  $k = -1$ .*

**Лемма 17.** *Внутри полуполосы  $i(-1, 1) + (0, +\infty)$  смена топологического вида графа Стокса на кривых  $\eta_k$  и на луче  $(0, +\infty)$  может происходить только в точке  $E^*$ .*

**Лемма 18.** *Случай 4 реализуется на интервале кривой  $\eta$  ( $\bar{\eta}$ ), лежащем между точкой  $E^*$  и точкой  $i$  (соответственно  $-i$ ). Вне замыкания указанных интервалов на кривых  $\eta$  и  $\bar{\eta}$  реализуется топологический случай 3.*

**Лемма 19.** *Топологический случай 1) графа Стокса реализуется на открытом луче  $(E^*, +\infty)$ . Случай 4) — на интервале кривой  $\eta$ , соединяющем точки  $i$  и  $E^*$  (при этом в графе Стокса конечной линией Стокса соединены точки  $z_-$  и  $z_+$ ) и на интервале кривой  $\bar{\eta}$ , соединяющем точки  $-i$  и  $E^*$  (при этом в графе Стокса конечной линией Стокса соединены точки  $z_-$  и  $z_+ - 2\pi$ ). Случай 2) реализуется в точке  $E^*$ . В остальных точках полуполосы  $[0, +\infty) + i[-1, 1]$ , кроме точек  $\pm i$ , реализуются случаи 3) и 5).*

В разделах 3.6 и 3.7 находится условие на матрицу монодромии  $M$ , определяющее спектр, и строится асимптотика спектра оператора  $\mathfrak{D}$  (в частном случае  $V(x) = \cos x$ ), для каждого из пяти топологических случаев взаимного расположения линий Стокса.

**Теорема 2.** *В асимптотику спектра оператора  $\mathfrak{D}$  вклад вносят только топологические случаи 1, 2 и 4. В случае 1 принадлежность точки  $E$  спектру определяется условием*

$$\frac{1}{h} \operatorname{Im} \int_0^T \sqrt{iV(x) - E} dx \in 2\pi\mathbb{Z} + O(h), \quad (22)$$

причем все такие точки лежат на луче  $[E^*, +\infty)$  точно. В случае 2 принадлежность точки  $E$  определяется тем, удовлетворяет ли  $E$  или  $\bar{E}$  условию

$$\frac{1}{h} \operatorname{Im} \int_{z_-}^{z_+} \sqrt{i \cos z - E} dz \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} + O(h). \quad (23)$$

В окрестностях точек, удовлетворяющих асимптотикам (22) и (23) (возможно, кроме точки  $E^*$ ), лежит ровно по одной точке спектра (при достаточно малых  $h$ ).

В разделе 3.8 полученные результаты объединяются в

**Теорема 3.** Вне  $\varepsilon$ -окрестностей точек  $\pm i$  асимптотика дискретного спектра оператора  $\mathfrak{D}$  при  $iV(z) = i \cos z$  сосредоточена на трех кривых: луче  $(E^*, +\infty)$ , отрезке кривой  $\eta$ , соединяющем точку  $i$  и точку  $E^*$ , и отрезке кривой  $\bar{\eta}$ , соединяющем точку  $-i$  и точку  $E^*$ . На луче  $(E^*, +\infty)$  асимптотика дискретного спектра оператора  $\mathfrak{D}$  выделяется условием

$$\operatorname{Im} \int_0^{2\pi} \sqrt{i \cos x - E} dx \in h(2\pi\mathbb{Z} + O(h)),$$

на отрезке кривой  $\eta$  условием

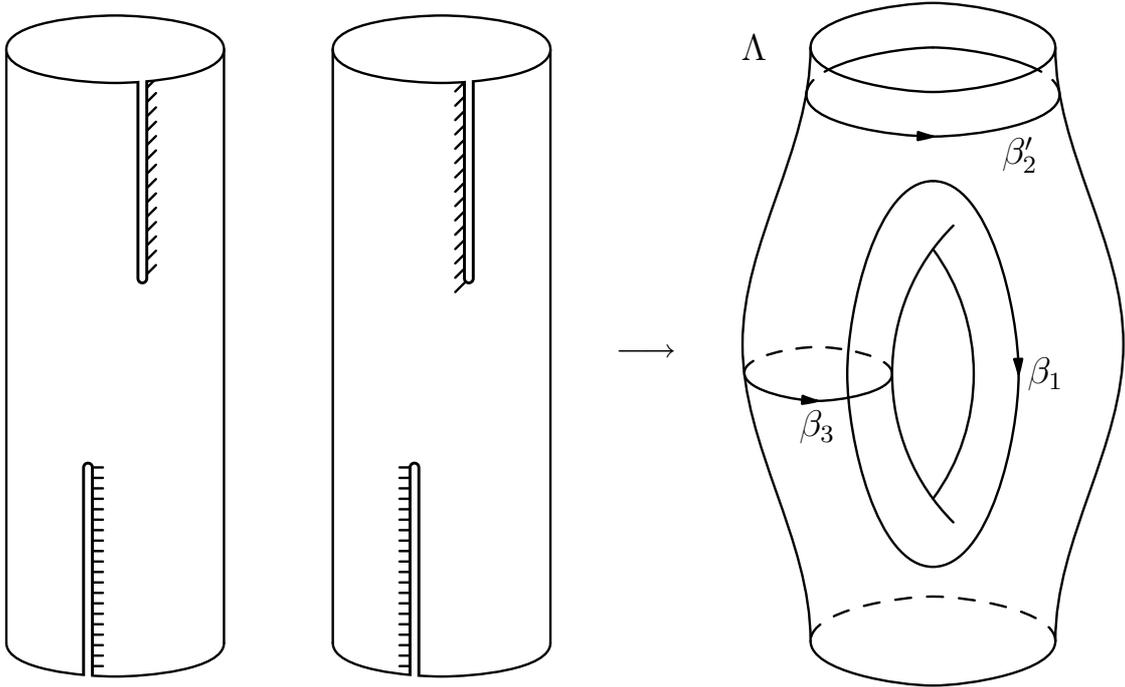
$$\operatorname{Im} \int_{z_-}^{z_+} \sqrt{i \cos z - E} dz \in h\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} + O(h)\right),$$

а на отрезке сопряженной кривой  $\bar{\eta}$  имеем сопряженное условие

$$\operatorname{Im} \int_{z_-(\bar{E})}^{z_+(\bar{E})} \sqrt{i \cos z - \bar{E}} dz \in h\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} + O(h)\right).$$

Рассмотрим поверхность  $p^2 + E = i \cos z$  в кокасательном к цилиндру  $\mathbb{C}/T\mathbb{Z}$  пространстве  $\{(p, z) \in \mathbb{C} \times (\mathbb{C}/T\mathbb{Z})\}$ . Это — риманова поверхность функции

$p(z) = \sqrt{i \cos z - E}$ . Она получается склейкой вдоль разреза (с «перехлестом») двух экземпляров цилиндра  $\mathbb{C}/T\mathbb{Z}$ , разрезанного по лучам, соединяющим точки  $z_-$  и  $z_+$  с бесконечностями  $-i\infty$  и  $+i\infty$ .



Эта риманова поверхность — тор с двумя дырками, на ней имеются три базисных цикла:

- (1)  $\beta_1$  — цикл, идущий из точки  $z_-$  в точку  $z_+$  по левому экземпляру цилиндра и возвращающийся в точку  $z_-$  по правому;
- (2)  $\beta'_2$  — цикл, обходящий дырку  $+i\infty$  в направлении возрастания  $\operatorname{Re} z$ ;
- (3)  $\beta_3$  — цикл, обходящий один из экземпляров цилиндра в направлении возрастания  $\operatorname{Re} z$  и не пересекающий разрезы.

С учетом этого, интегралы в теореме 3 можно переписать в виде интегралов по путям от функции  $p = p(z, E)$ :

$$\left[ \begin{array}{l} \int_{\beta_1} p dz \in ih(\pi + 2\pi\mathbb{Z} + O(h)), \quad \text{где } E \in \eta, \operatorname{Re} E \in (\varepsilon, E^*] \\ \int_{\beta_1 + \beta'_2} p dz \in ih(\pi + 2\pi\mathbb{Z} + O(h)), \quad \text{где } E \in \bar{\eta}, \operatorname{Re} E \in (\varepsilon, E^*] \\ \int_{\beta_3} p dz \in ih(2\pi\mathbb{Z} + O(h)), \quad \text{где } E \in (E^*, +\infty). \end{array} \right.$$

В таком виде полученные условия обычно называются условиями квантования Бора–Зоммерфельда–Маслова.

В заключительной секции 3.9 приводится рисунок спектрального графа (предельного множества для спектра при  $h \rightarrow 0 + 0$ ) для случая  $V(x) = \cos x$ .

Это одномерное подмножество числового образа, в то время, как псевдоспектр заполняет всю полуполосу числового образа.

## БЛАГОДАРНОСТЬ

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю — доктору физико-математических наук, профессору А. И. Шафаревичу — за постановку задачи и постоянное внимание к работе. Автор благодарен всем сотрудникам кафедры дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета МГУ за творческую атмосферу и доброжелательное отношение. Автор также благодарен руководителям и участникам семинаров механико-математического факультета, на которых докладывались результаты работы, за множество полезных замечаний.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. В. Гальцев, А. И. Шафаревич Квантованные римановы поверхности и квазиклассические спектральные серии для несамосопряженного оператора Шредингера с периодическими коэффициентами. *ТМФ* — 2006. — **148**, № 2. — 206–226.
- [2] С. В. Гальцев, А. И. Шафаревич Спектр и псевдоспектр несамосопряженного оператора Шредингера с периодическими коэффициентами. *Матем. заметки* — 2006. — **80**, № 3. — 356–366.
- [3] С. В. Гальцев, А. И. Шафаревич Асимптотика дискретного спектра несамосопряженного периодического оператора. — В кн.: Труды XXVII Конференции молодых ученых. — М.: Мех-мат ф-т МГУ, 2005. — 18–22.
- [4] S. V. GALTSEV, A. I. SHAFAREVICH Semiclassical quantization of Riemann surfaces and spectral problem for non-selfadjoint Shroedinger operator. *Advanced Studies in Contemporary Mathematics* — 2006. — **12**, № 2. — 167–196.

В работе [1] С. В. Гальцеву принадлежат леммы 1–3 и теорема 2, леммы 4–10 и теоремы 3–5, а также вспомогательные леммы 11–13; А. И. Шафаревичу принадлежат введение и теорема 1.

В работе [2] С. В. Гальцеву принадлежат леммы 1 и 2; А. И. Шафаревичу принадлежат введение и лемма 3. Теорема 1 в данной работе приведена для справки, теорема 2 получается объединением лемм 1–3.

В работе [3] С. В. Гальцеву принадлежат леммы 2–6 и теорема 1; А. И. Шафаревичу принадлежат лемма 1 и замечания 1 и 2.

В работе [4] С. В. Гальцеву принадлежат леммы 1–6, теорема 2, леммы 7–13, теоремы 3–5, леммы 14 и 15, А. И. Шафаревичу принадлежат введение, теорема 1, лемма 16. Теорема 7 следует из лемм 14–16.