Московский государственный университет имени
М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 512.743

Смирнов Евгений Юрьевич

Разложение Брюа для двойных грассманианов

Специальность:
01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Москва – 2008

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Эрнест Борисович Винберг.

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор
Владимир Леонидович Попов;
кандидат физико-математических наук
Дмитрий Альфредович Шмелькин.

Ведущая организация:
Санкт-Петербургский государственный университет.

Защита диссертации состоится 5 декабря 2008 г. в 16 часов 40 минут на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ, Механико-математический факультет (Главное здание, 14 этаж).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Автореферат разослан 5 ноября 2008 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д.501.001.84 при МГУ
доктор физ.-мат. наук, профессор А. О. Иванов

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Грассманианы и многообразия флагов. Пусть V — векторное пространство размерности n над алгебраически замкнутым полем. Множество подпространств в V данной размерности $k < n$ может быть снабжено структурой алгебраического многообразия. Такое многообразие называется *грассманианом*; мы будем обозначать его через $\mathrm{Gr}(k, V)$. Оно является однородным пространством для полной линейной группы $\mathrm{GL}(V)$.

Обозначим через B подгруппу верхнетреугольных матриц в $\mathrm{GL}(V)$. Разложение многообразия $\mathrm{Gr}(k, V)$ на орбиты группы B, называемое также *разложением Шуберта*, обладает массой интересных свойств. Впервые оно было определено в конце XIX века для нужд исчислительной геометрии. Тогда же была получена комбинаторная параметризация этих орбит (*клеток Шуберта*) и описаны их замыкания (*многообразия Шуберта*). Геометрия последних также представляет большой интерес; она активно изучалась на протяжении всего XX века. В частности, доказано, что многообразия Шуберта являются нормальными и коэн–маколеевыми, и что их особенности рациональны (см., к примеру, записки лекций Бриона[1] или монографию Бриона и Кумара[2]). Также известно разрешение их особенностей, впервые появившееся в работе Ботта и Самельсона[3] и впоследствии обобщённое в работах Демазюра[4] и Хансена[5], и описание их множеств особых точек.

Понятие разложения Шуберта для грассманианов допускает

[1]M. Brion, *Lectures on the geometry of flag varieties*, Topics in cohomological studies of algebraic varieties, 33–85, Trends Math., Birkhäuser, Basel, 2005.

[2]M. Brion, S. Kumar, *Frobenius splitting methods in geometry and representation theory*, Birkhäuser, Boston, 2005.

[3]R. Bott, H. Samelson, *Applications of the theory of Morse to symmetric spaces*, Amer. J. Math. **80** (1958), 964–1029.

[4]M. Demazure, *Désingularisation des variétés de Schubert généralisées*, Ann. Sci. Ec. Norm. Supér. **7** (1974), 53–88.

[5]H. C. Hansen, *On cycles on flag manifolds*, Math. Scand. **33** (1973), 269–274.

прямое обобщение на случай *многообразий флагов* G/P, где G — связная редуктивная алгебраическая группа, а P — её параболическая подгруппа. «Экстремальный» (и в некотором смысле самый сложный) случай такого многообразия соответствует ситуации $P = B$; в этом случае G/B называется *многообразием полных флагов*. Для многообразий флагов можно осуществить ту же программу по описанию комбинаторики и геометрии многообразий Шуберта, что и для грассманианов. Однако некоторые из поставленных вопросов оказываются более сложными; в частности, описание множеств особых точек многообразий Шуберта в этом случае было получено лишь в начале 2000-х годов, практически одновременно в работах Л. Манивеля[6], С. Билли и Дж. Уррингтона,[7] О. Кортез[8] и К. Касселя, А. Ласку и К. Ройтенауэра[9].

Кратные многообразия флагов. В 1998 году П. Мадьяр, Е. Вейман и А. Зелевинский[10] поставили и решили следующую задачу. Пусть $G = \mathrm{GL}(V)$; возьмём *кратное многообразие флагов*, то есть прямое произведение r обычных многообразий флагов (полных или частичных) G/P_i, и рассмотрим диагональное действие группы G на

$$G/P_1 \times \cdots \times G/P_r.$$

В каких ситуациях (при каких условиях на r и $P_1, \ldots, P_r$) число орбит этого действия будет конечным? (Говорят, что такие многообразия имеют *конечный тип*).

Очевидно, это равносильно конечности числа орбит группы P_1

[6]L. Manivel, *Le lieu sungulièr des variétés de Schubert*, Int. Math. Res. Notices **16** (2001), 849–871.

[7]S. Billey, G. Warrington, *Maximal singular loci of Schubert varieties in* $\mathrm{SL}(n)/B$, Trans. Amer. Math. Soc. **335** (2003), 3915–3945.

[8]A. Cortez, *Singularités génériques et quasi-résolutions des variétés de Schubert pour le groupe linéaire*, Adv. Math. **178** (2003), no. 2, 396–445

[9]C. Kassel, A. Lascoux, C. Reutenauer, *The singular locus of a Schubert variety*, J. Algebra **269** (2003), 74–108.

[10]P. Magyar, J. Weyman, A. Zelevinsky, *Multiple flag varieties of finite type*, Adv. Math. **171** (1999), 285–309.

на произведении $G/P_2 \times \cdots \times G/P_r$. Если $P_1 = B$, то конечность числа P_1-орбит равносильна сферичности этого многообразия; классификация всех таких ситуаций (в случае произвольной полупростой группы G) принадлежит П. Литтельману[11].

В случае $G = \mathrm{GL}(V)$ и произвольного P_1 Мадьяр, Вейман и Зелевинский доказывают, что число этих орбит может быть конечно только при $r \leq 3$; ответ при этом приводится в терминах колчанов некоторого специального вида, классификация которых весьма близка к классификации Каца колчанов конечного типа[12] (хотя и отлична от неё). Кроме того, в этих ситуациях приводятся комбинаторное описание этих орбит и некоторые частичные результаты насчёт их примыканий.

В частности, классификация кратных многообразий флагов конечного типа включает в себя серии колчанов Дынкина конечного типа, т.е. колчаны типа A_n (при $n \geq 1$), D_n (при $n \geq 4$) и E_n (при $6 \leq n \leq 8$). Серия A соответствует случаю $r = 2$, то есть действию P_1 на G/P_2. Как частный случай получается описание орбит действия н B на G/P: это классическая ситуация разложения Шуберта для многообразия флагов.

Серия D (являющаяся в некотором смысле «следующим по сложности» случаем) соответствует действию группы G на $G/P_1 \times G/P_2 \times G/P_3$, где P_2, P_3 суть максимальные параболические подгруппы, или, иначе говоря, действию P_1 на $\mathrm{Gr}(k, V) \times \mathrm{Gr}(l, V)$. В частности, эта серия включает в себя наиболее интересный случай $P_1 = B$.

Итак, естественным образом возникает ряд вопросов, аналогичных тем, что ставятся для разложения Шуберта в многообразиях флагов. Как параметризовать орбиты группы B, действующей диагонально на произведении $\mathrm{Gr}(k, V) \times \mathrm{Gr}(l, V)$? Какие орбиты содержатся в замыкании данной орбиты? Что можно сказать о геометрии этих замыканий (аналогов многообразий

[11] P. Littelmann, *On spherical double cones*, J. Algebra, **166** (1994), 142–157.

[12] V. Kac, *Infinite root systems, representations of graphs and invariant theory*, Invent. Math. **56** (1980), 57–92.

Шуберта)? Когда они гладки? Если они особы, то как описать их множество особенностей, как разрешить эти особенности? Настоящая диссертационная работа посвящена ответу на часть этих вопросов.

Ещё одной мотивировкой для изучения B-орбит в $\mathrm{Gr}(k,V) \times \mathrm{Gr}(l,V)$ служат недавние работы Г. Бобиньского и Г. Звары[13]. Ими были выявлены некоторые взаимосвязи между представлениями колчанов и многообразиями Шуберта. А именно, имеют место следующие результаты. Особенности замыканий орбит группы $\mathrm{GL}(\rho)$ в представлении ρ колчана типа A_n оказываются такими же, как особенности многообразий Шуберта в многообразиях полных флагов. Далее, особенности замыканий орбит $\mathrm{GL}(\rho)$ в представлениях колчанов типа D_n — такие же, как особенности многообразий Шуберта в многообразиях полных флагов и произведениях двух грассманианов.

Цель работы

Целью работы является изучение орбит борелевской подгруппы в полной линейной группе, действующей диагональным образом на прямом произведении двух грассмановых многообразий, их замыканий (аналогов клеток Шуберта и многообразий Шуберта соответственно), и исследование их геометрических и комбинаторных свойств.

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа изложена на 94 страницах и состоит из введения, двух глав и приложения. Библиография включает 30 наименований.

[13] G. Bobiński, G. Zwara, *Normality of orbit closures for Dynkin quivers of type A_n*, Manuscripta Mathematica **105** (2001), 103–109.
G. Bobiński, G. Zwara, *Schubert varieties and representations of Dynkin quivers*, Colloquium Mathematicum **94** (2002), 285–309.

Научная новизна

Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Получен критерий примыкания орбит группы $G = \mathrm{GL}(V)$, действующей диагональным образом на прямом произведении многообразия флагов и двух грассмановых многообразий $G/P \times \mathrm{Gr}(k, V) \times \mathrm{Gr}(l, V)$.

2. Построено разрешение особенностей для замыканий орбит группы B невырожденных верхнетреугольных матриц, действующей диагональным образом на прямом произведении двух грассмановых многообразий $\mathrm{Gr}(k, V) \times \mathrm{Gr}(l, V)$.

3. Показано, что частичный порядок в множестве орбит группы B невырожденных верхнетреугольных матриц, действующей на прямом произведении двух клеток Шуберта в $\mathrm{Gr}(k, V) \times \mathrm{Gr}(l, V)$, совпадает с рассмотренным в работах А. Мельниковой[14] частичным порядком в множестве орбит группы верхнетреугольных матриц в многообразии строго верхнетреугольных матриц, квадрат которых равен нулю.

Основные методы исследования

В первой части работы используются комбинаторные методы и методы теории представлений, в частности, теория представлений колчанов и теория Ауслендера–Рейтен. Во второй части для построения разрешений особенностей привлекаются методы алгебраической геометрии и теории сферических многообразий.

[14] A. Melnikov, *B-orbits in solutions to the equation $X^2 = 0$ in triangular matrices*, J. Algebra **223** (2000), no. 1, 101–108.

A. Melnikov, *Description of B-orbit closures of order 2 in upper-triangular matrices*, Transf. Groups, **11** (2006), No. 2, pp. 217–247.

A. Melnikov, *B-orbits of nilpotent order 2 and link patterns*, preprint, arXiv:math.RT/0703371.

Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация имеет теоретический характер. Доказанные в диссертации теоремы представляют интерес для алгебраической геометрии, теории представлений, комбинаторики.

Апробация работы.

Результаты диссертации докладывались на следующих семинарах и конференциях.

1. Семинар «Группы Ли и теория инвариантов» под руководством Э. Б. Винберга и А. Л. Онищика, мех-мат МГУ. Доклады: «О шубертовском разложении для двойных грассманианов», 2005 г.; «Кратные многообразия флагов и колчаны Ауслендера–Рейтен», 2006 г.

2. Конференция «Journeés des jeunes en cotutelle», Лаборатория им. Ж.-В. Понселе (НМУ и CNRS), Москва, 2006 г. Доклад: «Bruhat decomposition for double Grassmannians».

3. Семинар «Algèbre et géométrie» под руководством М. Бриона и Л. Манивеля, Институт Фурье, г. Гренобль (Франция), 2007 г. Доклад: L'ordre de Bruhat et le carquois d'Auslander–Reiten.

4. Зимняя школа «Winter Solstice Master Class in Enveloping Algebras», Институт Вейцмана, Израиль, 2008 г. Доклад: Schubert decomposition for double Grassmannians and a partial order on involutive permutations.

Публикации автора по теме диссертации

Основное содержание диссертации опубликовано в двух работах, список которых приведен в конце автореферата [1–2].

Краткое содержание работы

Диссертация состоит из введения, двух глав и приложения.

Критерий примыкания P-орбит в двойных грассманианах

В первой главе мы рассматриваем определённые конфигурации подпространств в n-мерном векторном пространстве V над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$. Эти конфигурации $(U, W, V_\bullet)$ будут состоять из двух подпространств U и W пространства V, размерностей k и l соответственно, и частичного флага $V_\bullet = (V_{d_1} \subset V_{d_2} \subset \cdots \subset V_{d_m} = V)$, где $\dim V_{d_i} = d_i$.

Наша задача заключается в описании таких конфигураций с точностью до линейной замены координат в пространстве V и всевозможных вырождений одних конфигураций в другие. Иначе говоря, мы рассматриваем прямое произведение $X = \mathrm{Gr}(k, V) \times \mathrm{Gr}(l, V) \times \mathrm{Fl}_{\mathbf{d}}(V)$ двух грассманианов и одного многообразия частичных флагов типа $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_m)$ в V с диагональным действием $\mathrm{GL}(V)$ на этом многообразии, и описываем орбиты этого действия и отношения примыкания между ними.

Нетрудно показать, что число этих орбит конечно. Произведение нескольких многообразий флагов, обладающее этим свойством, называется *кратным многообразием флагов конечного типа.* Мадьяр, Вейман и Зелевинский[15] приводят полный список таких многообразий и описывают орбиты полной линейной группы, действующей на них диагонально. Они также получают необходимое условие того, что одна $\mathrm{GL}(V)$-орбита содержится в замыкании другой $\mathrm{GL}(V)$-орбиты. Это условие следует из результатов К. Ридтманн[16] о вырождениях представлений колчанов.

---

[15] P. Magyar, J. Weyman, A. Zelevinsky, *Multiple flag varieties of finite type*, Adv. Math. **171** (1999), 285–309.

[16] C. Riedtmann, *Degenerations for representations of quivers with relations*, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. (4) **19** (1986), 275–301.

Вопрос о том, является ли это условие критерием (т.е. необходимым и достаточным условием), открыт. Как указывается в работе Мадьяра, Веймана и Зелевинского, это верно в отдельных случаях: это следует из результатов К. Бонгартца[17] о представлениях колчанов. Ещё один случай разбирается в статье П. Мадьяра[18], где подобный критерий доказывается для конфигураций, состоящих из двух флагов и прямой. Подход Мадьяра является элементарным и использует лишь комбинаторику и линейную алгебру.

Решение задачи в случае $X = \mathrm{Gr}(k, V) \times \mathrm{Gr}(l, V) \times \mathrm{Fl}_{\mathbf{d}}(V)$ следует из результатов Бонгартца. Однако мы приводим более простой критерий того, что одна конфигурация может быть вырождена к другой. Вот этот критерий:

Теорема 1. *Пусть $(U, W, V_\bullet)$ и $(U', W', V'_\bullet)$ — две тройки, каждая из которых состоит из двух подпространств размерностей k и l соответственно, и флага глубины p с вектором размерности $(a_1, \ldots, a_p)$. Тогда $(U, W, V_\bullet) \in \overline{\mathrm{GL}(V)(U', W', V'_\bullet)}$ тогда и только тогда, когда*

$$\begin{aligned} \dim V_{a_i} \cap U &\geq \dim V'_{a_i} \cap U'; \\ \dim V_{a_i} \cap U &\geq \dim V'_{a_i} \cap W'; \\ \dim V_{a_i} \cap U \cap W &\geq \dim V'_{a_i} \cap U' \cap W' \end{aligned}$$

при всех $i \in [1, p]$, и

$$\begin{aligned} &\dim V_{a_j} \cap U \cap W + \dim V_{a_i} \cap ((V_{a_j} \cap U) + (V_{a_j} \cap W)) \geq \\ &\qquad \geq \dim V'_{a_j} \cap U' \cap W' + \dim V'_{a_i} \cap ((V'_{a_j} \cap U') + (V'_{a_j} \cap W')) \end{aligned}$$

при всех $1 \leq i < j \leq p$.

[17] K. Bongartz, *On degenerations and extensions of finite dimensionalmodules*, Adv. Math. **121** (1996), 245–287.

K. Bongartz, *Degenerations for representations of tame quivers*, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup., (4) **28** (1995), 647–668.

[18] P. Magyar, *Bruhat order for two flags and a line*, J. Algebraic Combin. **21** (2005), no. 1, 71–101.

В частном случае $p = n$ и $(a_1, \dots, a_p) = (1, \dots, n)$ эта теорема даёт критерий примыкания B-орбит в произведении двух грассманианов.

Доказательство этого критерия использует лишь элементарные методы. Для этого мы в основном действуем аналогично работе Мадьяра. Однако при этом для параметризации орбит на X мы используем кардинально иной комбинаторный подход, существенную роль в котором играют колчаны Аусландера–Рейтен.

B-орбиты в двойных грассманианах. Разрешения особенностей замыканий B-орбит.

Во второй главе работы мы рассматриваем случай $P_1 = B$, то есть изучаем действие борелевской подгруппы на прямом произведении двух грассманианов $Y = \mathrm{Gr}(k, V) \times \mathrm{Gr}(l, V)$. Мы приводим другое комбинаторное описание орбит, схожее с классическим описанием B-орбит на $\mathrm{Gr}(k, V)$ при помощи диаграмм Юнга. Оказывается, что это описание лучше, чем приведённое в предыдущей главе, помогает установить некоторые комбинаторные и геометрические свойства B-орбит. Кроме того, для него не требуются результаты Мадьяра, Веймана и Зелевинского[19]: в случае $P = B$ всё может быть сделано «вручную», лишь с использованием линейной алгебры. Это описание обобщает описание орбит в симметрическом пространстве $\mathrm{GL}_{k+l}/(\mathrm{GL}_k \times \mathrm{GL}_l)$, приведённое в диссертации С. Пина[20].

Далее мы переходим к изучению *слабого порядка* на множестве B-орбит в Y. Определение слабого порядка таково:

Определение. Орбита $\mathcal{O}$ меньше или равна орбиты $\mathcal{O}'$ относительно *слабого порядка* (обозначение: $\mathcal{O} \preceq \mathcal{O}'$), если $\bar{\mathcal{O}}'$ может быть получено как результат нескольких последовательных «поднятий» замыкания орбиты $\mathcal{O}$ при помощи стандартных ми-

[19] P. Magyar, J. Weyman, A. Zelevinsky, *Multiple flag varieties of finite type*, Adv. Math. **171** (1999), 285–309.

[20] S. Pin, *Adhérences d'orbites des sous-groupes de Borel dans les éspaces symétriques*, thèse de doctorat, Institut Fourier, Grenoble, 2001.

нимальных параболических подгрупп:

$$\mathcal{O} \preceq \mathcal{O}' \quad \Leftrightarrow \quad \exists (i_1, \ldots, i_r)\colon \bar{\mathcal{O}}' = P_{i_r} \ldots P_{i_1} \bar{\mathcal{O}} = \overline{P_{i_r} \ldots P_{i_1} \mathcal{O}},$$

где P_i суть стабилизаторы флагов $V_1 \subset \cdots \subset \widehat{V_{i+1}} \subset \cdots \subset V_n$, отличающихся от стандартного пропуском одной компоненты.

Многообразие Y не является однородным пространством группы $\mathrm{GL}(V)$; оно распадается на $\mathrm{GL}(V)$-орбиты, элементы каждой из которых соответствуют парам подпространств (U, W), размерность пересечения которых равна некоторому фиксированному числу d. Будем обозначать каждую такую орбиту через Y_d. Поскольку действие минимальных параболических подгрупп не может выводить за пределы $\mathrm{GL}(V)$-орбиты, описание слабого порядка на Y равносильно описанию слабого порядка на каждой из орбит Y_d.

Слабый порядок на множестве B-орбит в Y_d обладает рядом хороших свойств, которые, вообще говоря, не обязаны иметь место для произвольных сферических многообразий. В частности, все B-орбиты, являющиеся минимальными для этого порядка, имеют одинаковую размерность. Более точно, имеет место

Теорема 2. *В каждом Y_d, где $d \in [\max\{k+l-n, 0\}, \min\{k, l\}]$, содержится $\binom{k+l-2d}{k-d}$ минимальных орбит. Они все замкнуты в Y_d; их размерности равны $(k-d)(l-d)$. Они являются прямыми произведениями клеток Шуберта в грассманианах $\mathrm{Gr}(k, V)$ и $\mathrm{Gr}(l, V)$.*

Описание замыканий B-орбит, минимальных относительно слабого порядка, позволяет построить разрешения особенностей для замыканий всех B-орбит в Y. Эти разрешения строятся аналогично разрешениям Ботта-Самельсона для многообразий Шуберта в грассманианах.

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{O}$ — B-орбита в Y, получаемая при помощи действия последовательности минимальных параболических* *подгрупп* $(P_{i_1}, \dots, P_{i_r})$ *из некоторой минимальной (в смысле слабого порядка) орбиты* $\mathcal{O}_{\min} = X_w \times X_v$*, где* X_w *и* X_v *суть многообразия Шуберта в грассманианах* $\mathrm{Gr}(k, V)$ *и* $\mathrm{Gr}(l, V)$ *соответственно. Обозначим через* $F_w \colon Z_w \to X_w$ *и* $F_v \colon Z_v \to X_v$ *разрешения Ботта–Самельсона для этих многообразий Шуберта. Тогда отображение*

$$P_{i_r} \times^B \cdots \times^B P_{i_1} \times^B (Z_w \times Z_v) \to \bar{\mathcal{O}},$$

$$(p_{i_r}, \dots, p_{i_1}, (z_w, z_v)) \mapsto p_{i_r} \cdot \dots \cdot p_{i_1}(F_w(z_w), F_v(z_v))$$

есть разрешение особенностей для многообразия $\bar{\mathcal{O}}$*.*

В заключительной части работы мы обнаруживаем некоторые интересные и неожиданные взаимосвязи между топологическим порядком на множестве B-орбит на $\mathrm{Gr}(k, V) \times \mathrm{Gr}(l, V)$ и аналогичным порядком на множестве орбит борелевской подгруппы $B \subset \mathrm{GL}(V)$, действующей сопряжениями на верхнетреугольных матрицах из $\mathrm{Mat}(V)$, квадрат которых равен нулю. Последний порядок был описан в работах Анны Мельниковой[21], причём B-орбиты параметризуются инволютивными перестановками. В нашем случае B-орбиты в данной $(B \times B)$-орбите параметризуются некоторым подмножеством множества инволютивных перестановок; таким образом на этом подмножестве также определяется частичный порядок, происходящий из топологического порядка на множестве орбит. Выясняется, что эти два частичных порядка совпадают, несмотря на то, что они возникают в достаточно непохожих ситуациях.

Работа снабжена приложением, в котором приводятся диаграммы примыкания B-орбит в двойных грассманианах $\mathrm{Gr}(k, V) \times \mathrm{Gr}(l, V)$ при малых k, l и $\dim V$.

[21] A. Melnikov, *B-orbits in solutions to the equation $X^2 = 0$ in triangular matrices*, J. Algebra **223** (2000), no. 1, 101–108.

A. Melnikov, *Description of B-orbit closures of order 2 in upper-triangular matrices*, Transf. Groups, **11** (2006), No. 2, pp. 217–247.

A. Melnikov, *B-orbits of nilpotent order 2 and link patterns*, preprint, arXiv:math.RT/0703371.

Благодарности.

Я благодарю моего научного руководителя доктора физико-математических наук, профессора Эрнеста Борисовича Винберга за постановку задач и постоянное внимание к моей работе. Значительная часть работы была выполнена во время моих визитов в Институт Фурье (Гренобль, Франция); я весьма признателен ведущему научному сотруднику Национального центра научных исследований Франции Мишелю Бриону за гостеприимство и ценные замечания и советы. Я также благодарю всех участников семинара «Группы Ли и теория инвариантов» под руководством Э. Б. Винберга и А. Л. Онищика за полезные обсуждения.

Публикации по теме диссертации

[1] Е .Ю. Смирнов, *Разрешения особенностей для многообразий Шуберта в двойных грассманианах*, Функц. анализ и его прил. **42** (2008), № 2, с. 56–67.

[2] Е. Ю. Смирнов, *Порядок Брюа для двух подпространств и флага.* Депонировано в ВИНИТИ РАН, 2008, №777-В2008, 28 с.