МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 514.174+519.148+511.4

Коломейкина Екатерина Викторовна

Некоторые задачи, связанные с периодическими и условнопериодическими структурами

01.01.06 - математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Москва 2008

Работа выполнена на кафедре теории чисел Механико–математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико–математических наук, профессор Н.П. Долбилин
Официальные оппоненты:	доктор физико–математических наук, профессор Н.М. Добровольский (Тульский государственный педагогический институт имени Л.Н. Толстого)
	кандидат физико–математических наук Р.В. Михайлов (Математический институт имени В.А. Стеклова РАН)
Ведущая организация:	Владимирский государственный гуманитарный университет

Защита диссертации состоится 21 ноября 2008 г. в 16 часов 40 минут на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу:
Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП–1, Ленинские горы, д.1, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14–08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 21 октября 2008 г.

Ученый секретарь диссертационного совета Д.501.001.84 при МГУ,
доктор физико–математических наук, профессор А.О. Иванов

Общая характеристика работы.

Актуальность темы.

В диссертации изучаются вопросы, относящиеся к геометрии чисел. Характерными задачами геометрии чисел являются задачи о плотнейшей решеточной упаковке и о редчайшем решеточном покрытии евклидова пространства равными шарами. Особый интерес представляют расположения тел в пространстве, которые удовлетворяют условиям упаковки и покрытия одновременно. Такие расположения тел называются разбиением пространства. Так, одним из центральных понятий геометрии чисел является понятие параллелоэдра. Параллелоэдр был введен Е.С.Федоровым[1] как многогранник, который допускает разбиение евклидова пространства параллельными копиями нормальным образом, то есть грань–в–грань. Разбиение пространства на параллелоэдры обладает трансляционной группой симметрий, транзитивно действующей на множестве параллелоэдров. В силу этого, разбиение на параллелоэдры имеет решеточное строение.

В теорию параллелоэдров большой вклад внесли Г.Минковский (характеристические свойства параллелоэдра и точная верхняя оценка для числа гиперграней параллелоэдра произвольной размерности[2]), Г.Ф.Вороной (метод непрерывных параметров в изучении параллелоэдров Дирихле–Вороного, алгоритм для нахождения аффинных типов параллелоэдров Дирихле–Вороного[3]), Б.А.Венков (теорема о достаточности, обратная к теореме Минковского[4]), Б.Н.Делоне (вывод всех 4–мерных параллелоэдров[5]; метод «пустого шара»[6]), С.С.Рышков и Е.П.Барановский (вывод всех 5–мерных примитивных параллелоэдров Вороного[7]). Разными аспектами теории параллелоэдров занимались также А.Д.Александров, О.К.Житомирский, П.Макмюллен, П.Энгел, Р.Эрдал и другие.

Обобщением понятия параллелоэдра является стереоэдр. Согласно Е.С. Федорову, стереоэдр — это многогранник, допускающий разбиение пространства с транзитивной группой симметрий. Транзитивность группы движений означает, что произвольную ячейку разбиения можно перевести в любую другую ячейку этого разбиения посредством некоторой симметрии данного раз-

[1] *Федоров Е.С.,* Симметрия правильных систем фигур. С.–Пб., 1890.

[2] *Minkowski H.,* Allgemeine Leherzätzeüber Konvexe Polyeder. Nach. Ges. Wiss. Göttingen, 1897, 198–219.

[3] *Вороной Г.Ф.,* Исследование о примитивных параллелоэдрах, Собрание сочинений, 2, Киев, 1952.

[4] *Венков Б.А.,* О некотором классе эвклидовых многогранников, Вестник Ленинградского Университета, сер. матем., физ., хим., 1954, 9, 11–31.

[5] *Delaunay B.,* Sur la partition reguliere de l'espace a 4 dimension, Изв. АН СССР, 1929, No 1, 79–110, No 2, 147–164.

[6] *Delaunay B.* Sur la sphere vide. Изв. АН СССР, ОМЕН, N6, 1934, 793–800.

[7] *Рышков С.С., Барановский Е.П.,* С–типы n–мерных решеток и пятимерные параллелоэдры (с приложением к теории покрытий), Труды МИАН им. В.А.Стеклова, 137, 1976.

биения. Такое разбиение называется правильным.

Правильные разбиения и их группы изучались в работах Е.С.Федорова, А.Шенфлиса, Л.Бибербаха, Б.Н.Делоне, Н.Н.Сандаковой, А.Д.Александрова, М.И.Штогрина, Н.П.Долбилина, Р.В.Галиулина и других. Фундаментальные результаты по теории групп правильных разбиений в пространстве Лобачевского принадлежат Г.С.М.Кокстеру, Э.Б.Винбергу, В.С.Макарову, В.В.Никулину, М.Н.Прохорову и другим.

Правильные разбиения являются обобщением разбиений на параллелоэдры в силу знаменитой теоремы Шенфлиса–Бибербаха[8,9]. Последняя явилась ответом на вопрос о кристаллографических группах, поставленный Гильбертом в XVIII проблеме[10]. Из этой теоремы следует, что любая кристаллографическая группа G (дискретная группа с компактной фундаментальной областью), действующая в $d-$мерном евклидовом пространстве, обладает трансляционной подгруппой конечного индекса h. Группа симметрий правильного разбиения T является кристаллографической группой. Поэтому множество стереоэдров (ячеек разбиения) распадается в h трансляционных орбит. Если в группе G индекс $h = 1$ (то есть G — чисто трансляционная группа), то разбиение, на котором G действует транзитивно, является разбиением на параллелоэдры. Таким образом, по теореме Шенфлиса–Бибербаха всякое правильное разбиение есть объединение конечного числа решеточных упаковок евклидова пространства конгруэнтными многогранниками.

Заметим, что индекс h ограничен сверху для любой размерности d. Для $d = 1, 3, 5$ и $d > 10$ индекс ограничен константой $H(d) = 2^d \cdot d!$, которая является порядком полной группы $d-$мерного куба[11,12].

Е.С.Федоров[1] и А.Шенфлис[9] нашли все кристаллографические группы движений трехмерного евклидова пространства.

Б.Н.Делоне и Н.Н.Сандакова[6,13] получили оценку сверху для числа f_{d-1} гиперграней d–мерного стереоэдра: $f_{d-1} \leqslant 2(2^d - 1) + (h-1)2^d$. Эта теорема обобщает оценку Минковского $f_{d-1} \leqslant 2(2^d - 1)$ для числа гиперграней параллелоэдра (то есть при $h = 1$). Позднее она была слегка улучшена А.Тарасовым[14]. В отличие от результата Минковского, более общая оценка Делоне–Сандаковой не является точной. Из этой оценки была выведена конечность числа комбинаторно неэквивалентных типов нормальных правильных разбиений пространства на выпуклые многогранники. Опираясь на этот результат, а также

[8] *Bieberbach L.,* Ueber die Bewegungsgruppen der Euklidischen Rãume II, Math. Ann. bf 72, 1912, 400–412.

[9] *Schönfliess A.,* Kristallsysteme und Kristallstruktur. Leiptzig, 1891.

[10] *Гильберт Д.,* Проблемы Гильберта, ред. П.С.Александров, "Наука", Москва, 1969, 238 с.

[11] *Feit W.,* The orders of finite linear groups. Preprint, 1995.

[12] *Friedland S.,* The maximal orders of finite subgroups in $GL_n(Q)$, Proc. Amer. Math. Soc., 125(12), 1997, 3519–3526.

[13] *Делоне Б.Н., Сандакова Н.Н.,* Теория стереоэдров, Труды математического института им. В.А.Стеклова, 1961, No 64, 28–51.

[14] *Тарасов А.С.,* Сложность выпуклых стереоэдров, Матем. заметки, 1998, Т. 61, В. 5, 797–800.

метод «пустого шара»[6], Б.Н.Делоне и Н.Н.Сандакова построили общую теорию правильных разбиений Вороного евклидова пространства[13].

М.И.Штогриным были выведены все типы стереоэдров для II триклинной группы.[15] Это единственный пока (за исключением трансляционной и коксетеровской групп) пример кристаллографической группы, действующей в 3–мерном евклидовом пространстве, для которой были перечислены всевозможные типы стереоэдров Вороного. Отметим также важную работу А.Д.Александрова[16], который обобщил идею Пуанкаре на многомерный случай, показав, что требование к сильно связному односвязному полиэдральному комплексу быть разбиением в окрестности каждой его $(d-2)$−мерной грани есть достаточное условие того, что весь полиэдральный комплекс является разбиением односвязного пространства.

Задачи, рассматриваемые в первых двух главах диссертации, имеют кристаллографическую мотивацию. Вполне естественно, что атомы кристалла образуют так называемую (r, R)−систему или множество Делоне (равномерно дискретное и однородное точечное множество; определение см. в главе 1). Но помимо этого, атомы кристалла находятся в узлах одной или нескольких целочисленных решеток, параллельно расположенных друг относительно друга. Таким образом, в идеальном кристалле расположение атомов периодично, сколь угодно большой фрагмент повторяется бесконечное число раз. Положение ближних атомов обусловлено наличием и геометрией межатомных связей.[17] Атомы одного наименования в процессе кристаллизации стараются окружить себя идентичным образом. Так как взаимодействие между далекими атомами ничтожно, то с физической точки зрения подобная идентичность может быть объяснима взаимодействием близлежащих атомов. Другими словами, идентичность структуры всех атомов одного и того же сорта может быть физически обусловлена лишь в некоторой окрестности. При этом глобальный порядок, наблюдающийся в кристаллах, должен быть следствием этой локальной идентичности. Локальные условия точечных систем можно высказать в терминах разбиений пространства на многогранники. Это следует из того, что каждой точке множества Делоне можно поставить в соответствие область Вороного, а точечной системе можно поставить в соответствие разбиение Вороного на многогранники.

Приведенное выше определение правильности разбиения использует понятие группы явным образом. Д.Гильберт и С.Кон–Фоссен[18] требование пра-

[15] *Штогрин М.И.,* Правильные разбиения Дирихле–Вороного для второй триклинной группы. Труды МИАН им. В.А.Стеклова 123, 1973.

[16] *Александров А.Д.,* О заполнении пространства многогранниками. Вестник Ленинградского Университета, сер. матем., физ., хим., 1954, 9, 33–43.

[17] *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.,* Фейнмановские лекции по физике, 7, «Мир», Москва, 1966, 290 с.

[18] *Гильберт Д., Кон-Фоссен С.,* Наглядная геометрия. Пер. с немецкого. УРСС, 2004, 344 с.

вильности переформулировали более наглядно, а именно: разбиение правильное, если каждая его ячейка окружена до бесконечности так же, как и любая другая. На первый взгляд, в этом определении не используется понятие группы. Однако уточнение того, что все ячейки разбиения окружены другими ячейками до бесконечности идентично, и состоит в том, что каждую ячейку можно перевести в любую другую ячейку движением, совмещающим все разбиение с собой. Но это и есть условие транзитивности группы симметрий разбиения на множестве его ячеек. Таким образом, определение правильности по Гильберту и Кон–Фоссену также опирается на понятие группы.

В 1974 году Б.Н.Делоне и Р.В.Галиулиным была инициирована задача: вывести правильность разбиения (или правильность системы точек) из локальной идентичности данного разбиения лишь в некоторой окрестности каждой его ячейки. Была доказана локальная теорема, отвечающая на этот вопрос одновременно для точечных систем и для разбиений[19,20].

Из локальной теоремы, а также оценки Делоне–Сандаковой, вытекает, что для любой размерности d существует такая константа $k = k(d)$, что разбиение T евклидова пространства $\mathbb{E}^d$ на конгруэнтные ячейки является правильным тогда и только тогда, когда число гиперграней $f_{d-1} \leqslant 2(2^d - 1) + (H(d) - 1)2^d$ и все короны радиуса k попарно конгруэнтны[21].

Обобщением правильного разбиения является мультиправильное (или m-эдральное) разбиение, то есть разбиение, множество ячеек которого распадается в конечное число m орбит относительно группы симметрий данного разбиения. Были найдены локальные условия, необходимые и достаточные для того, чтобы разбиение, а также точечное множество Делоне, были мультиправильными с заданным числом m орбит[21,22]. Эта теорема получила название обобщенной локальной теоремы. До открытия квазикристаллических разбиений Пенроуза[23] бесконечная повторяемость любого локального фрагмента разбиения рассматривалась многими не только как необходимое, но и достаточное условие кристаллографичности разбиения. Однако это казавшееся правдоподобным утверждение является неверным: в квазипериодическом узоре Пенроуза каждый локальный фрагмент встречается бесконечное число раз, тем не менее, разбиение Пенроуза кристаллографическим не является. Обобщенная локальная теорема уточняет условия кристаллографичности и, тем самым, проводит четкую границу между кристаллографическими и

[19] *Делоне Б.Н., Долбилин Н.П., Штогрин М.И., Галиулин Р.В.,* Локальный критерий правильности системы точек, ДАН СССР, матем., 227, є1, 1976, 319–322.

[20] *Dolbilin N.P., Schattschneider D.,* The local theorem for tilings. Quasicrystals and discrete geometry. Ed.J.Patera. Providence (RI): Amer.Math. Soc., 1998, 193–200.

[21] *Dolbilin N.P.,* Which clusters can form a crystal?, Volume "Voronoi's impact on modern science", book 2, Kyiv, 1998, 96–104.

[22] *Н.П.Долбилин, М.И.Штогрин,* Локальный критерий для кристаллической структуры, IX Всесоюзная геометрическая конференция, тезисы, Кишинев, 1987, 64, с. 99.

[23] *R.Penrose,* The role of aesthetics in pure and applied research. Bull. Inst. Maths. Appl. 10, 1974.

некристаллографическими разбиениями.

Глава 3 посвящена применению методов геометрической теории диофантовых приближений в одной задаче о распределении последовательности Кронекера. Пусть числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in \mathbb{R}$, $s \geqslant 1$, линейно независимы вместе с 1 над $\mathbb{Z}$. Последовательностью Кронекера называется последовательность точек

$$\xi_k = (\{\alpha_1 k\}, \ldots, \{\alpha_s k\}), \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

в единичном кубе $[0; 1)^s$.

Согласно теореме Кронекера, эта последовательность всюду плотна в $[0; 1)^s$. Г.Вейль доказал, что эта последовательность равномерно распределена [24], то есть, если обозначить $N_p(\gamma_1, \ldots, \gamma_s)$ количество попаданий первых p членов последовательности Кронекера в параллелепипед $[0, \gamma_1] \times \ldots \times [0, \gamma_s]$, $\gamma_i \in (0, 1)$, $i = 1, \ldots, s$, то для величины

$$D_p = \sup_{\gamma_1, \ldots, \gamma_s \in (0,1]} |N_p(\gamma_1, \ldots, \gamma_s) - \gamma_1 \ldots \gamma_s p|$$

будет выполнено

$$D_p = \bar{\bar{o}}(p), \quad p \to \infty.$$

В общем случае более сильную оценку для D_p, чем вышеприведенная, получить нельзя. Это связано с существованием чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$, допускающих аномально хорошие диофантовые приближения в смысле линейной формы — сингулярных систем А.Я.Хинчина[25,26].

Напомним читателям определение $\mu-$сингулярных систем Хинчина. Пусть функция $\mu(y) = o(y^{-s})$, $y \to \infty$, убывает к нулю. Набор чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ называется $\mu-$сигулярной по Хинчину системой (в смысле линейной формы), если для любого $T > 1$ имеется решение системы неравенств

$$||m_1\alpha_1 + \ldots + m_s\alpha_s|| < \mu(T), \quad 0 < \max_{1 \leqslant j \leqslant s} |m_j| \leqslant T$$

в целых числах $m_1, \ldots, m_s$.

В главе 3 при $s \geqslant 2$ будут построены сингулярные системы Хинчина специального вида, с помощью которых получены новые результаты о распределении последовательности

$$\{\alpha_1 k + \varphi_1\}, \ldots, \{\alpha_s k + \varphi_s\}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

в среднем по начальным фазам $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$.

[24] *H. Weyl,* Uber die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins. Math. Ann. 1916, Bd. 77, 313–352.

[25] *A. Khintchine,* Uber eine klasse linearer Diophantisher approximationen. Rendiconti Circolo Matematico di Palermo. 50, 1926, s. 170–195.

[26] *Касселс Дж.В.С.,* Введение в теорию диофантовых приближений. М.: ИЛ, 1961.

Обзор близких задач о геометрических свойствах диофантовых приближений имеется в работе[27].

Пусть $s=1$ и $F(x_1)$ — абсолютно непрерывная вещественнозначная функция, периодичная по вещественной переменной x_1 с периодом единица и нулевым средним значением $\int_0^1 F(x_1)dx_1=0$. Е.А.Сидоровым[28] было доказано, что если α_1 иррационально, то

$$\liminf_{q\to+\infty}\sup_{\varphi_1}\left|\sum_{k=0}^{q-1}F(\alpha_1 k+\varphi_1)\right|=0.$$

Несколько ранее В.В.Козловым[29,30] подобный результат был получен в предположении дважды дифференцируемости F. Отметим, что, согласно Г.Вейлю, при всяком s для гладкой функции $F(x_1,\ldots,x_s)$, периодичной (с периодом 1) по каждому из аргументов и со средним значением равным нулю в случае, когда числа $\alpha_1,\ldots,\alpha_s$ линейно независимы вместе с 1 над полем $\mathbb{Q}$, выполняется

$$\sup_{\varphi_1,\ldots,\varphi_s}\left|\sum_{k=0}^{q-1}F(\alpha_1 k+\varphi_1,\ldots,\alpha_s k+\varphi_s)\right|=o(q),\quad q\to+\infty.$$

Н.Г.Мощевитиным[31,32] было доказано, что при всяком s для гладкой функции $F(x_1,\ldots,x_s)$, периодичной по каждому из аргументов и со средним значением равным нулю в случае, когда числа $\alpha_1,\ldots,\alpha_s$ линейно независимы вместе с 1 над полем $\mathbb{Q}$, для каждой фиксированной начальной фазы $(\varphi_1,\ldots,\varphi_s)$ выполняется

$$\liminf_{q\to+\infty}\left|\sum_{k=0}^{q-1}F(\alpha_1 k+\varphi_1,\ldots,\alpha_s k+\varphi_s)\right|<+\infty.$$

На самом деле, конструкция доказательства из работ Н.Г.Мощевитина [31,32] позволяет иметь этот результат при $F\in C^m(\mathbb{T}^s), m=e^{\gamma s\ln s}$.

[27] *Moshchevitin N.G.,* Best Diophantine approximations : the phenomenon of degenerate dimension. Surveys in Geometry and Number Theory. London Math. Society, Lecture Note S., Cambridge University Press, London, 2007, vol. 338, 162–182.

[28] *Сидоров Е.А.,* Об условиях равномерной устойчивости по Пуассону цилиндрических систем, УМН., 1979, Т. 34, В. 6, 184–188.

[29] *Козлов В.В.,* Об интегралах квазипериодических функций. Вестник Московского Университета Сер.1, Матем., 1978, В.1, 106–115.

[30] *Козлов В.В.,* Методы качественного анализа в динамике твердого тела. М.: МГУ, 1980.

[31] *Мощевитин Н.Г.* О возвращаемости интеграла гладкой условнопериодической функции// Матем. заметки, 1998, Т. 63, В. 5, С. 737–748.

[32] *Moshchevitin N.G.,* Algebraic Number Theory and Diophantine analysis. Proc. Int. Conf. Graz, Austria, 2000, p. 311–329.

Цель работы

Целью настоящей работы является поиск локальных условий, обеспечивающих правильность разбиений евклидовой плоскости и двумерной сферы; поиск локальных условий, обеспечивающих биправильность триангуляций евклидовой плоскости; поиск условий, обеспечивающих отсутствие равномерной возвращаемости гладких сумм по начальной фазе при наборе частот, линейно независимых вместе с 1 над полем рациональных чисел.

Методы исследования.

В работе используются методы геометрии чисел, теории разбиений, теории цепных дробей, методы комбинаторного, функционального и математического анализа.

Научная новизна

Основные результаты, полученные в данной работе, являются новыми и состоят в следующем:

1. Доказано, что разбиение евклидовой плоскости является правильным тогда и только тогда, когда все неполные короны радиуса 1 попарно конгруэнтны.

2. Доказано, что разбиение двумерной сферы является правильным тогда и только тогда, когда все неполные короны радиуса 1 попарно конгруэнтны.

3. Доказано, что триангуляция евклидовой плоскости является биправильной тогда и только тогда, когда множество полных корон радиуса 1 разбиения распадается на 2 класса.

4. Найдены необходимые и достаточные условия на множество, называемое спектром гладкой периодической функции $F(x_1, \ldots, x_s)$, обеспечивающие отсутствие равномерной возвращаемости по начальной фазе $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ суммы $\sum_{k=0}^{q-1} F(\alpha_1 k + \varphi_1, \ldots, \alpha_s k + \varphi_s)$ при частотах $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$, линейно независимых вместе с 1 над полем рациональных чисел.

Теоретическая и практическая ценность.

Работа носит теоретический характер. Полученные в ней результаты и методы исследований могут быть применены в области геометрической кристаллографии, теории разбиений и динамических систем.

Апробация диссертации.

Результаты диссертации докладывались:

- Научно-исследовательский семинар по теории чисел под руководством Ю.В. Нестеренко, А.А. Карацубы и Н.Г. Мощевитина, 2007 г.;
- «Дискретная геометрия и геометрия чисел» под руководством Н.П. Долбилина и Н.Г. Мощевитина, 2007 г.;
- «Выпуклые многогранники» под руководством Н.П. Долбилина, 2007 г.;
- «Геометрия в целом» под руководством И.Х. Сабитова и Э.Р. Розендорна, 2007 г.;
- V международная конференция «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения», (г. Тула, ТПГУ, 19–24 мая 2003 г.);
- VI международная конференция «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения», посвященная 100–летию Н.Г. Чудакова (г. Саратов, СГУ, 13–17 сентября 2004 г.);
- Международная конференция «Аналитические методы в теории чисел, теории вероятностей и математической статистике», посвященная 90–летию Ю.В. Линника (г. Санкт–Петербург, С.–Пб.ГУ, 25–29 апреля 2005 г.);
- Международная конференция «Аналитические и комбинаторные методы в теории чисел и геометрии», посвященная Н.М. Коробову (г. Москва, МГУ, 25–31 мая 2006 г.);
- IX Международный семинар «Дискретная математика и ее приложения», посвященный 75–летию со дня рождения академика О.Б. Лупанова (г. Москва, МГУ, 18–23 июня 2007 г.).

Публикации.

Результаты диссертации опубликованы в 5 работах автора, список которых приводится в конце автореферата [1–5].

Структура диссертации.

Диссертация состоит из введения, 3 глав, разделенных на параграфы, и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 88 страниц. Библиография включает 58 наименований.

Краткое содержание работы.

Введение содержит постановку основных задач, рассматриваемых в диссертации. Также во введении приведен обзор результатов, относящихся к содержанию работы.

В **главе 1** изучаются задачи по локальной теории правильных разбиений. Результаты как первой, так и второй главы диссертации формулируются в терминах корон радиуса 1 (полных и неполных). Под неполной короной радиуса 1 ячейки данного разбиения понимается подкомплекс разбиения, состоящий из данной ячейки и всех ячеек разбиения, смежных с данной по общим сторонам. Под полной короной радиуса 1 ячейки разбиения понимается подкомплекс разбиения, состоящий из ячейки и всех ячеек разбиения, смежных с данной как по целым сторонам, так и по общим вершинам. В работе[33] было показано, что для обеспечения правильности разбиения евклидовой плоскости достаточно условия попарной конгруэнтности полных корон радиуса 1 или, что то же самое, достаточно существования в данном разбиении ровно одного класса эквивалентности полных корон радиуса 1.

В первой части главы 1 диссертации доказывается теорема 1, улучшающая результат работы[33].

Теорема 1. *Разбиение евклидовой плоскости на выпуклые многоугольники правильно тогда и только тогда, когда все неполные короны радиуса 1 попарно конгруэнтны.*

Доказательство теоремы 1 носит комбинаторный характер и в значительной степени опирается на локальную теорему[20] и теорему о полных коронах[33].

Отметим, что для плоскости Лобачевского это утверждение не верно. В разбиении, построенном K. Böröczky[34], не только все неполные, но и полные короны радиуса 1 попарно конгруэнтны. Однако данное разбиение не только не правильно, но даже не кристаллографично, то есть площадь фундаментальной области группы симметрий разбиения бесконечна (М.И.Штогрин). Этот факт верен также и для многомерных разбиений Böröczky (см. Макаров[35]; N.Dolbilin, D.Frettlöh[36]).

Отметим также, что в евклидовых пространствах размерности 3 и выше попарная конгруэнтность полных корон радиуса 1 также не достаточна для обеспечения правильности разбиений. В работе[37] приведен пример трехмерного разбиения, в котором все полные короны радиуса 1 попарно конгруэнтны, но разбиение правильным не является.

В этой же **главе 1** исследуется вопрос о локальных условиях правильности

---

[33] *Schattschneider D., Dolbilin N.P.,* One Corona is enough for the Euclidean Plane. Fields Institute Monographs Quasi Crystals and Discrete Geometry, Ad. G.Patera, A.M.S., Rod Island, 1998, 207–246.

[34] *Böröczky K.,* Gombkitol tesek all ando gorbuletu terekben. Mat. Lapok. 1974, V. 25, P 265–306; 1975, V. 26, P. 67–90.

[35] *Макаров В.С.,* Об одном неправильном разбиении $n-$мерного пространства Лобачевского конгруэнтными многогранниками. "Дискретная геометрия и топология", посв. 100–летию со дня рождения Б.Н.Делоне, Труды МИАН, 196, 1991, 93–96.

[36] *N.Dolbilin, D.Frettlöh,* Properties of Böröczki tilings in high dimensional hyperbolic spaces. European Journal of Combinatorics, 2008 (в печати).

[37] *Engel P.,* Geometric Crystallography, D. Reidel Publishing Co, 1986, 266 p.

разбиений двумерной сферы. Доказывается следующая теорема, являющаяся аналогом теоремы 1:

Теорема 2. *Разбиение двумерной сферы на выпуклые сферические многоугольники правильно тогда и только тогда, когда все неполные короны радиуса 1 попарно конгруэнтны.*

В **главе 2** рассматриваются мультиправильные ($m-$эдральные) разбиения евклидовой плоскости. Пусть фиксировано $m \in \mathbb{N}$, $m-$эдральное разбиение — это разбиение, множество ячеек которого распадается в m орбит относительно группы симметрий данного разбиения. Такое разбиение называют так же кристаллографическим разбиением. Правильные разбиения являются частным случаем кристаллографических разбиений при $m = 1$.

На основе обобщенной локальной теоремы была получена работа[38], в которой дается оценка сверху F_{d-1} для числа гиперграней произвольной ячейки в $m-$эдральном разбиении пространства $\mathbb{E}^d$. Из этой работы следует существование такого целого числа $k = k(d, m)$, что если все ячейки разбиения имеют не более F_{d-1} гиперграней и все короны радиуса k данного разбиения распадаются в m классов, то разбиение является мультиправильным с m орбитами. Оценка $k(d, m)$ груба, поэтому имеет значение нахождение более точных оценок этой величины.

Цель второй главы — улучшить оценку $k(d, m)$ для $d = m = 2$ в случае, если все ячейки разбиения треугольные. Обозначим через N_k^* число классов полных корон радиуса k, через N_k — число классов неполных корон радиуса k. Согласно определению, в $m-$эдральном разбиении число N_k^* классов полных корон радиуса k равно m для всех k, начиная с некоторого номера k_0. Для биправильных разбиений $N_k^* = 2$ для всех $k \geqslant k_0$.

Основным результатом главы 2 является следующая теорема:

Теорема 3. *Триангуляция евклидовой плоскости является биправильной тогда и только тогда, когда число N_1^* классов полных корон радиуса 1 в триангуляции равно 2.*

В доказательстве теоремы 3 активно используются обобщенная локальная теорема для $m-$эдральных разбиений[21] и теорема 1 диссертации.

Результат теоремы 3 неулучшаем, а именно: в главе 2 приведен пример триангуляции евклидовой плоскости с числом классов неполных корон $N_1 = 2$, но с числом классов полных корон $N_1^* = 3$. Это означает, что число орбит

[38] *N.P. Dolbilin, A.W.M. Dress and D.H. Huson.* Two finiteness theorems for periodic tilings of d-dimensional euclidean space. Discrete and Computational Geometry, 1998, 20:143–153.

ячеек данного разбиения как минимум равно 3, и разбиение биправильным не является.

Опишем содержание **главы 3.** В работе Н.Г.Мощевитина[39] было доказано, что для произвольной функции $F(x_1, \ldots, x_s), s \geqslant 2$, у которой все коэффициенты Фурье $F_{m_1,\ldots,m_s}$, кроме коэффициента $F_{0,\ldots,0}$, отличны от нуля и для любой положительнозначной функции $\lambda(y) = o(y),\ y \to +\infty$, найдется набор чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$, линейно независимых вместе с единицей над полем рациональных чисел, такой, что

$$\sup_{\varphi_1,\ldots,\varphi_s} \left| \sum_{k=0}^{q-1} F(\alpha_1 k + \varphi_1, \ldots, \alpha_s k + \varphi_s) \right| \geqslant$$

$$\geqslant \left(\int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 \left| \sum_{k=0}^{q-1} F(\alpha_1 k + \varphi_1, \ldots, \alpha_s k + \varphi_s) \right|^2 d\varphi_1 \ldots d\varphi_s \right)^{1/2} > \lambda(q)$$

при всех достаточно больших q.

Глава 3 настоящей работы посвящена уточнению последнего результата. Пусть $F(x_1, \ldots, x_s)$ представима рядом Фурье

$$F(x_1, \ldots, x_s) = \sum_{\bar{m} \in \mathbb{Z}^s} F_{\bar{m}} e^{2\pi i (m_1 x_1 + \ldots + m_s x_s)}.$$

В этой главе формулируется и доказывается теорема 4 о необходимых и достаточных условиях на множество

$$\operatorname{Spec} F = \{(m_1, \ldots, m_s) \in \mathbb{Z}^s : \quad F_{m_1,\ldots,m_s} \neq 0\},$$

называемое *спектром функции* F, которые бы обеспечивали отсутствие равномерной возвращаемости по начальной фазе $(\varphi_1, \ldots, \varphi_s)$ суммы $\Sigma_{k=0}^{q-1} F(\alpha_1 k + \varphi_1, \ldots, \alpha_s k + \varphi_s)$.

Теорема 4. *Пусть периодическая функция F с периодом 1 принадлежит классу C^1 и*

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 F(x_1, \ldots, x_s) dx_1 \ldots dx_s = 0.$$

Рассмотрим следующие два условия:
A) для любой положительнозначной функции $\lambda(y) = o(y),\ y \to +\infty$, най-

[39] *Мощевитин Н.Г.,* Распределение значений линейных функций и асимптотическое поведение траекторий некоторых динамических систем. Матем. заметки, 1995, Т. 58, В. 3, с. 394–410.

дется такой набор чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_s$, линейно независимых вместе с единицей над полем рациональных чисел, что

$$\left(\int_0^1 \dots \int_0^1 \left|\sum_{k=0}^{q-1} F(\alpha_1 k + \varphi_1, \dots, \alpha_s k + \varphi_s)\right|^2 d\varphi_1 \dots d\varphi_s\right)^{1/2} > \lambda(q)$$

при всех достаточно больших q;
B) найдется положительное R и ненулевая целая точка $(p_1, \dots, p_s) \in \mathbb{Z}^s$ такие, что $\operatorname{Spec} F \subset \mathcal{B}(R) \cup \mathcal{L}(p)$, *где $\mathcal{B}(R)$ обозначает шар с центром в нуле и радиусом R, а $\mathcal{L}(p)$ обозначает прямую, проходящую через начало координат и точку p.*
Тогда условие A) эквивалентно отрицанию условия B).

Ранее была получена автором похожая теорема, в которой давалось достаточное условие на $\operatorname{Spec} F$ для случая $s = 2$, чтобы выполнялось условие A теоремы 4. Сформулируем эту теорему.

Теорема 5. *Пусть $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}$ такая функция,* $\operatorname{Spec} f$ *которой имеет две предельные прямые. Тогда для любой функции $\lambda = \lambda(y)$ такой, что $\lambda(y) = o(y)$ и $\frac{\lambda(y)}{y}$ монотонно убывает к нулю при $y \to \infty$, найдутся числа α_1 и α_2, линейно независимые вместе с 1 над $\mathbb{Z}$, что для всех достаточно больших q выполняется:*

$$\max_{y_1, y_2 \in [0,1]} \left|\sum_{k=0}^{q-1} f(\alpha_1 k + y_1, \alpha_2 k + y_2)\right| \gg \lambda(q).$$

Фактически все конструкции, как из работ Н.Г.Мощевитина, так и наши, основаны на построении сингулярных систем Хинчина специального вида. Числа $\alpha_1, \dots, \alpha_s$, обладающие свойствами, необходимыми для доказательства теоремы 4, строятся с помощью методов геометрии чисел в основной вспомогательной лемме.

Отметим, что рассматриваемые величины

$$\sum_{k=0}^{p-1} F(\alpha_1 k + \varphi_1, \dots, \alpha_s k + \varphi_s) \quad \text{и} \quad \sup_{\varphi_1, \dots, \varphi_s} \left|\sum_{k=0}^{p-1} F(\alpha_1 k + \varphi_1, \dots, \alpha_s k + \varphi_s)\right|$$

можно интерпретировать как гладкие аналоги соответственно локального и глобального отклонения

$$N_p(\gamma_1, \dots, \gamma_s) - \gamma_1 \dots \gamma_s p \quad \text{и} \quad D_p = \sup_{\gamma_1, \dots, \gamma_s} \left|N_p(\gamma_1, \dots, \gamma_s) - \gamma_1 \dots \gamma_s p\right|.$$

Благодарности.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю, доктору физико–математических наук, профессору Н.П. Долбилину за постановку задач, постоянное внимание и помощь в работе.

Автор выражает искреннюю благодарность: заведующему кафедрой теории чисел чл. корр. РАН Ю.В. Нестеренко, профессору Н.Г. Мощевитину и всем участникам семинара «Дискретная геометрия и геометрия чисел», в особенности Е. Маринину, за полезные обсуждения и поддержку.

Публикации автора по теме диссертации.

[1] *Коломейкина Е. В., Мощевитин Н. Г.,* О невозвращаемости в среднем сумм вдоль последовательности Кронекера. Матем. заметки, 2003, Т. 73, No 1, с. 140–143.

[2] *Коломейкина Е. В.,* Локальные условия правильности разбиения евклидовой плоскости. Чебышевский сборник, 2004, Т. 5, No 3(11), с. 31–51.

[3] *Коломейкина Е. В.,* Локальные условия правильности разбиения двумерной сферы. Чебышевский сборник, 2005, Т. 6, No 2(14), с. 184–195.

[4] *Коломейкина Е. В.,* О локальных условиях биправильных триангуляций евклидовой плоскости. Материалы IX Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения», посвященного 75-летию со дня рождения академика О.Б. Лупанова, 2007, с. 384–386.

[5] *Коломейкина Е.В.*, Асимптотическое поведение временных средних. III Международная конференция «Современные проблемы теории чисел и приложения», Тула, 1996, с. 80.

В работе [1] второму автору принадлежит концепция доказательства основного результата, первому автору — весьма сложная техническая реализация этой концепции.