МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО–МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

УДК 517.982.256

Пятышев Илья Алексеевич

АППРОКСИМАТИВНО КОМПАКТНЫЕ МНОЖЕСТВА В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

01.01.01 — математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2008

Работа выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	кандидат физико-математических наук, доцент Бородин Петр Анатольевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник Балаганский Владимир Сергеевич, институт математики и механики Уральского отделения РАН, кандидат физико-математических наук Рютин Константин Сергеевич, МГУ имени М.В. Ломоносова
Ведущая организация:	Московский физико-технический институт (государственный университет)

Защита диссертации состоится 26 декабря 2008 г. в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д.501.001.85 при Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, ауд. 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан " 26 ноября" 2008 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.85 при МГУ,
доктор физико-математических
наук, профессор — И. Н. Сергеев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

Пусть X — линейное нормированное пространство, M — непустое подмножество X, $\rho(x, M) := \inf\{\|x - y\| : y \in M\}$ — расстояние от элемента $x \in X$ до M, $P_M(x) = \{y \in M : \|x - y\| = \rho(x, M)\}$ — метрическая проекция элемента x на множество M. Оператор $P_M : x \to P_M(x)$, вообще говоря, неоднозначен и определен не на всем X. В случае, если P_M определен на всем пространстве X, M называется *множеством существования*, а если P_M однозначен на своей области определения, то M называется *множеством единственности*. Если M является одновременно множеством существования и множеством единственности, то есть для любого $x \in X$ в M существует ровно один элемент наилучшего приближения $P_M(x)$, то M называется *чебышевским* множеством.

Свойства множества быть множеством существования, единственности или чебышевским множеством относятся к числу основных *аппроксимативных* свойств.

Основными в теории приближения в нормированных пространствах являются задачи следующих типов:

1) получение геометрических, топологических и аналитических характеристик множеств $M \subseteq X$, обладающих некоторым заданным аппроксимативным свойством в пространстве X,

2) описание линейных нормированных пространств X, в которых заданный класс множеств $M \subseteq X$ обладает заданным аппроксимативным свойством.

Теория приближений в нормированных пространствах берет свое начало в классической работе П.Л.Чебышева (1859), в которой, в частности, доказана чебышевость множества P_n алгебраических многочленов степени не выше чем n и множества R_{mn} рациональных функций со степенью числителя не выше m и степенью знаменателя не выше n в пространстве $C[a, b]$ функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$. В этой же работе П.Л.Чебышев описал оператор метрического проектирования на множества P_n и R_{mn} (теорема об альтернансе). В дальнейшем геометрические вопросы теории приближений в пространстве C изучались А.Хааром (1918), А.Н.Колмогоровым (1948), Е.Я.Ремезом (1953). Окончательное становление геометрической теории приближений произошло в конце 50-х и в 60-е годы благодаря работам И.Зингера, В.Кли, Н.В.Ефимова и С.Б.Стечкина, В.И.Бердышева, Л.П.Власова, А.Л.Гаркави, Е.В.Ошмана, С.Я.Хавинсона, Д.Вульберта, Б.Крипке, Дж.Линденштраусса, П.Морриса, Т.Ривлина, У.Рудина, Р.Фелпса, Р.Холмса, Э.Чини и др. В дальнейшем существенный вклад в развитие геометрической теории приближений внесли В.С.Балаганский, С.В.Конягин, И.Г.Царьков, Л.Зайичек.

Значительная часть опубликованных работ по геометрической теории приближений группируется вокруг следующей проблемы Кли–Ефимова–Стечкина: *доказать (или опровергнуть), что в гильбертовом пространстве любое чебышевское множество выпукло.* Важную роль в этих исследованиях играет понятие аппроксимативной компактности, введенное в 1961 году Н.В.Ефимовым и С.Б.Стечкиным.

Пусть M — некоторое подмножество банахова пространства X. Последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ называется *минимизирующей* для элемента $x \in X$, если $\|y_n - x\| \to \rho(x, M)$ при $n \to \infty$.

Определение (Н.В.Ефимов, С.Б.Стечкин, 1961). Множество M *аппроксимативно компактно*, если для любого $x \in X$ всякая минимизирующая последовательность содержит подпоследовательность, сходящуюся к элементу из М.

Понятие аппроксимативной компактности не зависит от линейной структуры X и может рассматриваться в любом метрическом пространстве. Аппроксимативно компактное множество M замкнуто, а также является множеством существования.

Произвольное множество M в банаховом пространстве не обязано быть аппроксимативно компактным, но для него можно определить множество $AC(M) = \{x : \forall$ минимизирующей последовательности $\{y_n\} \subset M$ $\exists y_{n_k} \to y \in M\}$ точек аппроксимативной компактности.

В связи с упомянутой проблемой была доказана

Теорема А (Н.В.Ефимов, С.Б.Стечкин, 1961). *Пусть X — гладкое, равномерно выпуклое банахово пространство. Для того, чтобы чебышевское множество $M \subset X$ было выпукло, необходимо и достаточно, чтобы оно было аппроксимативно компактно.*

В дальнейшем эта теорема обобщалась Л.П. Власовым.

После работы Н.В.Ефимова, С.Б.Стечкина аппроксимативно компактные множества и подпространства изучались многими авторами. Общая задача описания аппроксимативно компактных множеств в большинстве самых употребительных банаховых пространств не решена. В достаточно "хороших" пространствах X аппроксимативно компактными являются все выпуклые замкнутые множества. Такие пространства называются пространствами Ефимова-Стечкина.

Определение (И.Зингер, 1964). Банахово пространство X называется *пространством Ефимова-Стечкина*, если для любой последовательности

$\{x_n\} \subset X, \|x_n\| = 1$, из того, что $f \in X^*, \|f\| = 1, f(x_n) \to 1$, следует существование у $\{x_n\}$ сходящейся подпоследовательности.

Теорема B (И.Зингер, 1964). *Следующие условия эквивалентны:*

1) X — пространство Ефимова-Стечкина;

2) всякое выпуклое замкнутое множество в X аппроксимативно компактно;

3) всякая замкнутая гиперплоскость в X аппроксимативно компактна;

4) всякое слабо замкнутое множество в X аппроксимативно компактно.

Примерами пространств Ефимова-Стечкина служат пространства $L_p,\ 1 < p < \infty$. В силу теоремы B задача описания выпуклых аппроксимативно компактных множеств содержательна для пространств, не являющихся пространствами Ефимова-Стечкина, в первую очередь для пространств $L_1,\ L_\infty$ и пространства $C(K)$ функций, непрерывных на (хаусдорфовом) компакте K.

Пусть Q — бикомпакт, $C(Q)$ — пространство непрерывных вещественнозначных функций с нормой $\|x\| = \sup\{|x(t)| : t \in Q\}$.

Теорема C (Л.П.Власов, 1980). *Пусть Y — собственное подпространство существования в $C(Q), \operatorname{codim} Y < \infty$. Тогда если бикомпакт Q бесконечен, то $AC(Y) = Y$.*

П.А.Бородина(2002) доказал, что в пространстве **c** нет бесконечномерных собственных аппроксимативно компактных подпространств, то есть пространство **c** является антиподом пространств Ефимова-Стечкина.

В III главе настоящей работы получен критерий аппроксимативной компактности для подпространств конечной коразмерности в произвольном банаховом пространстве, а также в некоторых функциональных пространствах.

Очевидно, если множество M ограниченно компактно (то есть его пересечение с любым замкнутым шаром является компактным), то оно аппроксимативно компактно. Обратное, вообще говоря, неверно.

Теорема D (П.А.Бородин, 1994). *В произвольном бесконечномерном сепарабельном банаховом пространстве существует аппроксимативно компактное, но не ограниченно компактное множество.*

В работе П.А.Бородина(1999) доказано, что в любом рефлексивном банаховом пространстве существует выпуклое ограниченное аппроксимативно компактное тело. Проблема существования (ограниченного) аппроксимативно компактного тела не решена ни для какого класса пространств более широкого, чем класс рефлексивных пространств, а также ни для какого из пространств $L_1[a,b]$, $C[a,b]$, c.

В главе II настоящей работы построен пример ограниченного аппроксимативно компактного тела в пространстве $\mathbf{c_0}$, а также пример неограниченного аппроксимативно компактного тела в пространстве $\mathbf{c}$.

Помимо описания аппроксимативно компактных подпространств и выпуклых множеств интересен вопрос об аппроксимативной компактности дополнений к выпуклым телам — каверн. Л.П.Власов (1967) доказал, что в банаховом пространстве не существует аппроксимативно компактных и аппроксимативно выпуклых множеств вида $X \setminus M$, где M — ограниченное множество (множество M называется аппроксимативно выпуклым, если для каждого x метрическая проекция $P_M(x)$ не пуста и выпукла).

В некотором смысле антиподом аппроксимативно компактным множествам являются *антипроксиминальные* множества, то есть такие множества $M \subset X$, что $P_M(x) = \emptyset$ для любого $x \notin M$.

Антипроксиминальным множествам посвящены работы многих авторов. Наиболее яркие результаты получены В.С.Балаганским (1996, 1998). Так, в любом пространстве $C(Q)$, где Q — бесконечный бикомпакт, существует антипроксиминальное ограниченное замкнутое выпуклое тело. В бесконечномерном пространстве $X = L_1(S, \Sigma, \mu)$ с $\sigma-$конечной мерой В.С.Балаганским доказано существование такого центрально-симметричного антипроксиминального множества M, что $X \setminus M$ выпукло и ограничено.

В главе II диссертации найдена связь между аппроксимативной компактностью выпуклого тела и антипроксиминальностью его каверны.

Цель работы.

Целью настоящей работы является исследование сохранения свойства аппроксимативной компактности при различных операциях над множествами, связей между аппроксимативной компактностью и другими свойствами множеств, описание аппроксимативно компактных подпространств в пространствах не являющихся пространствами Ефимова-Стечкина.

Научная новизна работы.

Все результаты диссертации являются новыми, получены следующие основные результаты:

1. в различных классах банаховых пространств построены примеры аппроксимативно компактных множеств с различными дополнительными свойствами, пересечение или алгебраическая сумма которых не являются аппроксимативно компактными;

2. построены примеры выпуклых аппроксимативно компактных тел в пространствах $\mathbf{c_0}$ и $\mathbf{c}$;

3. в произвольном сепарабельном банаховом пространстве построен пример ограниченного аппроксимативно компактного, но не локально компактного множества;

4. в специальном классе банаховых решеток построен пример не аппроксимативно компактного множества существования с конечнозначной метрической проекцией;

5. доказано, что в пространстве $CA(D)$ функций, непрерывных на замыкании единичного круга D и аналитических внутри D, нет собственных аппроксимативно компактных подпространств конечной коразмерности.

Методы исследования.

В работе применяются методы функционального анализа, теории приближений функций, геометрии выпуклых множеств.

Теоретическая и практическая ценность.

Работа имеет теоретический характер. Ее результаты могут найти применение в исследованиях по геометрической теории приближений в банаховых пространствах.

Апробация работы.

Результаты диссертации неоднократно докладывались на семинаре по теории приближений и граничным свойствам функций в МГУ под руководством проф. Е.П.Долженко (2004-2008), на семинаре по теории приближений в МГУ под руководством проф. И.Г.Царькова (2008), на семинаре по теории тригонометрических рядов в МГУ под руководством профессоров М.И.Дьяченко, Т.П.Лукашенко, М.К.Потапова и В.А.Скворцова (2008), в МФТИ на семинаре под руководством профессора Е.С.Половинкина (2008), на Воронежской зимней школе по теории функций (2005) и на школе С.Б.Стечкина по теории функций в г. Алексине (2007).

Работа поддержана грантом РФФИ, проект 08-01-00648а (руководитель профессор Е.П.Долженко).

Публикации.

Результаты диссертации опубликованы в 5 работах, список которых приводится в конце автореферата.

Структура и объем работы.

Диссертация состоит из оглавления, введения, трех глав и списка цитированной литературы из 48 наименований. Общий объем диссертации 78 страниц.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

В главе I исследуется вопрос о сохранении свойства аппроксимативной компактности при различных операциях над множествами в банаховых пространствах. То, что объединение двух аппроксимативно компактных множеств аппроксимативно компактно, легко следует из определения. Вопрос о пересечении сложнее: можно ли в произвольном банаховом пространстве взять два аппроксимативно компактных множества, пересечение которых не аппроксимативно компактно? В общем случае эта задача не решена.

Скажем, что банахово пространство $X \in (CLUR)$, если из $\|x\| = \|x_n\| = 1,\ \|x + x_n\| \to 2\ (n \to \infty)$, вытекает существование сходящейся подпоследовательности x_{n_k}.

Этот класс пространств более широк, чем равномерно выпуклые пространства. В произвольном бесконечномерном пространстве $(CLUR)$ существуют два аппроксимативно компактных множества, пересечение которых — не аппроксимативно компактно.

Другой вопрос — это сохранение аппроксимативной компактности при операции алгебраической суммы над аппроксимативно компактными множествами. Она может давать незамкнутое множество, которое автоматически не аппроксимативно компактно.

Теорема 1.1. *В любом бесконечномерном банаховом пространстве X существуют два аппроксимативно компактных множества, алгебраическая сумма которых является замкнутым, но не аппроксимативно компактным множеством.*

В приведенном доказательстве оба множества не ограниченны. Привести пример с двумя ограниченными множествами удалось лишь в классе пространств (*), состоящем из банаховых решеток, порядок в которых определяется счетным симметрическим базисом с константой симметричности 1, с дополнительным условием строгой монотонности нормы относительно координат. Этот класс содержит все пространства l_p, $1 \leq p < \infty$, при этом он отличен от класса $(CLUR)$.

Теорема 1.2. *В банаховом пространстве X из класса (*) существуют ограниченные аппроксимативно компактные множества M_1, M_2, такие что пересечение $M_1 \cap M_2$ — не аппроксимативно компактно, алгебраическая сумма $M_1 + M_2$ — замкнута и не аппроксимативно компактна.*

В пространстве $L_1[0;3]$ построен пример двух аппроксимативно компактных линейных подпространств, алгебраическая сумма которых замкнута, но не аппроксимативно компактна.

В главе II исследуется связь между аппроксимативной компактностью и другими свойствами множеств.

Упоминавшуюся проблему существования выпуклого аппроксимативно компактного тела (актуальную для всех нерефлексивных пространств), удалось решить для пространств $\mathbf{c_0}$ и $\mathbf{c}$.

В пространстве $\mathbf{c_0}$ рассмотрим множества

$$M_k = \{x = (x_1, x_2, 0, 0, \ldots) : \max\{|x_1|, \ldots, |x_k|\} \leq 1 + 2^{1-k}\},\ k = 1, 2, \ldots.$$

Положим $M_0 = \overline{\operatorname{conv} \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} M_k}$ — замыкание выпуклой оболочки объединения множеств M_k.

Теорема 2.1. *Множество M_0 является выпуклым аппроксимативно компактным телом в $\mathbf{c_0}$.*

В пространстве $\mathbf{c}$ на основе множества M_0 построен пример выпуклого неограниченного аппроксимативно компактного тела. Обозначим $e = (1, 1, 1, ...) \in \mathbf{c}$.

Теорема 2.2. *Множество $M = M_0 + \langle e \rangle$ аппроксимативно компактно в $\mathbf{c}$.*

В целом классе пространств с помощью выпуклого аппроксимативно компактного тела можно получить антипроксиминальную каверну.

Теорема 2.3. *Пусть в банаховом пространстве X единичный шар B таков, что $AC(B) = B$. Тогда, если выпуклое тело M аппроксимативно компактно, то каверна $\overline{X \setminus M}$ антипроксиминальна.*

Обратное, вообще говоря, неверно. Соответствующий пример построен в главе II в пространстве $\mathbf{c_0}$.

В пространстве $\mathbf{c_0}$ единичный шар удовлетворяет условию теоремы 2.3. В результате для множества M_0 получаем

Следствие 2.1. *Каверна для построенного в теореме 2.1 множества $M_0 \subset \mathbf{c_0}$ является антипроксиминальной.*

Исследовался также вопрос о связи аппроксимативно компактных множеств с локально компактными множествами.

Определение. Подмножество M банахова пространства X называется *локально компактным*, если любая точка этого множества имеет некоторую окрестность, пересечение которой с M предкомпактно.

В произвольном бесконечномерном банаховом пространстве несложно построить локально компактное множество, которое не является аппроксимативно компактным. Для этого достаточно взять множество точек на единичной сфере, расстояние между любыми двумя из которых больше 1/2. Пример аппроксимативно компактного, но не локального множества удалось построить только в бесконечномерных сепарабельных пространствах. За основу построения взят пример аппроксимативно компактного множества из теоремы D.

Теорема 2.4. *В любом бесконечномерном сепарабельном банаховом пространстве X существует аппроксимативно компактное, но не локально компактное множество.*

В работах С.В.Конягина (1981, 1997) изучались категорный свойства множеств $AC(M)$ точек аппроксимативной компактности. В настоящей работе исследовался вопрос о замкнутости/открытости множества $AC(M)$.

Теорема 2.5. *Пусть X — банахово пространство. Для любого замкнутого множества $M \subset X$ множество $AC(M)$ имеет тип G_δ.*

При этом нельзя утверждать, что для замкнутого M множество $AC(M)$ всегда является замкнутым или открытым. В пространстве l_1 построено подпространство Y коразмерности два, для которого $AC(Y) \neq l_1$ и замкнуто. При этом удалось построить пример банахова пространства X и такого подпространства $Y \subset X$, что $AC(Y)$ — не замкнуто.

Метрическая проекция $P_M(x)$ на аппроксимативно компактное множество M компактна $\forall x$. В описанном ранее классе (*) банаховых решеток обратное не верно: из компактности метрической проекции не следует аппроксимативная компактность множества.

Теорема 2.6. *В любом банаховом пространстве X из класса (*) существует такое ограниченное не аппроксимативно компактное множество M, что метрическая проекция $P_M(x)$ непуста и конечна для любого $x \in X$.*

Этот результат примыкает к проблеме Кли–Ефимова–Стечкина: в силу теоремы А эта проблема эквивалентна проблеме существования в $l_2 \in (*)$ не аппроксимативно компактного чебышевского множества.

В III главе исследуется аппроксимативная компактность линейных подпространств.

Теорема 3.1. *Пусть X — банахово пространство, $Y \subset X$ — некоторое не аппроксимативно компактное подпространство. Тогда существует такой функционал $f \in Y^\perp$, что ядро $\mathrm{Ker\,f}$ не аппроксимативно компактно.*

Следствие 3.1. *Пусть Y подпространство в X, $\mathrm{codim\,Y} < \infty$. Для того, чтобы Y было не аппроксимативно компактно, необходимо и до-*

статочно, чтобы существовал такой функционал $f \in Y^{\perp}$, что подпространство $\mathrm{Ker\,f}$ *не аппроксимативно компактно.*

В пространстве $L_1(M) = L_1(M, \Sigma, \mu)$ с σ-конечной мерой μ атомную часть меры μ представим в виде $\bigcup\limits_n A_n$, где $\{A_n\}$ — возможно, конечная, последовательность атомов. Обозначим $a_n = f(I_{A_n})/\mu(I_{A_n})$, где $f \in L_\infty(M)$. Порождаемый функцией f функционал достигает своей нормы в $L_1(M)$ в том и только том случае, когда функция f достигает своей нормы $\|f\| = ess\ sup\{|f(t)| : t \in M\}$ на множестве положительной меры, которое обозначим $m(f)$.

Теорема 3.2. *Подпространство Y в $L_1(M)$ =$L_1(M, \Sigma, \mu)$ с* $\mathrm{codim\,Y} <$ ∞ *не аппроксимативно компактно тогда и только тогда, когда существует функционал $f \in Y^{\perp}$, удовлетворяющий одному из условий:*
1) $\mu(m(f)) = 0$;
2) $\mu(m(f) \cap A_n) = 0\ \forall n$;
3) существует такая последовательность атомов $\{A_{n_k}\}$, что $|a_{n_k}| \to \|f\|$ при $k \to \infty$.

Формулировка этой теоремы была анонсирована В.И.Андреевым в 1975г. Поскольку в работах В.И.Андреева не удалось найти доказательство этого результата, в диссертации приведено собственное доказательство.

Следствие 3.2. *Пусть подпространство Y является ядром функционала $f \in l_1^* = l_\infty$, $f = (f_1, f_2, \ldots)$. Тогда Y не аппроксимативно компактно тогда и только тогда, когда в последовательности $\{f_i\}$ имеется такая подпоследовательность $\{f_{i_k}\}$, что $|f_{i_k}| \to \|f\|$.*

Приводятся также примеры бесконечномерных подпространств пространства l_1 — как аппроксимативно компактных, так и не аппроксимативно компактных, как конечной, так и бесконечной коразмерности.

В произвольном пространстве $L_1(M)$ выделен следующий класс аппроксимативно компактных подпространств.

Теорема 3.3. *Пусть $M = M_1 \cup \ldots \cup M_k, \mu(M_i \cap M_j) = 0$ при $i \neq j$ и при этом множества M_j одинаковы в том смысле, что для всякого $j \geq 2$ существует взаимно-однозначное отображение $f_j : M_1 \to M_j$, сохраняющее меру μ. Пусть Y_0 — подпространство в l_1^k. Представим множество M_1 в виде $K_1 \sqcup K_2$, где K_2 — атомная часть меры μ на M_1. Тогда подпространство*

$$Y = \{y \in L_1(M) : (y(t), y(f_2(t)), \ldots, y(f_k(t))) \in Y_0 \text{ для п.в. } t \in M_1\}$$

не аппроксимативно компактно в $L_1(M)$ тогда и только тогда, когда $\mu(K_1) > 0$ и подпространство Y_0 — не чебышевское в l_1^k.

В отличие от пространства L_1, в пространствах непрерывных функций нет собственных аппроксимативно компактных подпространств конечной коразмерности — см. выше теорему С. Это свойство наследуется пространством аналитических функций с равномерной нормой.

Обозначим $D = \{z \in C, |z| \leq 1\}$ — единичный круг в комплексной плоскости, $CA(D)$ — пространство функций $f : D \to C$, аналитических внутри D и непрерывных на D.

Теорема 3.4. *В пространстве $CA(D)$ нет собственных аппроксимативно компактных подпространств конечной коразмерности.*

Автор глубоко благодарен своему научному руководителю доценту Бородину Петру Анатольевичу за постановку задач, обсуждение и постоянную поддержку в работе.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Пятышев И.А. *Пример выпуклого аппроксимативно компактного тела в пространстве* $\mathbf{c_0}$ // Вестн. Моск. ун-та. Сер.1 Матем. Мех. 2005. № 3. С. 57-59.

2. Пятышев И.А. *Операции над аппроксимативно компактными множествами* // Матем. заметки. 2007. Т. 82. № 5. С. 729-736.

3. Пятышев И.А. *Пример ограниченного аппроксимативно компактного множества, не являющегося локально компактным* // Успехи матем. наук. 2007. Т. 62, № 5. С. 163-164.

4. Пятышев И.А. *Об аппроксимативно компактных множествах в банаховых пространствах* // Международная летняя математическая школа С.Б.Стечкина по теории функций (Алексин, 2007). Издательство Тульского университета. С. 115-118.

5. Пятышев И.А. *Пример выпуклого аппроксимативно компактного тела в пространстве* $\mathbf{c_0}$ // Современные методы теории функций и смежные проблемы. Материалы Воронежской зимней математической школы. Воронеж. Изд-во Воронежского ун-та. 2005. С. 190-191.