Московский государственный университет имени
М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 512.816

Зорин Арсений Александрович

О СФЕРИЧЕСКИХ И СВЕРХСФЕРИЧЕСКИХ ПОДГРУППАХ ПОЛУПРОСТЫХ ГРУПП ЛИ

01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Москва – 2008

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Эрнест Борисович Винберг.

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук
Григорий Иосифович Ольшанский
(Институт проблем передачи информации имени А.А. Харкевича РАН);

доктор физико-математических наук
Олег Карлович Шейнман
(Математический институт имени В.А. Стеклова РАН).

Ведущая организация:
Санкт-Петербургское Отделение Математического института им. В.А. Стеклова РАН

Защита диссертации состоится 26 декабря 2008г. в $16^{\underline{40}}$ на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Российская Федерация, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомится в библиотеке Механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 26 ноября 2008г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д.501.001.84 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор А.О. Иванов

Актуальность темы

Диссертация посвящена различным аспектам теории сферических однородных пространств.

Основным полем является поле комплексных чисел. Пусть G — связная редуктивная комплексная алгебраическая группа, H — алгебраическая подгруппа в G. Действие $G : X$ группы G на алгебраическом многообразии X называется *сферическим,* если борелевская подгруппа группы G имеет в X открытую (по Зарисскому) орбиту. Подгруппа H называется *сферической* если сферично однородное пространство $X = G/H$. В случае, когда пространство X аффинно (то есть подгруппа H редуктивна) сферические пространства хорошо изучены. В частности, получена полная классификация сферических аффинных однородных пространств[1,2,3], а также установлена связь с другими классами однородных пространств редуктивных групп Ли. В работе Э.Б. Винберга и Д.Н. Ахиезера[4] доказано, что аффинное однородное пространство является сферическим, тогда и только тогда, когда оно является слабо симметрическим. Представляют интерес для изучения сферические однородные пространства нередуктивных подгрупп. В данной работе исследуется связь между сферическими и слабо симметрическими однородными пространствами в случае, когда пространство $X = G/H$ *квазиаффинно*, то есть является открытым подмножеством в аффинном многообразии.

Наряду со сферическими подгруппами отдельный интерес представляют *сверхсферические* подгруппы. Связная редуктивная подгруппа H редуктивной группы G называется *сверхсферической*, если для любого неприводимого представления $\rho : G \to GL(V)$

[1] Brion M., *Classification dea espaces homogènes sphériques*, Compositio Math., 63, 189–208, 1987.

[2] Микитюк И.В., *Об интегрируемости инвариантных гамильтноновых систем с однородными конфигурационными пространствами,* Матем. сб., 129, 514–534, 1986.

[3] Krämer M., *Sphärische Untergruppen in kompakten zusammenhängenden Liegruppen*, Compositio Math., 38, 129–153, 1979.

[4] Akhiezer D.N., Vinberg E.B., *Weakly symmetric spaces and spherical varieties,* Transformation Groups, 4, no.1, 3–24, 1999.

спектр ограничения $\rho_{|H}$ прост. В таком случае касательная алгебра $\mathfrak{h}$ группы H называется *сверхсферической* подалгеброй алгебры $\mathfrak{g}$. Легко проверить, что подалгебра $\mathfrak{h}$ сверхсферична в $\mathfrak{g}$ тогда и только тогда, когда централизатор $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$ алгебры $\mathfrak{h}$ в универсальной обертывающей алгебре $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ коммутативен. В работе Ф.Кнопа[5] доказано, что алгебра $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$ коммутативна тогда и только тогда, когда коммутативен централизатор $P(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$ в алгебре $P(\mathfrak{g}) = \mathrm{gr}\ \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$. В этом случае, если $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}), \mathfrak{Z}(\mathfrak{h})$ – центры алгебр $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ и $\mathfrak{U}(\mathfrak{h})$ и $Z(\mathfrak{g}), Z(\mathfrak{h})$ – центры алгебр $\mathcal{P}(\mathfrak{g})$ и $\mathcal{P}(\mathfrak{h})$, то $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}} = \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{Z}(\mathfrak{h})$ и $\mathcal{P}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}} = Z(\mathfrak{g}) \otimes Z(\mathfrak{h})$. В той же работе найдены все редуктивные сверхсферические подгруппы полупростых групп Ли.

В данной работе мы называем (не обязательно редуктивную) подалгебру $\mathfrak{h}$ сверхсферической в редуктивной алгебре $\mathfrak{g}$, если централизатор $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$ коммутативен и исследуем данный случай.

Классической задачей теории представлений групп Ли является следующая. Пусть $\mathfrak{g}_n$ – одна из классических простых комплексных алгебр Ли ранга n: $\mathfrak{g}_n = \mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C}), \mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C}), \mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C}), \mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$ (далее мы будем опускать знак $\mathbb{C}$). Рассмотрим в алгебре $\mathfrak{g}_n$ подалгебру $\mathfrak{g}_{n-1}$ – классическую простую подалгебру такого же типа, что и $\mathfrak{g}$, на единицу меньшего ранга. Одним из классических вопросов теории представлений является следующий. Пусть $\rho : \mathfrak{g}_n \to \mathfrak{gl}(V)$ – неприводимое представление алгебры $\mathfrak{g}_n$ в пространстве V. Рассмотрим ограничение $\rho|_{\mathfrak{g}_{n-1}}$ этого представление на подалгебру $\mathfrak{g}_{n-1}$. Каким будет его спектр?

Решение проблемы разделения кратных точек спектра представления $\rho|_{\mathfrak{g}_{n-1}}$ хорошо известно. Оно получено Г. Вейлем[6] для серии A_n, И.М. Гельфандом и М.Л. Цетлином[7] для серий B_n и D_n, Д.П. Желобенко[8] для серии C_n. Традиционный

[5] Knop F., *Der Zentralisator einer Liealgebra in einer einhullenden Algebra*, J. Reine Angew. Math. 406, 5–9, 1990.

[6] Вейль Г., *Теория групп и квантовая механика,* М., Наука, 1986.

[7] Гельфанд И.М., Цетлин М.Л., *Конечномерные представления группы ортогональных матриц,* ДАН СССР, Т. 71, № 6, 1017–1020, 1950.

[8] Желобенко Д.П., *Классические группы. Спектральный анализ конечномерных*

метод освобождения от кратностей (метод Гельфанда-Цетлина), используемый для всех серий, кроме C_n, состоит в разделении кратных компонент при помощи включения между алгебрами $\mathfrak{g}_n$ и $\mathfrak{g}_{n-1}$ некоторой редуктивной подалгебры $\hat{\mathfrak{g}}$, такой, что прост как спектр представления $\rho|_{\hat{\mathfrak{g}}} = \rho_1 \oplus \ldots \oplus \rho_m$, где ρ_i – неприводимые $\hat{\mathfrak{g}}$-модули, так и спектры всех представлений $\rho_i|_{\mathfrak{g}_{n-1}}$.

В.В. Штепиным[9,10,11] была предложена модификация метода Гельфанда-Цетлина. В качестве промежуточной подалгебры выбирается нередуктивная подалгебра $\hat{\mathfrak{g}}$, которая является стабилизатором (изотропного) вектора в пространстве V стандартного представления алгебры $\mathfrak{g}$. Далее строится $\hat{\mathfrak{g}}$-инвариантная фильтрация $0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_l = V$ в пространстве V неприводимого представления алгебры Ли $\mathfrak{g}$, такая что спектр фактора V_i/V_{i-1} как $\mathfrak{g}_{n-1}$-модуля прост и все такие факторы попарно не изоморфны как $\hat{\mathfrak{g}}$-модули (или изоморфны, но разделяются еще одним дополнительным условием в случае $\mathfrak{so}_{2n+1}$). Таким образом, изоморфные $\mathfrak{g}_{n-1}$-модули разделяются путем включения их в различные $\hat{\mathfrak{g}}$-модули. Оказывается, что алгебры $\hat{\mathfrak{g}}$ являются сверхсферическими подалгебрами в $\mathfrak{g}_n$. В представленной работе предпринята попытка описать действие централизатора $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_\mathfrak{n})^{\hat{\mathfrak{g}}}$ в пространстве неприводимого представления алгебры $\mathfrak{g}_n$ и применить этот централизатор для разделения кратных точек спектра представления $\rho|_{\mathfrak{g}_{n-1}}$ и построения аналога базиса Гельфанда-Цетлина.

Цель работы

Целью работы является исследование свойств сферических и сверхсферических нередуктивных подгрупп полупростых

представлений, Успехи математических наук, т.17, №1, 27–119, 1962.

[9] Штепин В.В., *Промежуточные алгебры Ли и их конечномерные представления*, Изв. РАН, Сер. матем., 57, №6, 176–198, 1993.

[10] Штепин В.В., *Промежуточная ортогональная алгебра Ли* $\mathfrak{b}_{n-1/2}$ *и ее конечномерные представления,* Изв. РАН, Сер. матем., 62, №3, 201–223, 1998.

[11] Штепин В.В., *Промежуточная алгебра Ли* $\mathfrak{d}_{n-1/2}$*, весовая схема и ее конечномерные представления со старшим весом,* Изв. РАН, Сер. матем., 68, №2, 159–190, 2004.

групп Ли, их связей с другими классами подгрупп, а также их классификация.

Методы исследования

В работе используются методы теории групп Ли, методы теории представлений групп Ли, методы теории пуассоновых многообразий.

Научная новизна

Основные результаты диссертации являются новыми и заключаются в следующем:

1. Доказана эквивалентность сферичности и слабой симметричности для обозримых подгрупп редуктивных групп Ли, сохраняемых некоторой инволюцией Вейля.

2. Получена полная классификация коизотропных подалгебр простых алгебр Ли.

3. Получена классификация коизотропных подалгебр с тривиальной группой характеров полупростых алгебр Ли, а также доказана их сверхсферичность.

4. Получен критерий сверхсферичности алгебраической подалгебры редуктивной алгебры в терминах теории представлений

Теоретическая и практическая ценность

Работа носит теоретический характер. Полученные в диссертации результаты представляют интерес для теории однородных пространств групп Ли, теории представлений.

Апробация результатов

Результаты автора докладывались на следующих научно-исследовательском семинарах:

1. Семинар „Коммутативные однородные пространства“ под руководством Э.Б. Винберга, мех-мат МГУ, 2004 г. Доклад „О слабой симметричности обозримых подгрупп редуктивных групп“.

2. Семинар „Группы Ли и теория инвариантов“ под руководством Э.Б. Винберга и А.Л. Онищика, мех-мат МГУ. Доклады: „О коммутативности централизатора подалгебры в универсальной обертывающей алгебре“, 2006 г.; „О коизотропных подалгебрах полупростых алгебр Ли“, 2007 г.

3. Семинар „Теория представлений и динамические системы“ под руководством А.М. Вершика, ПОМИ РАН, 2007 г. Доклад „О коизотропных и сверхсферических подалгебрах полупростых алгебр Ли“.

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в двух работах автора, перечисленных в конце автореферата **[1-2]**.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из пяти глав, разбитых на параграфы. Текст диссертации изложен на 55 страницах. Список литературы включает 31 наименование.

Краткое содержание работы

В **главе 1**, которая является вводной, дана краткая справка о предшествующих работах, показана актуальность темы и сформулированы основные результаты диссертации.

В **главе 2** исследуется связь между сферичностью и слабой симметричностью обозримых подгрупп редуктивных групп Ли. Доказывается, что при одном дополнительном условии на подгруппу эти два свойства эквивалентны.

Теорема 1.1. Пусть G — редуктивная алгебраическая группа, H — произвольная обозримая подгруппа, и существует такая инволюция Вейля θ группы G, что $\theta(H) = H$. Однородное пространство $X = G/H$ слабо симметрично тогда и только тогда, когда оно сферично.

Также в работе приведены примеры, которые показывают, что если не существует инволюции Вейля, сохраняющей подгруппу H, то обе импликации теоремы 1.1 неверны.

В **главе 3** мы переходим к изучению сверхсферических подгрупп полупростых групп Ли. Для того, чтобы алгебра $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$ была коммутативной, необходимо, чтобы централизатор $P(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$ алгебры $\mathfrak{h}$ в ассоциированной с $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ градуированной алгебре $P(\mathfrak{g})$ был коммутативен относительно скобки Пуассона. Алгебра $P(\mathfrak{g})$ реализуется как алгебра Пуассона на пространстве $\mathfrak{g}^*$, на котором пуассонова структура задается послойно на орбитах коприсоединенного представления с помощью формы Костанта-Кириллова. Мы сначала классифицируем случаи, когда коммутативна алгебра $P(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$.

Мы вводим понятие *коизотропной* подалгебры $\mathfrak{h}$ полупростой алгебры $\mathfrak{g}$. Подалгебру $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ будем называть *коизотропной,* если коприсоединенное действие $H : \mathfrak{g}^*$ коизотропно на симплектических слоях общего положения.

Алгебру Пуассона на симплектическом многообразии M будем обозначать через $P(M)$. Пусть задано симплектическое действие $G : M$ и Quot $P(M)$ – поле частных алгебры $P(M)$. Алгебра инвариантов $(\mathrm{Quot}\ P(M))^G$ коммутативна тогда и только, тогда когда действие $G : M$ является коизтропным. Таким образом, алгебра $(\mathrm{Quot}\ P(\mathfrak{g}))^{\mathfrak{h}}$ коммутативна тогда и только тогда, когда алгебра $\mathfrak{h}$ коизотропна. Если группа H не имеет нетривиальных характеров, то оба этих условия равносильны коммутативности алгебры $P(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$.

Далее мы получаем классификацию коизотропных подалгебр в двух случаях: когда алгебра $\mathfrak{g}$ проста и когда алгебра $\mathfrak{g}$ полупроста и подалгебра $\mathfrak{h}$ не имеет нетривиальных характеров.

Теорема 1.3. Пусть $\mathfrak{g}$ – простая алгебра Ли. Собственная подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ является коизотропной тогда и только тогда, когда пара $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ есть одна из нижеперечисленных:

1) $(\mathfrak{sl}_{n+1}, \mathfrak{gl}_n)(n \geq 1)$, $(\mathfrak{so}_n, \mathfrak{so}_{n-1})(n \geq 5)$;

2) $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{<v>})$ или $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_v)$, где $\mathfrak{g}$ – классическая простая алгебра

Ли, v – старший вектор стандартного представления алгебры $\mathfrak{g}$ (изотропный если $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_n$), $< v >$ – прямая, натянутая на v, $\mathfrak{g}_v$ и $\mathfrak{g}_{<v>}$ – стабилизаторы вектора v и прямой $< v >$ соответственно.

3) $(\mathfrak{sl}_{n+1}, \mathfrak{p}_{(\alpha_1,\alpha_n)})$, где $\mathfrak{p}_{(\alpha_1,\alpha_n)}$ – параболическая подалгебра, отвечающая набору простых корней $\{\alpha_1, \alpha_n\}$ (определение см. в п. 3.5).

4) $(\mathfrak{sl}_3, \mathfrak{b})$ или $(\mathfrak{sl}_3, \mathfrak{u} + \langle E_{11} - 2E_{22} + E_{33}\rangle)$, где $\mathfrak{b}$ – борелевская подалгебра в $\mathfrak{sl}_3$, $\mathfrak{u}$ – ее унипотентный радикал, а E_{ij} – соответствующие матричные единицы.

Теорема 1.4. Пусть $\mathfrak{g}$ – полупростая алгебра Ли, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ – собственная алгебраическая подалгебра с тривиальной группой характеров. Пара $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ является неразложимой коизотропной тогда и только тогда, когда она есть одна из нижеперечисленных:

1) $(\mathfrak{so}_n, \mathfrak{so}_{n-1}), n \geq 4$;

2) $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_v)$, где $\mathfrak{g}$ – классическая простая алгебра Ли, v – старший вектор стандартного представления алгебры $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_v$ – его стабилизатор.

В начале **главы 4** мы доказываем критерий сверхсферичности алгебраической подалгебры $\mathfrak{h}$ в редуктивной алгебре $\mathfrak{g}$ в терминах конечномерных неприводимых представлений алгебры $\mathfrak{g}$. Пусть $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ – неприводимое представление алгебры $\mathfrak{g}$. Оно естественным образом продолжается до представления алгебры $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, которое мы также обозначим через ρ. Обозначим через $\mathfrak{gl}(V)^{\mathfrak{h}}$ централизатор подалгебры $\rho(\mathfrak{h})$ в $\mathfrak{gl}(V)$.

Теорема 1.2. Алгебра $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$ коммутативна тогда и только тогда, когда для любого неприводимого представления $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ коммутативна алгебра $\mathfrak{gl}(V)^{\mathfrak{h}}$.

Для редуктивной алгебры $\mathfrak{h}$ коммутативность алгебры $\mathfrak{gl}(V)^{\mathfrak{h}}$ означает в точности простоту спектра представления $\rho|_{\mathfrak{h}}$.

Далее мы изучаем коизотропные пары из п.2 теоремы 1.4. Мы описываем структуру централизатора $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$ для данных пар и как следствие получаем их сверхсферичность.

Теорема 1.5. Пусть $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ одна из пар из пункта 2 теоремы 1.4. Тогда

1) $P(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}} = Z(\mathfrak{h}) \otimes Z(\mathfrak{g})$;

2) $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}} = \mathfrak{Z}(\mathfrak{h}) \otimes \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$; в частности, алгебра $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$ коммутативна.

Также мы доказываем, что алгебры $Z(\mathfrak{h})$ и $\mathfrak{Z}(\mathfrak{h})$, а следовательно и алгебры $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$ и $P(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$, являются алгебрами многочленов.

В **главе 5** мы переходим к изучению действия алгебры $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$ в неприводимых конечномерных представлениях алгебры $\mathfrak{g}$ для коизотропных (и сверхсферических) пар $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ из п.2 теоремы 1.4.

Зафиксируем максимальный тор $\mathfrak{t}$ и систему простых корней Π в классической простой алгебре Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_n$. Будем считать, что $\mathfrak{h}$ – стабилизатор старшего вектора стандартного представления относительно системы корней Π. Алгебра Леви $\mathfrak{h}_{\mathrm{red}}$ совпадает с алгеброй $\mathfrak{g}_{n-1}$. Пусть $\bar{\mathfrak{t}} = \mathfrak{t} \cap \mathfrak{h}$ есть максимальный тор алгебры $\mathfrak{h}$, выделяемый в $\mathfrak{t}$ уравнением $\omega_1(t) = 0$, где ω_1 – старший вес стандартного представления, то есть первый фундаментальный вес алгебры $\mathfrak{g}$. Через ω будем обозначать минимальный ненулевой вес, пропорциональный весу ω_1 и лежащий в решетке корней, а именно $\omega = n\omega_1$ для $\mathfrak{sl}_{n+1}$, $\omega = \omega_1$ для $\mathfrak{so}_{2n+1}$, $\omega = 2\omega_1$ для $\mathfrak{sp}_{2n}$ и $\omega = 2\omega_1$ для $\mathfrak{so}_{2n}$. Для всякого веса $\lambda \in \mathfrak{t}^*$ будем обозначать через $\overline{\lambda}$ его ограничение на $\bar{\mathfrak{t}}$.

Пусть $\rho_\lambda : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V(\lambda))$ – неприводимое конечномерное представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с младшим весом $-\lambda$. Его продолжение до представления алгебры $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ будем также обозначать через ρ_λ. Младший вектор представления ρ_λ обозначим через $v_{-\lambda}$.

Будем называть вектор в пространстве $V(\lambda)$ *полумладшим*, если он является младшим относительно $\mathfrak{h}_{\mathrm{red}}$ и весовым относительно $\mathfrak{t}$. Линейную оболочку полумладших векторов обозначим через $V(\lambda)^-$. Соответственно, будем обозначать через $V(\lambda)^-_\mu$ подпространство полумладших векторов веса μ относительно максимального тора $\mathfrak{t}$, а через $V(\lambda)^-_{\overline{\mu}}$ – подпространство полумладших векторов веса $\overline{\mu}$ относительно тора $\bar{\mathfrak{t}}$. Ясно, что $V(\lambda)^-_{\overline{\mu}} = \bigoplus\limits_{m \in \mathbb{Z}} V(\lambda)^-_{\mu + m\omega}$.

Обозначим через $\mathfrak{Z}(\mathfrak{h})_+$ идеал в $\mathfrak{Z}(\mathfrak{h})$, состоящий из многочленов с нулевым свободным членом, а через $\mathfrak{Z}(\mathfrak{h})_{p\omega}$ – однородную компоненту алгебры $\mathfrak{Z}(\mathfrak{h})$ веса $p\omega$ относительно тора $\mathfrak{t}$. Основной гипотезой о действии $\mathfrak{Z}(\mathfrak{h})$ в пространстве неприводимого представления является следующая

Гипотеза 1.6. Пусть $\mathfrak{g}$ – классическая простая алгебра Ли, $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_v$ – стабилизатор старшего вектора стандартного представления алгебры $\mathfrak{g}$. Пусть $\rho_\lambda : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ – неприводимое представление с младшим весом $-\lambda$. Тогда

1) для любого простого $\mathfrak{h}_{\mathrm{red}}$-модуля U пространство $\mathrm{Hom}(U, V(\lambda))$ есть циклический $\mathfrak{Z}(\mathfrak{h})$-модуль или, другими словами, любая изотипная компонента $\mathfrak{h}_{\mathrm{red}}$-модуля $V(\lambda)$ имеет вид $U \otimes C$, где C – циклический $\mathfrak{Z}(\mathfrak{h})$-модуль.

2) спектр $\mathfrak{h}_{\mathrm{red}}$-модуля $W(\lambda) = V(\lambda)/\rho(\mathfrak{Z}(\mathfrak{h})_+)V(\lambda)$ прост.

Если гипотеза 1.6 верна, то из нее следует, что кратные точки спектра представления $\rho_\lambda|_{\mathfrak{h}_{\mathrm{red}}}$ могут быть разделены при помощи отнесения их к разным элементам циклического $\mathfrak{Z}(\mathfrak{h})$-модуля C.

Пусть $\overline{\nu} \in \overline{\mathfrak{t}}^*$. Множество весов λ таких, что $V(\lambda)^-_{-\overline{\lambda}+\overline{\nu}} \neq 0$, обозначим через $\mathcal{L}(\overline{\nu})$. Для $\lambda \in \mathcal{L}(\overline{\nu})$ обозначим через $\nu(\lambda) \in \mathfrak{t}^*$ минимальный вес такой, что $V(\lambda)^-_{-\lambda+\nu(\lambda)} \neq 0$ и $\overline{\nu(\lambda)} = \overline{\nu}$. Веса вида $\nu(\lambda)$ будем называть *минимальными*. Также будем называть соответствующие полумладшие векторы. Вес $\nu(\lambda)$ не зависит от λ и в каждом неприводимом представлении алгебры $\mathfrak{g}$ существует не более одного вектора с данным минимальным полумладшим весом.

Утверждения 1) и 2) гипотезы 1.6 на самом деле равносильны. Утверждение 1) другими словами означает следующее: если $v_{-\lambda+\nu}$ – минимальный полумладший вектор, то выполняется равенство $V(\lambda)^-_{-\overline{\lambda}+\overline{\nu}} = \mathfrak{Z}(\mathfrak{h})v_{-\lambda+\nu}$. Положим $\langle\lambda, \alpha_i\rangle = 2(\lambda, \alpha_i)/(\alpha_i, \alpha_i)$. В данной работе доказан следующий асимптотический вариант гипотезы 1.6.

Теорема 1.7. При любом фиксированном $p \in \mathbb{Z}$ для любого минимального полумладшего веса ν существуют такие числа $K_1(\nu), ..., K_n(\nu)$, что для всех λ таких, что $\langle\lambda, \alpha_i\rangle \geq K_i(\nu)$ выполняются следующие два условия

1) $\mathfrak{Z}(\mathfrak{h})_{p\omega} v_{-\lambda+\nu} = V(\lambda)^{-}_{-\lambda+\nu+p\omega}$;
2) $\dim \mathfrak{Z}(\mathfrak{h})_{p\omega} v_{-\lambda+\nu} = \dim V(\lambda)^{-}_{-\lambda+\nu+p\omega} = \dim \mathfrak{Z}(\mathfrak{h})_{p\omega}$.

Благодарности

Я благодарю своего научного руководителя доктора физико-математических наук, профессора Эрнеста Борисовича Винберга за постановку задачи и внимание к проделанной работе. Я также благодарю доктора физико-математических наук Дмитрия Ивановича Панюшева, доцента Дмитрия Андреевича Тимашева и доцента Ивана Владимировича Аржанцева за плодотворные обсуждения по теме работы. Благодарю всех сотрудников кафедры высшей алгебры за творческую атмосферу, которая способствовала научной работе.

Публикации автора по теме диссертации

[1]. Зорин А.А., *О связи сферичности и слабой симметричности однородных пространств редуктивных групп.* Вестн. Моск. ун-та. Сер.1, Математика. Механика. №4, 14–18, 2005.

[2]. Зорин А.А., *О коммутативности централизатора подалгебры в универсальной обертывающей алгебре Ли.* Депонировано в ВИНИТИ РАН 29.10.08 № 832-В2008, 26с.