МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи
УДК 514.74, 517.927.25

Зуев Константин Михайлович

Формальный метод сдвига аргумента и геометрия интегрируемых геодезических потоков

Специальность
01.01.04 — геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Москва, 2008

Работа выполнена на кафедре дифференциальной геометрии и приложений Механико-Математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научные руководители:

- академик РАН, профессор
  Анатолий Тимофеевич Фоменко

- доктор физико-математических наук, профессор
  Алексей Викторович Болсинов

Официальные оппоненты:

- доктор физико-математических наук, профессор
  Александр Сергеевич Мищенко

- кандидат физико-математических наук
  Юрий Андреевич Браилов

Ведущая организация:
Удмуртский государственный университет

Защита диссертации состоится 26 декабря 2008 г. в 16 час. 40 мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Механико-Математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-Математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 26 ноября 2008 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 при МГУ
профессор А. О. Иванов

Актуальность темы

Настоящая диссертация посвящена исследованию вполне интегрируемых гамильтоновых систем и состоит из двух частей.

Одним из центральных направлений теории вполне интегрируемых систем является исследование уравнений Эйлера на двойственных пространствах алгебр Ли:

$$\dot{x} = \mathrm{ad}^*_{df(x)}x, \quad x \in \mathfrak{g}^*, \quad f \in C^\infty(\mathfrak{g}^*).$$

Уравнения Эйлера являются естественным обобщением классических уравнений динамики твердого тела, и важность их изучения определяется прежде всего тем, что они возникают во многих задачах математической физики[1]. Метод сдвига аргумента, предложенный А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко[2], позволяет проинтегрировать уравнения Эйлера, т.е. построить полный коммутативный набор интегралов, для многих классов вещественных и комплексных алгебр Ли.

Первая часть диссертации мотивирована доказательством гипотезы Мищенко–Фоменко[3], полученным С. Т. Садэтовым[4].

Гипотеза Мищенко–Фоменко утверждает, что для каждой вещественной или комплексной алгебры Ли существует полный коммутативный набор полиномов на ее двойственном пространстве. Для случая полупростых алгебр Ли эта гипотеза была доказана А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко при помощи метода сдвига аргумента[2]. В общем случае доказательство было впервые получено С. Т. Садэтовым[4]. Оказалось, что доказательство становится возможным, даже если вместо поля вещественных или комплексных чисел рассматривать алгебры Ли над абстрактным полем. А именно, теорема Садэтова говорит, что гипотеза Мищенко–Фоменко справедлива для произвольной конечномерной алгебры Ли над полем нулевой характеристики. А. В. Болсинов[5] изложил чисто алгебраическое доказательство Садэтова на более явном языке пуассоновой геометрии, что сделало доказательство конструктивным и позволило эффективно работать с конкретными алгебрами Ли.

[1]Богоявленский О. И., *Интегрируемые уравнения Эйлера на алгебрах Ли, возникающие в задачах математической физики*, Изв. АН СССР. Сер. матем., 1984, 48:5, 883–938.

[2]Мищенко А. С., Фоменко А. Т., *Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли*, Изв. АН СССР. Сер. Матем., т.42, № 2, 1978, 396-415.

[3]Мищенко А. С., Фоменко А. Т., *Интегрирование гамильтоновых систем с некоммутативными симметриями*, Труды сем. по вект. и тенз. анализу, вып.20, М.:МГУ, 1981, 5-54.

[4]Садэтов С. Т., *Доказательство гипотезы Мищенко-Фоменко*, Доклады РАН, 2004, 397 № 6, 751-754.

[5]Болсинов А. В., *Полные инволютивные наборы полиномов в пуассоновых алгебрах: доказательство гипотезы Мищенко–Фоменко*, Труды сем. по вект. и тенз. анализу, вып.26, М.:МГУ, 2005, 87-109.

В основе доказательства лежит конструкция, которая сводит задачу к алгебре Ли меньшей размерности над новым полем, являющимся расширением исходного. Это позволяет действовать по индукции: на каждом шаге мы сводим задачу к построению полного коммутативного набора полиномов для алгебры меньшей размерности и действуем так до тех пор, пока не получим абелеву или полупростую алгебру Ли. В последнем случае остается применить метод сдвига аргумента. Однако хорошо известно, что метод сдвига аргумента дает полный коммутативный набор полиномов не только в полупростом случае, но и для многих других классов алгебр Ли. Поэтому, естественно было бы применять его не только к полупростым, а вообще ко всем возникающим в процессе индукции алгебрам. Техническая проблема заключается в том, что критерий полноты для коммутативного набора, построенного методом сдвига аргумента, известен только в вещественном и комплексном случаях[6]. Имея такой критерий для произвольного поля, можно было бы существенно упростить описанную процедуру построения полного коммутативного набора. А именно, делать индуктивный шаг, понижающий размерность алгебры, только в том случае, когда коммутативный набор, построенный методом сдвига аргумента, не является полным согласно новому критерию.

В первой части диссертации мы строим обобщение метода сдвига аргумента (формальный метод сдвига аргумента) для алгебр Ли над произвольным полем характеристики нуль и доказываем критерий полноты для коммутативного набора полиномов, построенного этим методом.

Во второй части диссертации мы рассматриваем геодезические потоки на надстройках автоморфизмов торов и продолжаем исследования начатые А. В. Болсиновым, И. А. Таймановым, А. П. Веселовым и Х. Р. Дуллиным[7,8,9]

Замкнутое многообразие M_A^{n+1} называется надстройкой автоморфизма $A : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$, если существует расслоение

$$p : M_A^{n+1} \xrightarrow{\overset{A}{\curvearrowright}\mathbb{T}^n} S^1$$

многообразия над окружностью S^1 со слоем тор $\mathbb{T}^n$, такое, что монодромия расслоения задается матрицей $A \in SL(n, \mathbb{Z})$.

[6]Болсинов А. В., *Критерий полноты семейства функций в инволюции, построенного методом сдвига аргумента*, ДАН СССР, 1988, т.301, № 5. с.1037-1040.

[7]Болсинов А. В., Тайманов И. А., *О примере интегрируемого геодезического потока с положительной топологической энтропией*, УМН, 1999, 54:4(328), 157–158.

[8]Болсинов А. В., Тайманов И. А., *Интегрируемы геодезические потоки на надстройках автоморфизмов торов*, Труды МИРАН. 2000. Т. 231. С. 46-63.

[9]Bolsinov A. V., Dullin H. R., Veselov A. P., *Spectra of Sol-manifolds: arithmetic and quantum monodromy*, Comm. Math. Phys., 2006, V.264, pp.583- 611.

Многообразие M_A^{n+1} обладает интересными свойствами. Простейший нетривиальный пример с

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

был рассмотрен Л. Батлером[10]. В этой работе была построена аналитическая риманова метрика на M_A^3, геодезический поток которой интегрируем по Лиувиллю при помощи гладких интегралов, но неинтегрируем в классе аналитических функций. Последнее утверждение было доказано при помощи топологических препятствий к аналитической интегрируемости, найденных И. А. Таймановым[11]. Таким образом, было показано, что некоторые из этих топологических препятствий не мешают гладкой интегрируемости.

Г. П. Патернайн[12] доказал, что если геодезический поток на замкнутом многообразии интегрируем, то, при выполнении некоторых дополнительных условий, его топологическая энтропия равна нулю. Он также предположил, что топологическая энтропия интегрируемого геодезического потока на замкнутом многообразии всегда равна нулю. Отметим, что топологическая энтропия в примере Батлера нулевая, что согласуется с гипотезой Патернайна.

А. В. Болсинов и И. А. Тайманов[7] опровергли эту гипотезу для гладкого случая, рассмотрев многообразие M_A^3 с автоморфизмом

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обобщив конструкцию Батлера, они построили первый пример C^∞-интегрируемого геодезического потока с положительной топологической энтропией. Аналогичные результаты имеют место и для случая $n > 2$ (см. [8]).

Квантовым аналогом задачи об интегрируемости геодезического потока на многообразии является описание спектра и собственных функций оператора Бельтрами–Лапласа. В статье[9] авторами построен базис в пространстве $L_2(M_A^3)$, состоящий из собственных функций оператора Бельтрами–Лапласа, которые описываются при помощи решений так называемого модифицированного уравнения Матье. Во второй части дис-

[10] Butler L., *A new class of homogeneous manifolds with Liouville-integrable geodesic flows*. C.R. Math. Acad. Sci. Soc. R. Can. 21(4):127–131, 1999.

[11] Тайманов И. А., *Топологические препятствия к интегрируемости геодезических потоков на неодносвязных многообразиях*, Изв. АН СССР. Сер. матем., 1987, 51:2, 429–435; Тайманов И. А., *О топогических свойствах интегрируемых геодезических потоков*, Матем. заметки, 1988, 44:2, 283–284.

[12] Paternain G. P., *On the topology of manifolds with completely integrable geodesic flows*, Ergod. Theory Dynam. Syst. 12 (1992), 109–121; Paternain G. P., *On the topology of manifolds with completely integrable geodesic flows II*, J. Geom. Phys. 13 (1994), 289– 298.

сертации мы рассматриваем многомерную ситуацию $n > 2$ и главным результатом является описание спектра и построение собственного базиса для оператора Бельтрами–Лапласа на $L_2(M_A^{n+1})$, который описывается при помощи решений одномерного уравнения Шредингера.

Добавим, что существует хорошо известная проблема распознавания римановых многообразий по спектру их оператора Бельтрами-Лапласа, которая, как принято считать, была сформулирована[13] в 1966 г. в виде знаменитого вопроса: "Can one hear the shape of a drum?"[14]. Проблема состоит в эквивалентности изоспектральности и изометричности многообразий: будут ли многообразия имеющие одинаковый спектр изометричны? В общем случае ответ зависит от геометрии многообразия[15]. В связи с этим задача об описании спектра риманова многообразия сама по себе является весьма актуальной.

Цель работы

1. Разработать формальный метод сдвига аргумента для алгебр Ли над произвольным полем характеристики нуль и получить критерий полноты для коммутативного набора полиномов, построенного этим методом.

2. Описать спектр и построить собственный базис для оператора Бельтрами–Лапласа на надстройках автоморфизмов торов M_A^{n+1} для $n > 2$.

Основные методы исследования

Для доказательства формальной теоремы Фробениуса используются методы формального исчисления и некоторые результаты теории дифференциальных уравнений в частных производных. Для доказательства коммутативности и критерия полноты набора, построенного формальным методом сдвига аргумента, используются методы пуассоновой геометрии и линейной алгебры. Для построения сдвигов рациональных инвариантов алгебраических алгебр Ли над абстрактным полем используется хорошо известный метод алгебраической геометрии, позволяющий каждой рациональной функции и ее регулярной точке сопоставлять взаимно-однозначным образом формальный ряд Тейлора. При описании спектра и построении собственного базиса оператора Бельтрами–Лапласа используются свойства одномерного уравнения Шредингера и некоторые факты из теории решеток. Для доказательства сходимости рядов, возникающих в процессе доказательства, используется метод мажорант.

---

[13]Кас M., *Can one hear the shape of a drum?* Amer. Math. Monthly. 1966. V. 73. P. 1–23.

[14]"Можно ли услышать форму барабана?"

[15]Buser P., *Geometry and spectra of compact Riemann surfaces*, Boston; Basel; Berlin: Birkhäuser, 1992. (Progress in Mathematics; 106).

Научная новизна

Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Доказана формальная теорема Фробениуса — аналог классической теоремы об интегрируемости распределений.

2. Введено определение формального инварианта конечномерного представления $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в точке $a \in V$ и доказано существование полного набора таких инвариантов для регулярных a.

3. Разработан формальный метод сдвига аргумента: определен набор полиномов $\mathcal{F}_a(\mathcal{I}(\mathfrak{g}))$ в пуассоновой алгебре $P(\mathfrak{g})$ как набор однородных частей формальных инвариантов представления ad^* в регулярной точке $a \in \mathfrak{g}^*$, доказана его коммутативность и получен критерий полноты.

4. Для $n > 2$ построен собственный базис и получено описание спектра для оператора Бельтрами–Лапласа на надстройках автоморфизмов торов M_A^{n+1} в терминах решений одномерного уравнения Шредингера.

Теоретическая и практическая ценность

Диссертация имеет теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы для дальнейших исследований некоторых вопросов теории вполне интегрируемых гамильтоновых систем. В частности, для построения новых полиномиально интегрируемых систем на двойственных пространствах алгебр Ли и изучения их свойств.

Апробация результатов

Основные результаты диссертации докладывались на научно-исследовательском семинаре “Современные геометрические методы” под руководством А. Т. Фоменко, А. С. Мищенко, А. В. Болсинова, А. А. Ошемкова, Е. А. Кудрявцевой (мех-мат МГУ, 2008 г.); на международной конференции по Дифференциальным Уравнениям и Динамическим Системам (Суздаль, 2006 г.); на семинаре по геометрии в Рурском университете, г. Бохум, Германия (Ruhr-Universität Bochum, 2003 г.); на международной конференции “Симметрии в нелинейной математической физике” (Киев, Украина, 2003 г.).

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в трех работах, список которых приведен в конце автореферата.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, двух глав и списка литературы. Полный объем диссертации — 82 страницы, библиография включает 52 наименования.

Краткое содержание работы

Во введении дается небольшой обзор результатов непосредственно связанных с темой диссертации, приводятся мотивировки исследований. Кроме того, формулируются основные идеи и результаты диссертации.

В главе 1 диссертации разрабатывается формальный метод сдвига аргумента для алгебр Ли над произвольным полем характеристики нуль и доказывается критерий полноты для коммутативного набора полиномов, построенного этим методом. В разделе 1.1 мы напоминаем основные определения, формулируем гипотезу Мищенко–Фоменко в терминах пуассоновой алгебры $P(\mathfrak{g})$ и обсуждаем центральную идею ее доказательства. В разделе 1.2 мы напоминаем метод сдвига аргумента[2] и критерий полноты для вещественного и комплексного случаев[6].

Начиная с раздела 1.3 мы рассматриваем алгебры Ли над произвольным полем $\mathbb{K}$ нулевой характеристики. Хорошо известно, что инварианты коприсоединенного представления, вообще говоря, не обязаны быть полиномами. В вещественном и комплексных случаях этот недостаток можно легко устранить, разложив инвариант f в ряд Тейлора в окрестности точки $a \in \mathfrak{g}^*$

$$f(a + \lambda x) = f(a) + \lambda f_{a,1}(x) + \lambda^2 f_{a,2}(x) + \dots$$

и взяв вместо сдвигов инвариантов полиномы $\{f_{a,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$. Одна из трудностей, с которой мы сталкиваемся при переходе к абстрактному полю, — это отсутствие на поле $\mathbb{K}$ априорно заданной топологии, и, как следствие, отсутствие дифференцирования функций на $\mathfrak{g}^*$, разложения их в ряд и т.д. В разделе 1.3 вместо кольца всех инвариантов алгебры Ли $\mathcal{I}(\mathfrak{g})$ мы рассматриваем центр ее пуассоновой алгебры $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$. Таким образом, мы ограничиваемся рассмотрением только полиномиальных функций на $\mathfrak{g}^*$, а в этом случае дифференцирование можно определить чисто алгебраически (формально), без понятия непрерывности. Недостатком такого подхода является то, что нам может просто не хватить полиномов из центра для построения полного набора. Поэтому мы должны потребовать, чтобы меньшее, вообще говоря, множество $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ совпадало со множеством всех инвариантов $\mathcal{I}(\mathfrak{g})$ в смысле функциональной зависимости. В результате получается следующий критерий полноты для полиномиального случая (см. также работу Д. И. Панюшева и О. С. Якимовой[16]):

[16] Panyushev D. I., Yakimova O. S., *The argument shift method and maximal commutative subalgebras of Poisson algebras*, arXive:math.RT/0702583v1.

Теорема 1 *Пусть* $\mathfrak{g}$ *— конечномерная алгебра Ли над полем* $\mathbb{K}$ *характеристики нуль,* $\operatorname{trdeg} \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = \operatorname{ind} \mathfrak{g}$ *и* $a \in \mathfrak{g}^*_{reg}$*. Коммутативный набор полиномиальных* a*-сдвигов центральных функций является полным тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{codim}(\mathfrak{g}^{\bar{\mathbb{K}}})^*_{sing} \geqslant 2.$$

Здесь $\mathfrak{g}^*_{reg}$ обозначает множество регулярных элементов (относительно коприсоединенного представления алгебры Ли $\mathfrak{g}$), $\mathfrak{g}^*_{sing} = \mathfrak{g}^* \setminus \mathfrak{g}^*_{reg}$ — множество сингулярных элементов и $\mathfrak{g}^{\bar{\mathbb{K}}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{K}} \bar{\mathbb{K}}$ обозначает алгебру Ли над алгебраическим замыканием $\bar{\mathbb{K}}$ основного поля (аналог комплексификации для вещественного случая). Отметим, что условие полноты $\operatorname{codim}(\mathfrak{g}^{\bar{\mathbb{K}}})^*_{sing} \geqslant 2$ допускает естественную интерпретацию без использования алгебраического замыкания основного поля (см. Замечание 13 в тексте диссертации).

В разделе 1.4 мы отказываемся от условия $\operatorname{trdeg} \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = \operatorname{ind} \mathfrak{g}$ и исследуем более широкий класс алгебр Ли — класс алгебраических алгебры Ли. В этом случае из теоремы Розенлихта[17] следует, что можно ограничиться рассмотрением рациональных инвариантов. Далее, для построения сдвигов рациональных инвариантов над произвольным полем $\mathbb{K}$, мы используем алгебро-геометрический формализм[18], позволяющий каждой рациональной функции и ее регулярной точке сопоставлять взаимно-однозначным образом формальный ряд Тейлора. В итоге, для алгебраических алгебр Ли критерий полноты имеет следующий вид:

Теорема 2 *Пусть* $\mathfrak{g}$ *— конечномерная алгебраическая алгебра Ли над полем* $\mathbb{K}$ *характеристики нуль и* $a \in \mathfrak{g}^*_{reg}$*. Коммутативный набор полиномиальных* a*-сдвигов рациональных инвариантов является полным тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{codim}(\mathfrak{g}^{\bar{\mathbb{K}}})^*_{sing} \geqslant 2.$$

В разделе 1.5 мы отказываемся от условия алгебраичности и рассматриваем произвольные конечномерные алгебры Ли. В этом случае, в отличие от вещественных, комплексных или алгебраических алгебр, отсутствует группа (Ли или алгебраическая), в частности, нет ни коприсоединенного представления группы, ни инвариантов этого представления. Тем не менее, оказывается, можно естественным способом определить объекты, играющие роль инвариантов. Если $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, то хорошо известно, что аналитическая функция $f \in \mathcal{A}(\mathfrak{g}^*)$ является инвариантом коприсоединенного представления тогда и только тогда, когда $\operatorname{ad}^*_{df(x)} x = 0$.

[17] Rosenlicht M., *Some basic theorems on algebraic groups*, Amer. J. Math., 1956, 78, 401-443.

[18] Шафаревич И. Р., *Основы алгебраической геометрии*, т.1. М., Наука, 1988.

В этом определении участвуют только структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$, поэтому оно имеет смысл для любого поля $\mathbb{K}$. В случае произвольного поля надо лишь договориться, что понимать под f. Ограничиться только рациональными функциями $\mathbb{K}(\mathfrak{g}^*)$, как это позволяла сделать теорема Розенлихта в алгебраическом случае, нельзя, так как теперь алгебра Ли не обязательно алгебраическая, и в этом случае рациональных инвариантов для построения полного набора может не хватить. С другой стороны, хорошо известно, что в вещественном или комплексном случае инварианты могут быть глобально не определены, и тогда мы вынуждены рассматривать локальные инварианты, которые по своей сути являются сходящимися рядами. Эти соображения приводят к следующей естественной идее: под инвариантом (точнее формальным инвариантом) коприсоединенного представления мы будем понимать формальный ряд из кольца $\mathbb{K}[[\mathfrak{g}^*]]$, удовлетворяющий некоторому естественному условию (типа $\mathrm{ad}^*_{df(x)}x = 0$). Тогда однородные части таких формальных инвариантов будут аналогами сдвигов "классических" инвариантов.

В разделе 1.5 мы реализуем описанную идею. В параграфе 1.5.1 мы доказываем необходимый технический результат — формальную теорему Фробениуса, которая является аналогом классической теоремы об интегрируемости гладких распределений. Для того, чтобы получить формальную теорему Фробениуса, нужно лишь вместо гладких геометрических объектов рассмотреть их формальные аналоги. Опишем соответствующую конструкцию более подробно.

Пусть $\mathbb{K}^n$ — аффинное пространство над полем $\mathbb{K}$ характеристики нуль. Формальное векторное поле на $\mathbb{K}^n$ — это вектор, компонентами которого являются формальные степенные ряды:

$$v = (v^1(x), \dots, v^n(x)), \quad v^i \in \mathbb{K}[[x_1, \dots, x_n]].$$

Формальный коммутатор формальных векторных полей определяется при помощи стандартной формулы для коммутатора:

$$[u, v]^i = u^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} - v^j \frac{\partial u^i}{\partial x^j}.$$

Формальным распределением $\mathcal{D}$ на $\mathbb{K}^n$ называется линейная оболочка над $\mathbb{K}[[x_1, \dots, x_n]]$ набора формальных векторных полей:

$$\mathcal{D} = \mathrm{span}\,\{v_1, \dots, v_k\}.$$

Ранг формального распределения — это ранг (вычисляемый над $\mathbb{K}[[x_1, \dots, x_n]]$) матрицы, составленной из компонент формальных векторных полей, порождающих распределение:

$$\operatorname{rank}\mathcal{D} = \operatorname{rank}\Xi(x), \quad \Xi(x) = \begin{pmatrix} v_1^1(x) & \dots & v_1^n(x) \\ \vdots & & \vdots \\ v_k^1(x) & \dots & v_k^n(x) \end{pmatrix}.$$

По определению, условие постоянства ранга распределения означает, что ранг формальной матрицы $\Xi(x)$ над кольцом формальных рядов равен рангу “числовой” матрицы $\Xi(0)$, полученной занулением всех переменных.

Формальным интегралом формального распределения $\mathcal{D} = \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_k\}$ называется формальный ряд $F \in \mathbb{K}[[x_1, \dots, x_n]]$, производные которого вдоль всех формальных векторных полей, определяющих распределение $\mathcal{D}$, равны нулю:

$$v_\alpha(F) := \sum v_\alpha^i \frac{\partial F}{\partial x^i} = 0, \quad \text{для всех } \alpha = 1, \dots, k.$$

Формальное распределение $\mathcal{D}$ на $\mathbb{K}^n$ постоянного ранга k называется формально интегрируемым, если существует $(n-k)$ формальных интегралов $\mathcal{D}$, дифференциалы которых линейно независимы в нуле.

Теорема 3 (Формальная теорема Фробениуса) *Формальное распределение $\mathcal{D} = \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_k\}$ на $\mathbb{K}^n$ постоянного ранга k формально интегрируемо тогда и только тогда, когда все коммутаторы $[v_i, v_j]$ линейно выражаются через $v_1, \dots, v_k$ с коэффициентами из $\mathbb{K}[[x_1, \dots, x_n]]$*

В параграфе 1.5.2 мы вводим понятие “формального инварианта” для любого (не обязательно коприсоединенного) представления алгебры Ли и доказываем существование полного набора таких инвариантов.

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над полем $\mathbb{K}$ нулевой характеристики и $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ ее любое конечномерное представление в линейном пространстве V, $\dim V = n$.

Определение 1 *Формальный ряд $F \in \mathbb{K}[[x_1, \dots, x_n]]$ называется формальным инвариантом представления ρ в точке $a \in V$, если для всех $\xi \in \mathfrak{g}$ выполнено следующее формальное тождество:*

$$\langle d_x F, \rho(\xi)(a + x) \rangle = 0.$$

Существование полного набора формальных инвариантов является прямым следствием формальной теоремы Фробениуса.

Теорема 4 *Для любого представления $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ и любого регулярного элемента $a \in V$ существует набор $\{F^{(1)}, \dots, F^{(s)}\}$ из $s = \dim V - \dim \mathfrak{g} + \dim \mathrm{St}(a)$ формальных инвариантов представления ρ в точке a, дифференциалы которых в нуле линейно независимы.*

Напомним, что элемент $a \in V$ называется регулярным, если его стационарная подалгебра $\mathrm{St}(a) = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid \rho(\xi)a = 0\}$ имеет минимальную размерность.

В параграфе 1.5.3 мы рассматриваем коприсоединенное представление алгебры Ли $\mathrm{ad}^* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}^*)$. Используя результаты, полученные в предыдущих параграфах, мы определяем набор полиномов $\mathcal{F}_a(\mathcal{I}(\mathfrak{g}))$ в пуассоновой алгебре $P(\mathfrak{g})$ как набор однородных частей формальных инвариантов представления ad^* в регулярной точке $a \in \mathfrak{g}^*$ и доказываем его коммутативность. Такой метод построения коммутативного набора полиномов мы называем формальным методом сдвига аргумента. Так как эта конструкция является центральной в первой части диссертации, опишем ее более подробно.

Для алгебры Ли $\mathfrak{g}$ над полем $\mathbb{K}$ нулевой характеристики рассмотрим ее коприсоединенное представление $\mathrm{ad}^* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}^*)$. Пусть $a \in \mathfrak{g}^*$ — регулярный элемент, т.е. его аннулятор $\mathrm{Ann}(a) = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{ad}^*_\xi a = 0\}$ имеет минимальную размерность $s = \mathrm{ind}\,\mathfrak{g}$. Тогда, по Теореме 4 о формальных инвариантах, существует s формальных рядов $F^{(1)}, \dots, F^{(s)} \in \mathbb{K}[[\mathfrak{g}^*]]$ таких, что для всех $\xi \in \mathfrak{g}$

$$\langle d_x F^{(j)}, \mathrm{ad}^*_\xi (a + x) \rangle = 0.$$

Кроме того, дифференциалы $dF^{(1)}, \dots, dF^{(s)}$ линейно независимы в нуле и образуют базис в $\mathrm{Ann}(a)$. Пусть $F^{(j)} = f_1^{(j)} + f_2^{(j)} + \dots$, где $f_i^{(j)} \in \mathbb{K}[\mathfrak{g}^*]$ есть однородный полином степени i. Тогда последнее тождество можно эквивалентным образом переписать на языке полиномов:

$$\mathrm{span}\,\{df_1^{(1)}, \dots df_1^{(s)}\} = \mathrm{Ann}(a),$$

$$\mathrm{ad}^*_{df_{i+1}^{(j)}} a + \mathrm{ad}^*_{df_i^{(j)}} x = 0,$$

для $i = 1, 2, \dots$ и $j = 1, \dots, s$. Пусть $\mathcal{F}_a(\mathcal{I}(\mathfrak{g}))$ обозначает подмножество в пуассоновой алгебре $P(\mathfrak{g})$, состоящее из всех этих полиномов,

$$\mathcal{F}_a(\mathcal{I}(\mathfrak{g})) = \{f_i^{(j)} \mid j = 1, \dots, s,\ i = 1, 2, \dots\} \subset P(\mathfrak{g}).$$

Отметим, что если $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, то ряд F, удовлетворяющий тождеству $\langle d_x F, \mathrm{ad}^*_\xi (a + x) \rangle = 0$, является рядом Тейлора в нуле функции $f_a(x) = f(a + x)$, где $f(x) \in \mathcal{I}(\mathfrak{g})$ — локально аналитический инвариант коприсоединенного представления. В этом случае набор полиномов

$\mathcal{F}_a(\mathcal{I}(\mathfrak{g}))$ с точки зрения функциональной зависимости эквивалентен семейству сдвигов инвариантов $\{f(x+\lambda a) \mid f \in \mathcal{I}(\mathfrak{g}), \lambda \in \mathbb{K}\}$ (см. [2]). Поэтому мы говорим, что набор $\mathcal{F}_a(\mathcal{I}(\mathfrak{g})) \subset P(\mathfrak{g})$ получен формальным методом сдвига аргумента.

Следующее утверждение является переформулировкой теоремы о коммутативности сдвигов инвариантов коприсоединенного представления, доказанной А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко[2].

Теорема 5 *Набор $\mathcal{F}_a(\mathcal{I}(\mathfrak{g}))$ коммутативен.*

Доказательство критерия полноты набора $\mathcal{F}_a(\mathcal{I}(\mathfrak{g}))$ (параграф 1.5.6) почти автоматически следует из двух лемм из линейной алгебры: леммы об иерархии, порождаемой парой билинейных форм (параграф 1.5.4), и леммы о паре кососимметрических билинейных форм (параграф 1.5.5).

Теорема 6 *Пусть $\mathfrak{g}$ — конечномерная алгебра Ли над полем $\mathbb{K}$ характеристики нуль и $a \in \mathfrak{g}^*_{reg}$ — регулярный элемент.*

1. *Коммутативный набор $\mathcal{F}_a(\mathcal{I}(\mathfrak{g}))$, построенный формальным методом сдвига аргумента, является полным тогда и только тогда, когда*
$$\operatorname{codim}(\mathfrak{g}^{\bar{\mathbb{K}}})^*_{sing} \geqslant 2.$$
2. *Коммутативный набор $\mathcal{F}_a(\mathcal{I}(\mathfrak{g}))$ является полным в регулярной точке $x \in \mathfrak{g}^*_{reg}$ тогда и только тогда, когда прямая $\{x+\lambda a \mid \lambda \in \bar{\mathbb{K}}\}$ не пересекает множество $(\mathfrak{g}^{\bar{\mathbb{K}}})^*_{sing}$.*

В разделе 1.6 мы напоминаем конструкцию, лежащую в основе геометрического доказательства гипотезы Мищенко–Фоменко[5]. Заключительный раздел 1.7 первой главы диссертации посвящен примерам применения критерия полноты коммутативного набора полиномов, построенного формальным методом сдвига аргумента.

В главе 2 диссертации описывается спектр и строится собственный базис оператора Бельтрами–Лапласа на надстройках автоморфизмов торов.

В разделе 2.1 мы определяем надстройку автоморфизма тора M_A^{n+1} как пространство расслоения над окружностью S^1 со слоем тор $\mathbb{T}^n$ и монодромией расслоения $A : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$, $A \in SL(n,\mathbb{Z})$. Далее мы напоминаем, почему эти многообразия интересны с точки зрения теории интегрируемых систем.

В разделе 2.2 мы описываем риманову метрику на M_A^{n+1}. Сначала мы определяем метрику на цилиндре $\mathcal{C}^{n+1} = \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}$:
$$ds^2 = g_{ij}(z)du^i du^j + dz^2,$$

где $z \in \mathbb{R}$ и $u \in \mathbb{T}^n$ — координаты на торе, согласованные с действием автоморфизма A, т.е. координаты относительно базиса $f_1, \ldots, f_n$, в котором матрица A имеет номальную жорданову форму. Метрика на торе задается матрицей

$$G(z) = (g_{ij}(z)) = \left(e^{-z \ln A}\right)^T G_0 \, e^{-z \ln A}.$$

Здесь G_0 — произвольная положительно определенная симметричная матрица порядка n (матрица метрики на нулевом слое $\{z = 0\}$). Далее мы показываем, что так определенная метрика на цилиндре инвариантна относительно действия

$$T_A : (u, z) \mapsto (Au, z + 1),$$

и поэтому корректно определена на фактор-пространстве $M_A^{n+1} = \mathcal{C}^{n+1}/T_A$.

Оператор Бельтрами–Лапласа — это оператор $\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad}$, который на римановом многообразии представляется в виде

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{\det G}} \, \partial_i (g^{ij} \sqrt{\det G} \, \partial_j),$$

где ∂_i — частная производная по i-й координате, G — метрический тензор и g^{ij} — компоненты обратного тензора в локальных координатах. В разделе 2.3 описывается вид оператора Бельтрами–Лапласа на M_A^{n+1}.

Раздел 2.4 посвящен доказательству основного результата второй главы диссертации. Сначала мы показываем, что задача о поиске спектра и собственных функций оператора Бельтрами-Лапласа на многообразии M_A^{n+1} сводится к одномерному уравнению Шредингера

$$-\frac{d^2 F(z)}{dz^2} + Q_\gamma(z) F(z) = \mathcal{E} F(z),$$

с потенциалом

$$Q_\gamma(z) = (2\pi)^2 g^{ij}(z) \langle \gamma, f_i \rangle \langle \gamma, f_j \rangle,$$

где $\gamma \in \Gamma^*$ — элемент двойственной решетки тора. А именно, собственные функции (т.е. решения уравнения $-\Delta\Psi = \mathcal{E}\Psi$) имеют вид:

$$\Psi_{\gamma,k}(u, z) = e^{2\pi i \langle \gamma, u \rangle} F_{\gamma,k}(z),$$

где $\{F_{\gamma,k}(z)\}_{k \in \mathbb{N}}$ — полная ортонормированная система собственных функций оператора $-\frac{d^2}{dz^2} + Q_\gamma(z)$, которая существует, так как $Q_\gamma(z) \to +\infty$ при $|z| \to \infty$ для всех $\gamma \neq 0$ (лемма 8 в тексте диссертации). Собственное значение $\mathcal{E}_{\gamma,k}$, отвечающее функции $\Psi_{\gamma,k}$, является собственным значением, отвечающем функции $F_{\gamma,k}$.

Однако, функции $\Psi_{\gamma,k}$ не являются корректно определенными на фактор-пространстве $M_A^{n+1} = \mathcal{C}^{n+1}/T_A$, так как они не инвариантны относительно действия T_A. Поэтому вместо самих функций $\Psi_{\gamma,k}$ мы рассматриваем их усреднение по этому действию:

$$\widetilde{\Psi}_{\gamma,k}(u,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Psi_{\gamma,k}(A^n u, z+n).$$

Мы доказываем, что этот ряд сходится равномерно на M_A^{n+1}, и поэтому $\widetilde{\Psi}_{\gamma,k}$ является корректно определенной функцией на M_A^{n+1}, которая, кроме того, является собственной функцией оператора Бельтрами–Лапласа с собственным значением $\mathcal{E}_{\gamma,k}$ (леммы 10 и 11 в тексте диссертации).

Далее мы рассматриваем естественное действие циклической подгруппы $\{A^*\} \subset SL(n,\mathbb{Z})$ на $\Gamma^* \setminus \{0\}$ и показываем, что собственные функции и собственные значения оператора Лапласа-Бельтрами параметризуются не точками двойственной решетки, а целыми орбитами $[\gamma] = \{(A^*)^n\gamma, n\in\mathbb{Z}\}$ (леммы 12 и 13 в тексте диссертации):

$$[\gamma] \mapsto (\Psi_{[\gamma],k}, \mathcal{E}_{[\gamma],k}),$$

$$\widetilde{\Psi}_{\gamma,k}(u,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Psi_{\gamma,k}(A^n u, z+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Psi_{(A^*)^n\gamma,k}(u,z) =: \Psi_{[\gamma],k}(u,z),$$

Случай $\gamma = 0$ рассматривается отдельно.

В заключении доказывается основная

Теорема 7 *Набор функций* $\{1, \cos k\pi z, \sin k\pi z, \Psi_{[\gamma],k}\}$ *где* $k\in\mathbb{N}$ *и* $\gamma\in\Gamma^*\setminus\{0\}$ *образует собственный базис оператора Лапласа-Бельтрами в пространстве* $L_2(M_A^{n+1})$. *При этом функции* $\Psi_{[\gamma],k}$ *отвечает собственное значение* $\mathcal{E}_{[\gamma],k}$, *являющееся собственным значением оператора Шредингера на прямой с потенциалом* $Q_\gamma(z)$.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своим научным руководителям — академику РАН А. Т. Фоменко за постоянную поддержку и внимание к работе и профессору А. В. Болсинову за постановку задач, плодотворные обсуждения и ряд ценных замечаний и идей, определивших направление развития этой работы. Автор также благодарен всем сотрудникам кафедры Дифференциальной геометрии и приложений Механико-Математического факультета Московского государственного университета за помощь в течении его учебы.

Публикации автора по теме диссертации

1. К. М. Зуев, Об одном случае интегрируемости геодезического потока на однородном многообразии, Вестник Московского университета. Сер.1, Математика. Механика. 2006 №2. 13-16.

2. К. М. Зуев, Спектр оператора Бельтрами—Лапласа на надстройках автоморфизмов торов, Математический сборник, 2006, 197:9, 43–54.

3. К. М. Зуев, О спектре оператора Бельтрами—Лапласа на надстройках автоморфизмов торов, Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, Суздаль, 2006, Тезисы докладов, 109-111.