Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 515.164.633

Скопенков Михаил Борисович

Классификация зацеплений и ее применения

01.01.04 – геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2008

Работа выполнена на кафедре дифференциальной геометрии и приложений Механико-Математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Скопенков Аркадий Борисович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Мищенко Александр Сергеевич, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник Щепин Евгений Витальевич Математический институт имени В.А. Стеклова РАН
Ведущая организация:	Российский государственный педагогический университет имени А.И. Герцена, Санкт-Петербург

Защита диссертации состоится 26 декабря 2008 г. в $16^{\underline{40}}$ на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-Математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-Математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 26 ноября 2008 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор

А.О. Иванов

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Классической проблемой топологии является проблема классификации вложений данного пространства в данное многообразие[1]. Эта проблема уже сыграла выдающуюся роль в развитии топологии. Для решения этой проблемы (а также близкой проблемы о существовании вложений) были созданы различные методы такими классиками как Дж. Александер, П.С. Александров, Е. Ван Кампен, К. Куратовский, С. Маклейн, Л.С. Понтрягин, Р. Том, Х. Уитни, Х. Хопф, и другими. В настоящее время исследование этой проблемы переживает новый расцвет.

Классическими результатами о вложениях являются теоремы классификации (в коразмерности по крайней мере 3) узлов, зацеплений и вложений высокосвязных многообразий (Р. Пенроуз, Дж.Г.К. Уайтхед, К. Зиман, М. Ирвин, Дж. Левин, С.П. Новиков, Дж. Хадсон, А. Хефлигер, М. Хирш). Проблема классификации вложений считается очень трудной, поскольку других случаев, для которых было бы получено полное явное описание (непустого) множества вложений замкнутого многообразия с точностью до изотопии, до последнего времени[2] не было известно, несмотря на на наличие интересных подходов к данной проблеме[3].

В данной работе рассматривается главным образом случай *зацеплений*, то есть вложений несвязного объединения сфер (возможно, различной размерности) в сферу. При этом мы в основном концентрируемся на случае коразмерности по крайней мере 3.

Проблемы существования и классификации вложений являются частными случаями общей проблемы о существовании и классификации отображений *с заданными ограничениями на самопересечения*: погружений, син-

---

[1]Актуальные обзоры по данной теме можно найти в статьях: Д. Реповш и А. Скопенков, *Новые результаты о вложениях полиэдров и многообразий в евклидовы пространства*, Успехи математических наук **54:6** (1999), стр. 61–109, и A. Skopenkov, *Embedding and knotting of manifolds in Euclidean spaces, in*: *Surveys in Contemporary Mathematics, Ed. N. Young and Y. Choi*, London Math. Soc. Lect. Notes **347** (2007), p. 248–342, arXiv:math/0604045v1 [math.GT].

[2]Например, M. Cencelj, D. Repovs, M. Skopenkov, *Homotopy type of the complement to an immersion and classification of embeddings of tori*, Rus. Math. Surv. **62:5** (2007), p. 985–987, arXiv:0803.4285v1 [math.GT]; A. Skopenkov, *A new invariant and parametric connected sum of embeddings*, Fund. Math. **197** (2007), p. 253–269, arXiv:math/0509621 [math.GT]; A. Skopenkov, *A classification of smooth embeddings of 3-manifolds into 6-space*, Math. Z. **260** (2008), p. 647–672, arXiv:math/0603429v5 [math.GT].

[3]Например, W. Browder, *Embedding smooth manifolds*, Proc. Int. Congr. Math. Moscow **1966** (1968), 712–719; C.T.C. Wall, *Surgery on compact manifolds*, Academic Press, London (1970); T. Goodwillie, M. Weiss, *Embeddings from the point of view of immersion theory, II*, Geom. Topol. **3** (1999), 103–118.

гулярных зацеплений,почти вложений[4], а также вложений, аппроксимирующих данное отображение.

Эту общую проблему естественно изучать в совокупности с проблемой вложений, поскольку они используют близкие методы, например, *препятствие Ван Кампена* и его обобщения. Поэтому в настоящей работе рассматриваются не только вложения, но и сингулярные зацепления, почти вложения, а также вложения, аппроксимирующие данное отображение.

Сингулярные зацепления были введены Р. Фоксом и Дж. Милнором. Инвариант Масси–Рольфсена сингулярных зацеплений (обобщение препятствия Ван Кампена) применялся в работах У. Кайзера, У. Кошорке, У.С. Масси, Дж.П. Скотта, Д. Рольфсена и Н. Хабеггера[5].

Проблема *аппроксимируемости вложениями* отображений графов возникла при исследовании вложимости компактов в плоскость. Эта проблема изучалась в работах П.М. Ахметьева, С.А. Мелихова, П. Минца, М.А. Штанько, Е.В. Щепина.

В диссертации рассматриваются, в частности, такие разделы теории зацеплений, как теория оснащенных зацеплений и рамсеевская теория зацеплений.

Оснащенные зацепления были введены Л.С. Понтрягиным при исследовании гомотопической классификации отображений. Классификация многомерных оснащенных зацеплений — это знаменитая проблема, равносильная вычислению гомотопических групп сфер. Проблема классификации одномерных оснащенных зацеплений изучалась в работах В.Т. Ву, Р. Гомпфа, У. Кайзера, Н. Стинрода, Х. Хопфа.

Теория Рамсея для зацеплений берет свое начало в работах Дж. Конвея, К. Гордона и Х. Закса. Она естественным образом обобщает теорию вложимости полиэдров в евклидовы пространства. Эта теория получила развитие в работах А.О. Ловаша, Дж. Сегала, С. Спеша, Н. Робертсона, П.П. Сеймора, Р. Томаса, С. Негами.

Цель работы.

Целью работы является

[4]M. H. Freedman, V. S. Krushkal and P. Teichner, *Van Kampen's embedding obstruction is incomplete for 2-complexes in* $\mathbb{R}^4$, Math. Res. Letters **1** (1994), p. 167–176.

[5]Например, U. Koschorke, *On link maps and their homotopy classification*, Math. Ann. **286:4** (1990), p. 753–782; N. Habegger, U. Kaiser, *Link homotopy in the 2-metastable range*, Topol. **37:1** (1998), p. 75–94.

1. Создание подхода к классификации зацеплений и сингулярных зацеплений, основанного на использовании операции надстройки;
2. Создание подхода к классификации оснащенных зацеплений, основанного на известном геометрическом построении характеристических классов;
3. Применение рамсеевской теории зацеплений к проблеме вложимости полиэдров;
4. Развитие подходов Минца и Ван Кампена к проблеме аппроксимации отображений вложениями.

Структура и объем диссертации.

Диссертационная работа изложена на 85 страницах и состоит из 5 глав. Библиография включает 86 наименований.

Научная новизна.

Основные результаты диссертации состоят в следующем:

1. Простое доказательство и усиление формулы Хэфлигера для группы зацеплений (и формулы Хабеггера–Кайзера для группы сингулярных зацеплений);
2. Простое доказательство теоремы Понтрягина–Стинрода–Ву о классификации оснащенных зацеплений в многообразиях;
3. Развитие рамсеевской теории зацеплений и ее применение — доказательство гипотезы Менгера 1929 года о том, что произведение N копий полного графа на 5 вершинах не вложимо в евклидово пространство размерности 2N;
4. Доказательство гипотезы Кавичиолли–Реповша–Скопенкова 1998 года о полноте препятствия Ван Кампена к аппроксимируемости вложениями путей на плоскости.

Первый и второй из указанных результатов являются известными, но подходы к их доказательству являются новыми и содержат новые идеи. Третий и четвертый из указанных результатов являются новыми.

Основные методы исследования.

При решении данных классификационных задач мы пользуемся методами геометрической и алгебраической топологии.

Теоретическая и практическая ценность работы.

Диссертация имеет теоретический характер. Полученные в диссертации результаты представляют интерес для алгебраической и геометрической топологии, теории графов.

Апробация работы.

Результаты диссертации докладывались на следующих научно-исследовательских семинарах и международных конференциях.

1. Семинар кафедры Дифференциальной геометрии и приложений под руководством академика РАН А.Т. Фоменко, мех-мат МГУ, 2006 и 2008 г. Доклады: ”Классификация зацеплений в 2-метастабильной размерности”, ”Многомерная гипотеза Пуанкаре и сингулярные зацепления”.

2. Семинар ”Современные геометрические методы” под руководством академика РАН А.Т. Фоменко, проф. А.В. Болсинова, проф. А.С. Мищенко, доц. А.А. Ошемкова, доц. Е.А.Кудрявцевой (2003).

3. Семинар ”Алгебраическая топология и ее приложения” имени М.М. Постникова под руководством члена-корреспондента РАН В.М. Бухштабера, проф. А.В. Чернавского, доц. Л.А. Алании, доц. И.А. Дынникова, доц. Т.Е. Панова, мех-мат МГУ, 2008 г. Доклады: ”Многомерные зацепления и сингулярные зацепления”, ”Когда множество зацеплений конечно?”.

4. Семинар в Математическом Институте имени В.А. Стеклова РАН под руководством д.ф.-м.н. П.М. Ахметьева, проф. А.Н. Дранишникова и проф. Е.В. Щепина (2001).

5. Семинар ”Узлы и дискриминанты” в Независимом Московском Университете под руководством академика РАН В.А. Васильева (2003);

6. Семинар ”Oberseminar Topologie” под руководством У. Кошорке, Universität Siegen, 2004 г. Доклад: ”Einbettungen von Produkten von Graphen in den euklidischen Raum”.

7. Семинар ”Oberseminar Geometrie” под руководством А. Бобенко, Technische Universität Berlin, 2004. Доклад ”Knotted graphs and embedding of graph products”.

8. Семинар под руководством проф. В. Метцлера и проф. Ц. Хог-Анжелони, Frankfurt Universität, 2007. Доклад ”A product of two nonplanar graphs is not embeddable into the 4-space”.

9. Семинар под руководством Г. Лауреса, Ruhr Universität Bochum, 2004, 2007 и 2008.

10. Международная конференция ”Knots in Poland 2003: The mini-semester on Knot Theory and its Ramifications”, Варшава, 2003. Доклад ”Embedding products of graphs into Euclidean spaces”.

11. Международная конференция ”Geometric topology, discrete geometry and set theory”, посвящённая 100-летию со дня рождения Л.В. Келдыш, Москва, 2004. Доклад ”Embedding products of graphs into Euclidean spaces”.

12. Международная конференция ”Топология, анализ и приложения в математической физике”, посвященная памяти профессора Ю.П. Соловьева, Москва, 2005. Доклад: ”On approximability by embeddings of cycles in the plane”.

13. Международная конференция ”Algebraic topology: old and new. M.M. Postnikov memorial conference”, Бедлево (Польша), 2007. Доклад: ”A formula for the group of links in the 2-metastable dimension”.

14. Международная конференция ”The algebra and geometry around knots and braids”, Санкт-Петербург, 2007. Доклад: ”A formula for the group of links in the 2-metastable dimension”.

15. One-day conference in honor of Alexey Sossinsky (on the occasion of being decorated by the French order of ”Palmes Academiques”), Москва, 2007. Доклад ”Многомерные зацепления и гипотеза Пуанкаре”.

16. Международная конференция "Фундаментальная математика в работах молодых ученых" (юбилейная конференция победителей Конкурса Мёбиуса), Москва, 2007. Доклад "О зацеплениях и сингулярных зацеплениях".

17. Международная конференция "Дифференциальные уравнения и топология, посвящённая 100-летию со дня рождения Л.С. Понтрягина", Москва, 2008. Доклад: "On the Pontryagin theorem on the classification of framed links".

Публикации автора по теме диссертации.

Основное содержание диссертации опубликовано в пяти работах, список которых приведен в конце автореферата [1–5].

Краткое содержание работы

Полиэдром называется топологическое пространство, которое можно представить в виде конечного симплициального комплекса. Полиэдр N называется кусочно-линейно *вложимым* в кусочно-линейное многообразие M, если существует кусочно-линейное инъективное отображение $f : N \to M$. Гладкое компактное многообразие N называется гладко *вложимым* в гладкое многообразие M, если существует гладкое инъективное отображение $f : N \to M$, дифференциал которого df невырожден в каждой точке. Такое отображение f называется *вложением* N в M (в соответствующей категории). Два кусочно-линейных вложения $f, g : N \to M$ называются кусочно-линейно (объемлемо) *изотопными*, если существует такой кусочно-линейный гомеоморфизм на $F : M \times I \to M \times I$, что

1. $F(y, 0) = (y, 0)$ для любого $y \in M$,
2. $F(f(x), 1) = (g(x), 1)$ для любого $x \in N$, и
3. $F(M \times \{t\}) = M \times \{t\}$ для любого $t \in I$.

Аналогично определяются *гладко* (объемлемо) *изотопные* вложения.

Глава 1. Введение и основные результаты

В первой главе диссертации приводятся необходимые определения, мотивировки и формулируются основные результаты работы. Содержание первого пункта главы 1 отражено в пунктах "актуальность темы", "цель работы" и "научная новизна" выше.

Многомерные зацепления и сингулярные зацепления

Большинство теорем о вложениях сводит решение проблем вложимости и изотопии к алгебраическим задачам. Проделать конкретные вычисления для этих алгебраических задач зачастую непросто. В этом пункте диссертации приводится большинство известных "явных" результатов о двухкомпонентных сферических зацеплениях и сингулярных зацеплениях в коразмерности больше двух.

Обозначим через $L^m_{p,q}$ множество гладких вложений $S^p \sqcup S^q \to S^m$ с точностью до гладкой изотопии. Обозначим через C^{m-p}_p множество гладких вложений $S^p \to S^m$ с точностью до гладкой изотопии. При $p, q \leq m-3$ эти множества — абелевы группы относительно операции "покомпонентной связной суммы"[6].

Теорема 1.2.1[7]. *Если* $p \leq q \leq m-3$ *и* $2p + 2q \leq 3m - 6$, *то*

$$L^m_{p,q} \cong \pi_p(S^{m-q-1}) \oplus \pi_{p+q+2-m}(V_{M+m-p-1,M}) \oplus C^{m-p}_p \oplus C^{m-q}_q.$$

Здесь $V_{M+l,M}$ — *многообразие Штифеля* M-реперов в начале координат пространства $\mathbb{R}^{M+l}$, где число M достаточно велико. Многие группы $\pi_n(V_{M+l,M})$ и C^{m-p}_p явно вычислены[8]. Теорема 1.2.1 была доказана Хефлигером[9] (при более сильном ограничении $p \leq q$ и $p + 3q \leq 3m - 7$).

Сингулярное зацепление — это непрерывное отображение $f : X \sqcup Y \to Z$ такое, что $fX \cap fY = \emptyset$. *Сингулярная гомотопия* — это непрерывное семейство сингулярных зацеплений $f_t : X \sqcup Y \to Z$. Обозначим через $LM^m_{p,q}$ множество сингулярных зацеплений $S^p \sqcup S^q \to S^m$ с точностью до

---

[6] A. Haefliger, *Differentiable embeddings of S^n in S^{n+q} for $q > 2$*, Ann. Math., Ser.3 **83** (1966) p. 402–436.

[7] http://www.ams.org/proc/2009-137-01/S0002-9939-08-09455-0/home.html.

[8] A. Haefliger, *Differentiable embeddings of S^n in S^{n+q} for $q > 2$*, Ann. Math., Ser.3 **83** (1966) p. 402–436; R. J. Milgram, E. Rees, *On the normal bundle to an embedding*, Topology **10** (1971), p. 299–308; G.F. Paechter, *The groups $\pi_r(V_{n,m})$*, Quart. J. Math. Oxford, Ser. 2, **7** (1956), p. 249–268.

[9] A. Haefliger, *Enlacements de spheres en codimension superiure a 2*, Comm. Math. Helv. **41** (1966-67), p. 51–72 (in French).

сингулярной гомотопии. При $p, q \leq m-3$ это множество — коммутативная группа относительно операции "покомпонентной связной суммы"[10].

Теорема 1.2.3 (У. Кайзер, Н. Хабеггер)**.** *Если* $p, q \leq m-3$ *и* $2p+2q \leq 3m-5$*, то*

$$LM^m_{p,q} \cong \pi^S_{p+q-m+1}.$$

Новый подход к классификации зацеплений и сингулярных зацеплений основан на использовании *отображения надстройки* $\Sigma : LM^m_{p,q} \to LM^{m+1}_{p+1,q}$. Это отображение сопоставляет сингулярному зацеплению $f_1 \sqcup f_2 : S^p \sqcup S^q \to S^m$ сингулярное зацепление $f'_1 \sqcup f'_2 : S^{p+1} \sqcup S^q \to S^{m+1}$, где $f'_1 : S^{p+1} \to S^{m+1}$ — надстройка отображения $f_1 : S^p \to S^m$, а $f'_2 : S^q \to S^{m+1}$ — композиция отображения $f_2 : S^q \to S^m$ и включения $S^m \subset S^{m+1}$.

Теорема 1.2.4 (Теорема о надстройке для сингулярных зацеплений)**.** *Если* $p, q \leq m-3$*, то отображение надстройки биективно при* $2p+2q \leq 3m-5$ *и сюръективно при* $2p+2q \leq 3m-4$*.*

Подход основан на прямом доказательстве данной теоремы, из которой следуют приведенные выше формулы для групп зацеплений и сингулярных зацеплений.

Классификация оснащенных зацеплений в многообразиях

В этом пункте приводится мотивировка исследования оснащенных зацеплений в многообразиях и их классификация.

Пусть M — связное ориентированное замкнутое гладкое n-мерное многообразие. Обозначим через $L_1(M)$ множество 1-мерных оснащенных зацеплений в многообразии M с точностью до оснащенного кобордизма. *Степенью* $\deg L$ оснащенного зацепления L называется гомологический класс (с целыми коэффициентами) естественно ориентированного зацепления L.

Теорема 1.3.1 (Л.С. Понтрягин, Н. Стинрод, В.Т. Ву)**.** *Пусть* M *— связное ориентируемое замкнутое гладкое* n*-мерное многообразие,* $n \geq 4$*. Тогда* $\deg : L_1(M) \to H_1(M;\mathbb{Z})$ *является*

1-1 отображением (то есть биекцией), если $w_2(M) \cdot \rho_2 H_2(M;\mathbb{Z}) \neq 0$*;*

2-1 отображением (то есть каждый элемент группы $H_1(M;\mathbb{Z})$ *имеет ровно* 2 *прообраза) — иначе.*

[10] U. Koschorke, *Link maps and the geometry of their invariants*, Manuscripta Math. **61:4** (1988), p. 383–415; С. Мелихов, *Сингулярная конкордантность влечет сингулярную гомотопию в коразмерности* ≥ 3, Успехи математических наук **55:3** (2000), стр. 183–184.

Здесь $w_2(M)$ — класс Штифеля-Уитни и $\rho_2 : H_1(M;\mathbb{Z}) \to H_1(M;\mathbb{Z}_2)$ — приведение по модулю 2.

Теорема 1.3.2 (Л.С. Понтрягин). *Пусть M^3 — связное ориентируемое замкнутое гладкое 3-мерное многообразие. Тогда для каждого элемента $\alpha \in H_1(M^3;\mathbb{Z})$ имеется взаимно-однозначное соответствие между множествами $\deg^{-1}\alpha$ и $\mathbb{Z}_{2d(\alpha)}$, где $d(\alpha)$ — делимость проекции элемента α на свободную часть группы $H_1(M^3;\mathbb{Z})$.*

Теория Рамсея для зацеплений и вложимость произведений графов

В этом пункте рассказывается о некоторых результатах рамсеевской теории зацеплений и приводится ее применение к проблеме вложимости полиэдров. Мы пишем $K \hookrightarrow \mathbb{R}^d$, если полиэдр K кусочно линейно вкладывается в $\mathbb{R}^d$.

Теорема 1.4.1 (Критерий вложимости произведения графов). *Пусть G_1, …, G_n — связные графы, отличные от точки, I и S^1. Минимальная размерность, такая что $G_1 \times \dots \times G_n \times (S^1)^s \times I^i \hookrightarrow \mathbb{R}^d$, равна*

$$d = \begin{cases} 2n+s+i, & \text{если } i \neq 0 \text{ или некоторый граф } G_k \text{ планарен}, \quad (1) \\ 2n+s+1, & \text{иначе}. \quad (2) \end{cases}$$

Данная теорема дает, в частности, доказательство гипотезы Менгера[11] 1929 года о том, что N-я степень полного графа на 5 вершинах не вложима в $\mathbb{R}^{2N}$.

Доказательство основано на сведении к следующей теореме рамсеевской теории зацеплений:

Лемма 1.4.2. *У любого вложения в $\mathbb{R}^{2n-1}$ джойна n экземпляров пространства, являющегося несвязным объединением 4 точек, есть пара зацепленных $(n-1)$-мерных сфер.*

Препятствие Ван Кампена и аппроксимируемость путей вложениями

В данном пункте приводятся мотивировка проблемы аппроксимации отображений вложениями и критерии аппроксимируемости вложениями путей и циклов на плоскости.

[11] K. Menger, *Über plättbare Dreiergraphen und Potenzen nicht plättbarer Graphen*, Ergebnisse Math. Kolloq. **2** (1929), p. 30–31.

Кусочно-линейное отображение $\varphi : K \to \mathbb{R}^2$ графа K в плоскость *аппроксимируется вложениями,* если для каждого $\varepsilon > 0$ существует отображение $f : K \to \mathbb{R}^2$ без самопересечений, ε-близкое к φ.

Для любого симплициального пути или цикла на плоскости вводится некоторое естественное понятие его *производной*, принадлежашее Минцу[12]. В терминах этого понятия формулируются следующие критерии.

Теорема 1.5.3. *I) (Минц) Пусть $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ — кусочно линейное отображение, являющееся симплициальным для некоторой триангуляции отрезка I с k вершинами. Отображение φ аппроксимируется вложениями если и только если для каждого $i = 0, \dots, k$ его i-я производная $\varphi^{(i)}$ не содержит трансверсальных самопересечений.*

S) Пусть $\varphi : S^1 \to \mathbb{R}^2$ — кусочно линейное отображение, являющееся симплициальным для некоторой триангуляции окружности S^1 с k вершинами. Отображение φ аппроксимируется вложениями если и только если для каждого $i = 0, \dots, k$ его i-я производная $\varphi^{(i)}$ не содержит трансверсальных самопересечений, и при этом не является стандартной намоткой степени $d \notin \{-1, 0, 1\}$.

Следствие 1.5.4. *Кусочно линейное отображение $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ аппроксимируется вложениями если и только если выполнено любое из следующих двух эквивалентных условий:*

D) (свойство взрезанного произведения) Существует отображение

$$\{(x, y) \in I \times I : x \neq y\} \to S^1,$$

такое что его ограничение на множество $\{(x, y) \in I \times I : \varphi x \neq \varphi y\}$ гомотопно отображению, заданному формулой $\tilde{\varphi}(x, y) = \frac{\varphi x - \varphi y}{\|\varphi x - \varphi y\|}$;

V) препятствие ван Кампена (определенное в §2 главы 5) $v(\varphi) = 0$.

В конце пункта формулируются некоторые открытые вопросы.

В завершение главы 1 приводятся соглашения, которые используются в работе, и список обозначений.

Глава 2. Классификация зацеплений и сингулярных зацеплений

Вторая глава посвящена классификации зацеплений и сингулярных зацеплений, основанной на использовании операции надстройки. Сначала полу-

[12] P. Minc, *Embedding simplicial arcs into the plane*, Topol. Proc. **22** (1997), p. 305–340.

чается классификация сингулярных зацеплений, а потом из нее выводится классификация зацеплений.

Классификация сингулярных зацеплений

План данного пункта следующий. Сначала доказывается сюръективность в теореме о надстройке для сингулярных зацеплений в случае $p \le q$. Затем доказывается аналогичным образом инъективность в случае $p \le q$, и, наконец, случай $p > q$ теоремы о надстройке выводится из случая $p \le q$.

Для доказательства сюръективности вводится понятие *стандартизованного* сингулярного зацепления и доказывается следующая лемма.

Лемма 2.1.2. *Пусть* $p \le q+1$, $p \le m-3$ *и* $2p+2q \le 3m-5$; *тогда любое сингулярное зацепление* $f : S^p \sqcup S^q \to S^m$ *сингулярно гомотопно стандартизованному сингулярному зацеплению.*

Из данной леммы выводится сюръективность отображения надстройки в случае $p \le q$ с помощью конической конструкции. Данная лемма доказывается с помощью метода поглощения и варианта трюка Александера. Инъективность отображения надстройки в случае $p \le q$ доказывается с помощью относительной версии этой леммы. Теорема о надстройке в случае $p > q$ доказывается с помощью итерирования отображения надстройки.

Классификация зацеплений

Формула Хефлигера доказывается следующим образом. Сначала доказывается теорема о надстройке для зацеплений, сводящая классификацию зацеплений к классификации *дисковых сингулярных зацеплений.* Потом группа дисковых сингулярных зацеплений упрощается, и затем вычисляется с помощью классификации (сферических) сингулярных зацеплений. В данном пункте работа происходит в гладкой категории.

Глава 3. Классификация оснащенных зацеплений в многообразиях

Третья глава посвящена подходу к классификации оснащенных зацеплений, основанному на геометрическом построении характеристических классов. В данной главе работа происходит в гладкой категории.

Оснащенные зацепления в многообразиях размерности не менее 4

В данном пункте приводится геометрическое построение классов Штифеля–Уитни и доказывается теорема Понтрягина–Стинрода–Ву.

Фольклорное геометрическое построение классов Штифеля–Уитни состоит в следующем. Рассмотрим систему s касательных векторных полей общего положения на M. Пусть $\Sigma \subset M$ — множество точек, в которых данные векторные поля линейно зависимы. По трансверсальности Σ является псевдомногообразием в M (то есть, неформально говоря, многообразием с особенностями в коразмерности 2). *Класс Штифеля–Уитни* $w_{n+2-s}(L) \in H_{s-1}(M;\mathbb{Z}_2)$ — это гомологический класс псевдомногообразия Σ.

Для доказательства теоремы Понтрягина–Стинрода–Ву для каждого $\alpha \in H_1(M;\mathbb{Z})$ строится инвариант $\deg^{-1}\alpha \to \mathbb{Z}_2$ и выясняется, является ли он биективным. Построение этого инварианта аналогично приведенному геометрическому построению классов Штифеля-Уитни.

Оснащенные зацепления в многообразиях размерности 3

В данном пункте приводится геометрическое построение класса Эйлера и доказывается теорема Понтрягина. Известное геометрическое построение класса Эйлера аналогично приведенному выше геометрическому построению классов Штифеля–Уитни.

Для доказательства теоремы Понтрягина для каждого $\alpha \in H_1(M;\mathbb{Z})$ строится инвариант $\deg^{-1}\alpha \to \mathbb{Z}$. Данный инвариант оказывается определен корректно только по модулю удвоенной делимости элемента α. С помощью фольклорной формулы для класса Эйлера, доказывается, что приведение построенного инварианта по указанному модулю является биекцией.

Глава 4. Рамсеевская теория зацеплений и вложимость произведений графов

Четвертая глава посвящена развитию рамсеевской теории зацеплений и ее применению к доказательству критерия вложимости произведения графов. В данной главе работа происходит в кусочно линейной категории.

Доказательство для случая (1) и некоторые эвристические рассмотрения

В данном пункте рассматривается простой случай (1) критерия вложимости, а также несколько примеров, иллюстрирующих основные идеи доказательства сложного случая. Данный пункт не содержит новых результатов (хотя для доказательства примеров используются новые подходы).

Доказательство невложимости в случае (2)

В данном пункте разбирается сложный случай (2) критерия вложимости. Сначала этот случай сводится к гипотезе Менгера. Затем гипотеза Менгера сводится к задаче рамсеевской теории зацеплений. Наконец, эта задача решается с помощью идеи препятствия Ван Кампена.

Глава 5. Препятствие Ван Кампена и аппроксимируемость вложениями

Пятая глава посвящена развитию подхода Минца и применению препятствия Ван Кампена к проблеме аппроксимации отображений вложениями. Доказывается критерий аппроксимируемости вложениями, обобщающий критерий Минца, и из него выводится гипотеза Кавичиолли–Реповша–Скопенкова[13].

Доказательство критерия аппроксимируемости вложениями

В данном пункте доказывается критерий аппроксимируемости вложениями, обобщающий критерий Минца. Для этого изучается связь операции дифференцирования кусочно-линейных путей и циклов с аппроксимируемостью этих путей и циклов вложениями.

Препятствие Ван Кампена

В данном пункте приводится определение препятствия Ван Кампена к аппроксимируемости вложениями кусочно линейных путей на плоскости и доказывается его полнота. Доказывается также, что в рассматриваемом

[13]A. Cavicchioli, D. Repovš and A. B. Skopenkov, *Open problems on graphs, arising from geometric topology*, Topol. Appl. **84** (1998), p. 207–226.

случае критерии Ван Кампена и взрезанного квадрата эквиваленты. Приводится пример, показывающий, что аналоги приведенных критериев аппроксимируемости вложениями не сохраняют свою силу для аппроксимируемости сингулярными зацеплениями.

Благодарности.

Автор выражает глубокую благодарность своему первому учителю профессору $\boxed{\text{Юрию Петровичу Соловьёву}}$ и научному руководителю профессору Аркадию Борисовичу Скопенкову за постановки задач и постоянное внимание к работе. Автор благодарен д.ф.-м.н., профессорам П.М. Ахметьеву, А.В. Болсинову, У. Кайзеру, У. Кошорке, Г. Лауресу, В.М. Нежинскому, Д. Реповшу, Ф. Спаджиари, Дж. Сташефу и М. Ценцелю, и к.ф.-м.н., доцентам Л.А. Алании, С.А. Мелихову за полезные обсуждения. Автор также признателен всему коллективу кафедры дифференциальной геометрии и приложений за теплую творческую атмосферу. Данная диссертация поддержана грантом ИНТАС 06-1000014-6277. Автор также благодарит за предоставление грантов Российский Фонд Фундаментальных Исследований и фонд поддержки молодых ученых "Конкурс Мёбиуса".

Работы автора по теме диссертации

[1] M. Skopenkov, *Embedding products of graphs into Euclidean spaces*, Fundamenta Mathematicae **179** (2003), 191–197. Перевод на русский язык: arXiv:0808.1199v1 [math.GT].

[2] M. Skopenkov, *On approximability by embeddings of cycles in the plane*, Topology and Its Applications **134:1** (2003), 1–22. Перевод на русский язык (§§1–3): arXiv:0808.1187v1 [math.GT].

[3] D. Repovš, M. Skopenkov and F. Spaggiari, *On the Pontryagin–Steenrod–Wu theorem*, Israel Journal of Mathematics **145** (2005), 341–348. Перевод на русский язык: arXiv:0808.1209v1 [math.GT].

М. Скопенкову принадлежит доказательство Теоремы 1.a по модулю геометрического определения классов Штифеля-Уитни.

[4] M. Cencelj, D. Repovš and M. Skopenkov, *Classification of framed links in 3–manifolds*, Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.) **117:3** (2007), 301–306. arXiv:0705.4166v2 [math.GT].

М. Скопенкову принадлежит доказательство Теоремы 1 по модулю геометрического определения класса Эйлера и Леммы 3.

[5] М. Скопенков, *О зацеплениях и сингулярных зацеплениях*, Фундаментальная математика в работах молодых ученых, Юбилейная конференция победителей конкурса Мёбиуса прошлых лет, Москва, 2007, 7–8. arXiv:math/0610320v2 [math.GT].