Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 512.643+512.552

Гутерман Александр Эмилевич

ФРОБЕНИУСОВЫ ЭНДОМОРФИЗМЫ ПРОСТРАНСТВ МАТРИЦ

01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва, 2008

Работа выполнена на кафедре Высшей алгебры Механико-Математического факультета Московского Государственного Университета имени М. В. Ломоносова.

Научный консультант:	доктор физико-математических наук, профессор Михалев Александр Васильевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Кожухов Игорь Борисович
	доктор физико-математических наук, профессор Туганбаев Аскар Аканович
	доктор физико-математических наук, чл.-корр. РАН, профессор Тыртышников Евгений Евгеньевич
Ведущая организация:	Московский Педагогический Государственный Университет

Защита диссертации состоится 20 марта 2009 г. в 16 ч. 45 мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском Государственном Университете имени М. В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова, Механико-Математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-Математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 20 февраля 2009 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д.501.001.84 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор

А. О. Иванов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования

Исторический обзор. Задачи характеризации фробениусовых эндоморфизмов пространств матриц, т.е. отображений, сохраняющих матричные свойства или инварианты, постоянно возникают как в качестве естественных алгебраических задач, так и в связи с различными приложениями. Не случайно, в последнее время происходит особенно бурное развитие этой теории.

Отображение $T : M_n(R) \to M_n(R)$ матриц фиксированного порядка n над кольцом R называется фробениусовым эндоморфизмом для некоторого свойства $\mathcal{P}$ (говорят еще, что T сохраняет свойство $\mathcal{P}$), если из условия: матрица A обладает свойством $\mathcal{P}$ следует, что ее образ — матрица $T(A)$ — также обладает свойством $\mathcal{P}$. Оказывается, что зачастую этой информации совместно с некоторыми данными об отображении T, например, линейность или сюръективность, достаточно для полной характеризации отображения T. Разработка вопроса характеризации фробениусовых эндоморфизмов, сохраняющих матричные инварианты, является основным предметом исследования данной диссертационной работы.

Изучение фробениусовых эндоморфизмов восходит к следующему вопросу, который поставил Дедекинд[1] в 1880. Пусть G — конечная группа порядка n. Рассмотрим конечное множество независимых попарно коммутирующих переменных $\{x_g\}_{g\in G}$. Групповой матрицей группы G называется квадратная матрица X_G порядка n, столбцы и строки которой заиндексированы элементами группы G так, что (g, h)-тый элемент матрицы есть $x_{gh^{-1}}$. Определитель матрицы X_G — это однородный многочлен степени n от переменных $\{x_g\}_{g\in G}$. Дедекинд назвал этот многочлен групповым определителем и установил, что если G — абелева группа, то ее групповой определитель раскладывается в произведение линейных множителей над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Более того, коэффициент при переменной x_g в каждом линейном множителе совпадает со значением группового характера на элементе $g \in G$. Например, если $G = \mathbb{Z}_3$ — циклическая группа порядка 3, то ее групповая матрица имеет вид

$$\begin{array}{c|ccc} \mathbb{Z}_3 & e & a & a^2 \\ & x & y & z \\ \hline e & x & y & z \\ a & z & x & y \\ a^2 & y & z & x \end{array}$$

Таблица характеров для группы $\mathbb{Z}_3$ такова:

[1] R. Dedekind, Gesammelte Mathematische Werke. II // Chelsea, New York, 1969.

$\mathbb{Z}_3$	e	a	a^2
χ_1	1	1	1
χ_2	1	ε	ε^2
χ_3	1	ε^2	ε

здесь $\varepsilon = e^{2\pi i/3}$. Разложение для группового определителя выглядит следующим образом:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix} = (x+y+z)(x+\varepsilon y+\varepsilon^2 z)(x+\varepsilon^2 y+\varepsilon z) \ .$$

Откуда видно, что любая строка таблицы характеров группы $\mathbb{Z}_3$ определяется однозначно по соответствующему множителю в разложении для группового определителя.

Для некоторых некоммутативных групп, в частности, для симметрической группы третьего порядка S_3, и для группы кватернионов Q_8, Дедекинд также разложил их групповые определители в произведение неприводимых множителей, среди которых были уже нелинейные. Однако общая ситуация оставалась неясной и Дедекинд поставил вопрос о разложении для группового определителя конечной неабелевой группы в произведение неприводимых множителей. Работая над этой проблемой, Фробениус создал несколько новых плодотворных теорий: одной из них была теория представлений конечных групп, а другой — теория линейных отображений, сохраняющих матричные инварианты, которой посвящена данная работа. В качестве приложения своих идей Фробениусу[2] удалось полностью решить проблему Дедекинда.

Фробениус доказал, что групповой определитель конечной группы G разлагается над полем комплексных чисел в произведение вида $P_1^{i_1} \cdots P_k^{i_k}$, где многочлены P_j, $j = 1, \ldots, k$, — неприводимы и $i_j = \deg(P_j)$, $j = 1, \ldots, k$, т. е. кратность вхождения каждого неприводимого многочлена в разложение совпадает со степенью этого многочлена. Более того, любой неприводимый многочлен в этом разложении соответствует некоторому неприводимому представлению группы G, и размерность этого представления совпадает со степенью соответствующего неприводимого многочлена. Для того, чтобы установить, что класс эквивалентных представлений соответствует единому множителю в разложении для группового определителя, Фробениусу понадобилось охарактеризовать биективные линейные преобразования, сохраняющие определитель матриц над полем комплексных чисел. Легко видеть, что транспонирование и подобие являются фробениусовыми эндоморфизмами для определителя. Определим на основе этих двух примеров следующий класс стандартных преобразований.

[2] G. Frobenius, Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen, Sitzungsber. Berlin: Preuss. Akad. Wiss. Berlin, 1897, 994-1015. (Г. Фробениус, Теория характеров и представлений групп // Перевод с нем. под ред. А.К.Сушкевича. Харьков: Гос. науч. техн. изд. Украины, 1937, 106-127.)

Пусть $M_{m,n}(R)$ обозначает множество матриц порядка $m \times n$ с кольцом коэффициентов R. В случае, когда $m = n$, $M_n(R)$ обозначает пространство квадратных матриц $M_{n,n}(R)$, $GL_n(R)$ обозначает группу обратимых матриц.

Определение 1. Линейное преобразование $T : M_{m,n}(\mathbb{F}) \to M_{m,n}(\mathbb{F})$ называется стандартным, если оно представимо в следующем виде: найдутся матрицы $P \in GL_m(\mathbb{F})$, $Q \in GL_n(\mathbb{F})$ такие, что $T(X) = PXQ$ для всех матриц $X \in M_{m,n}(\mathbb{F})$. В случае $m = n$ преобразование $T(X) = P(X^t)Q$ для всех $X \in M_n(\mathbb{F})$, где X^t обозначает транспонированную матрицу, тоже называется стандартным.

Следующая теорема Фробениуса 1897г. дает полную характеризацию линейных отображений, сохраняющих определитель.

Теорема 2. [Фробениус[2]] *Пусть $T : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ — биективное линейное преобразование, для которого $\det T(X) = \det X$ для всех матриц $X \in M_n(\mathbb{C})$. Тогда преобразование T стандартно и $\det(PQ) = 1$.*

В 1925г. Шур[3] обобщил теорему Фробениуса: он заменил условие инвариантности определителя на условие инвариантности всех миноров некоторого фиксированного порядка r. Приведем формулировку его теоремы, принадлежащую Маркусу и Мэю[4]. Для произвольной матрицы $X \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ рассматривается r-ая матрица дополнений $C_r(X) \in M_{\binom{m}{r},\binom{n}{r}}(\mathbb{C})$, состоящая из миноров матрицы X порядка r, упорядоченных лексикографически по строкам и столбцам.

Теорема 3. [Шур[3,4]] *Пусть $T : M_{mn}(\mathbb{C}) \to M_{mn}(\mathbb{C})$ — биективное линейное преобразование. Для заданного параметра r, $2 \le r \le \min\{m, n\}$, предположим, что существует такое биективное линейное преобразование $S : M_{\binom{m}{r},\binom{n}{r}}(\mathbb{C}) \to M_{\binom{m}{r},\binom{n}{r}}(\mathbb{C})$, что для любой матрицы $X \in M_{m,n}(\mathbb{C})$*

$$C_r(T(X)) = S(C_r(X)) \ .$$

Тогда преобразование T стандартное.

Теорема Фробениуса имела сложное комбинаторное доказательство. В 1949г. Дьедонне[5] предложил новый подход к классификации фробениусовых эндоморфизмов, базирующийся на основной теореме проективной геометрии. Дьедонне получил стандартную характеризацию биективных линейных отображений, сохраняющих вырожденные матрицы над произвольным полем.

Теорема 4. [Дьедонне[5]] *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле и T — обратимое линейное отображение на $M_n(\mathbb{F})$, удовлетворяющее условию: из $\det X = 0$ следует $\det T(X) = 0$. Тогда отображение T стандартно.*

---

[3] I. Schur, Einige Bemerkungen zur Determinantentheorie // Akad. Wiss. Berlin, S.-Ber. Preuß. (1925), 454–463.

[4] M. Marcus, F. May, On a theorem of I. Schur concerning matrix transformations // Archiv der Mathematik. **11** (1960) 27-30.

[5] J. Dieudonné, Sur une généralisation du groupe orthogonal à quatre variables // Arch. Math. **1** (1949), 282–287.

Е.Б. Дынкин[6] получил теорему Фробениуса и серию связанных с ней результатов в качестве следствия своей классификации максимальных подгрупп классических групп. В основе этого метода лежит следующее построение. Пусть $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики. Стандартные линейные преобразования образуют подгруппу $\mathrm{St}_n(\mathbb{F})$ в группе $GL_{n^2}(\mathbb{F})$ всех обратимых линейных преобразований пространства матриц. Группа $\mathrm{St}_n(\mathbb{F})$ имеет структуру сплетения $\mathrm{St}_n(\mathbb{F}) \cong GL_n(\mathbb{F})\, Wr\, \mathbb{Z}_2$, где $\mathbb{Z}_2$ — группа, порожденная транспонированием. Для данного подмножества $S \subseteq M_n(\mathbb{F})$ обозначим через $\mathrm{Fix}\, S$ множество всех линейных отображений T, оставляющих множество S инвариантным, т. е. $T(S) \subseteq S$. Легко видеть, что множество $\mathrm{Fix}\, S$ имеет структуру моноида по отношению к операции композиции. В общем случае, моноид $\mathrm{Fix}\, S$ не является подгруппой в $GL_{n^2}(\mathbb{F})$, так как включение $T(S) \subseteq S$ не обязательно влечет равенство $T(S) = S$. Однако, Д. Диксоном, см. например обзор[7], было показано, что в случае алгебраического подмножества $S \subseteq M_n(\mathbb{F})$ отображение T действует на S сюръективно. Следовательно, в этом случае, моноид $\mathrm{Fix}\, S$ имеет структуру группы. Таким образом, классификация линейных отображений, сохраняющих множество S может быть сведена к анализу башни подгрупп $\mathrm{St}_n(\mathbb{F}) \subseteq \mathrm{Fix}\, S \subseteq GL_n(\mathbb{F})$. Теперь, с помощью списка всех таких подгрупп G, что $\mathrm{St}_n(\mathbb{F}) \subseteq G \subseteq GL_n(\mathbb{F})$, т. е. с использованием классификации Дынкина, нетрудно дать ответ на следующие вопросы:

- Пусть S — фиксированное подмножество в $M_n(\mathbb{F})$ и T — биективное линейное отображение, взаимооднозначное на S. Какая именно группа G из списка совпадает с $\mathrm{Fix}\, S$?

- Какие группы G из списка совпадают с $\mathrm{Fix}\, S$ хоть для какого-нибудь T-инвариантного множества S ?

Эти теоремы открыли столетие интенсивного и плодотворного изучения фробениусовых эндоморфизмов. В течение последних несколькими десятилетий эти вопросы изучались особенно активно и как фундаментальное направление, и в связи с многочисленными приложениями. Полученные результаты для линейных отображений подытожены в ряде книг и обзоров[8]. В настоящей работе развиты новые методы и подходы к изучению фробениусовых эндоморфизмов над полями, кольцами и полукольцами, позволившие перейти от изучения линейных отображений к нелинейным и даже неаддитивным отображениям и решить многочисленные важные задачи.

[6]Дынкин Е.Б. Максимальные подгруппы классических групп // Труды московского математического общества. **1** (1952), 39-166.

[7]S. Pierce and others. A survey of linear preserver problems // Linear and Multilinear Algebra **33** (1992), 1-129.

[8]C.-K. Li, N.-K. Tsing, Linear preserver problems: a brief introduction and some special techniques. Directions in matrix theory (Auburn, AL, 1990). Linear Algebra Appl. **162/164** (1992), 217-235.

C.-K. Li, S. Pierce, Linear preserver problems, Amer. Math. Monthly **108**, no. 7 (2001), 591-605.

L. Molnár, Selected Preserver Problems on Algebraic Structures of Linear Operators and on Function Spaces // Lecture Notes in Mathematics, Springer **1895** (2007), 230 pp.

Общая постановка задачи классификации фробениусовых эндоморфизмов может быть сформулирована следующим образом. Пусть $T : M_n(R) \to M_n(R)$ — отображение матриц некоторого фиксированного порядка n над некоторой алгебраической системой R. Рассмотрим подмножество $S \subseteq M_n(R)$ или функционал $\rho : M_n(R) \to Q$, где Q — заданное множество (ρ может быть определителем, следом, рангом, перманентом и т. д.) или свойство матриц $\mathcal{P}$ (нильпотентность, идемпотентность, вырожденность и т. д.) или отношение $\mathcal{R}$, заданное на множестве матриц (подобие, коммутативность, отношение порядка и т. д.). Предполагается, что отображение T сохраняет одно из перечисленных свойств в следующем смысле: в первом случае, условие $X \in S$ влечет условие $T(X) \in S$; во втором случае, $\rho(X) = \rho(T(X))$ для всех матриц $X \in M_n(R)$; в третьем случае, если матрица X удовлетворяет свойству $\mathcal{P}$, то матрица $T(X)$ также удовлетворяет свойству $\mathcal{P}$; в последнем случае, условие $T(X)\mathcal{R}T(Y)$ следует из условия $X\mathcal{R}Y$. Основная задача исследования фробениусовых эндоморфизмов состоит в полной характеризации отображений, сохраняющих S, ρ, $\mathcal{P}$ или $\mathcal{R}$.

Аналогичным образом определяются фробениусовы эндоморфизмы других линейных пространств.

Задача классификации фробениусовых эндоморфизмов имеет фундаментальное значение в теории матриц. По своей постановке, проблема, сформулированная выше, является обратной классической задаче теории инвариантов, т. е. задаче классификации орбит и инвариантов заданного действия. В нашем случае, требуется восстановить действие по его инвариантам. Оказывается, что уже такого малого количества информации во многих случаях достаточно для характеризации соответствующего отображения.

Приложения фробениусовых эндоморфизмов. Первые вопросы, связанные с фробениусовыми эндоморфизмами пространств матриц, были вызваны различными проблемами общей алгебры. Классификация Фробениуса линейных отображений, сохраняющих определитель, потребовалась для нужд теории представлений конечных групп. Теорема Дьедонне о сохранении вырожденности возникла из теории классических групп и квадратичных форм. Далее продемонстрировано, что такие задачи естественно возникают в самых разнообразных контекстах.

Методы вычислений. Для данного матричного инварианта структура и количество линейных отображений, его сохраняющих, являются мерой сложности этого инварианта, т. е. они характеризуют и, в некотором смысле, определяют количество арифметических операций, необходимых для вычисления этого инварианта. Действительно, большинство методов вычисления определителя, ранга и других матричных инвариантов основаны на приведении матрицы к некоторому подходящему виду преобразованиями, не меняющими данный инвариант, таким образом, эти методы основаны на применении линейных фробениусовых эндоморфизмов для данного матричного инварианта. Например, известно, что квадратную матрицу с коэффициентами из произвольного поля можно привести к диагональному виду, где на диагонали стоят только нули и единицы, преобразованием, не меняющим ранга. Это позволяет найти простой алгоритм вычисления ранга квадратной матрицы порядка n, требующий $O(n^3)$ операций. Аналогичный факт верен и для определителя. С другой стороны, простейший метод вычисления перманента квадратной $n \times n$-матрицы (формула Райзера) требует $(n-1)(2^n-1)$ операций умножения. Такое различие в сложности вычислений обусловлено тем, что очень мало линейных отображений сохраняют перманент: единственными линейными отображениями, сохраняющими перманент, являются транспонирование и домножение на обратимые матрицы P и Q с двух сторон, где обе матрицы P и Q являются произведениями диагональной матрицы и матрицы, полученной из единичной, перестановкой строк и столбцов, тогда как в случае линейных отображений, сохраняющих ранг и определитель, P и Q — почти произвольные обратимые матрицы [7].

Нормированные пространства. Многие задачи математики и ее приложений требуют изучения различных норм на линейных пространствах. Два нормированных пространства можно идентифицировать, если существует изометрический изоморфизм (изометрия) между ними, т. е. такая линейная биекция соответствующих линейных пространств, что первая норма прообраза равняется второй норме образа. Таким образом, линейные отображения, сохраняющие матричные нормы, могут быть рассмотрены как специальные случаи изометрий. Знание группы изометрий помогает найти изометрические изоморфизмы между нормированными пространствами и, следовательно, распознать различные и совпадающие нормы [7].

Теория групп. К. Джонсон [9] поставил следующую проблему о групповых определителях. Могут ли две неизоморфные конечные группы иметь одинаковые групповые определители? Ответ на этот вопрос был дан Е. Форманеком и Д. Сибли [10]. Они показали, что групповой определитель определяет конечную группу с точностью до изоморфизма. Ключевой идеей их доказательства был подъем теоремы Дьедонне о линейных отображениях, сохраняющих вырожденность, на прямое произведение матричных алгебр.

Центральные простые алгебры. Напомним, что если A — центральная простая алгебра размерности n^2 над полем K, то *функция нормы* $N(a)$ (определитель оператора левого умножения $x \to ax$) всегда удовлетворяет

[9] K. W. Johnson, Latin square determinants II // Discrete Mathematics, **105** (1992), 111-130.

[10] E. Formanek, D. Sibley, The group determinant determines the group // Proc. Amer. Math. Soc. **112** (1991), 649-656.

формальному тождеству $N(a) = (RN(a))^n$ для подходящей функции RN, называемой *редуцированной нормой*. Например, на матричной алгебре порядка n редуцированная норма $RN(A)$ совпадает с определителем $\det A$. Аналогично предыдущему примеру, можно поставить вопрос: Определяет ли редуцированная норма центральную простую алгебру с точностью до изоморфизма? Наиболее простой способ доказательства того, что редуцированная норма определяет центральную простую алгебру единственным, с точностью до изоморфизма образом, основан на некотором обобщении теоремы Фробениуса о линейных отображениях, сохраняющих определитель.

Приведенный список приложений не является исчерпывающим. В последнее время важные приложения фробениусовых эндоморфизмов матриц над кольцами и полукольцами возникают, например, в теории управления. Также существует много матричных отношений, возникающих в теории динамических систем и математической статистике, для исследования которых важна классификация соответствующих им фробениусовых эндоморфизмов.

Актуальность темы исследования. В настоящее время теория фробениусовых эндоморфизмов активно развивается математиками разных стран. Современный уровень развития теории нашел отражение в тысячах печатных работ в центральных математических журналах, в ряде обзоров, в том числе, 33-й и 48-й тома журнала “Linear and Multilinear Algebra” (“Линейная и полилинейная алгебра”) целиком посвящены обзору результатов о линейных фробениусовых эндоморфизмах, в работе многочисленных международных конференций по этой тематике. В частности, в ежегодных конференциях, проводимых международным сообществом линейной алгебры (International Linear Algebra Society), есть отдельная секция, работа которой посвящена фробениусовым эндоморфизмам пространств матриц. Интерес к этой области математики активно поддерживается и усиливается благодаря многочисленным приложениям. Несмотря на большое число давно поставленных, но все еще открытых проблем, в настоящий момент развитие этой области математики достигло того уровня, когда особый интерес представляют уже не столько отдельные результаты, сколько разработка общих методов исследования, особенно в случае матриц над кольцами и полукольцами и в случае нелинейных отображений. Таким образом, тема работы является актуальной.

Цель работы и основные задачи. Цель данной диссертационной работы состоит в создании новых универсальных методов исследования фробениусовых эндоморфизмов, позволяющих решить вопросы характеризации фробениусовых эндоморфизмов, в том числе известные открытые проблемы, и отыскать взаимосвязи между фробениусовыми эндоморфизмами, возникающими в различных областях математики. Основными задачами диссертации являются: решение проблемы Капланского-Уоткинса (1976г.) характеризации линейных отображений, сохраняющих нули матричных многочленов нескольких переменных, в случае полилинейных многочленов; внедрение и развитие метода элементарных операторов, позволяющего сводить нелинейную задачу к нескольким линейным; характеризация сюръективных, возможно нелинейных и даже неаддитивных отображений, сохраняющих нули полилинейных многочленов; характеризация отображений, монотонных относительно регулярных порядков и некоторых порядков, заданных групповой обратной матрицей; изучение аддитивных и линейных фробениусовых эндоморфизмов, связанных с ранговыми свойствами матриц, в частности, с инвариантностью ранга произведения матриц относительно заданной перестановки этих матриц и с граничными равенствами в классических матричных неравенствах для ранга произведения матриц — решение проблемы Бисли (1999г.); изучение матричных инвариантов над полукольцами и классификация аддитивных фробениусовых эндоморфизмов матриц над полукольцами; расширение классических теорем Фробениуса и Дьедонне на отображения матриц над полукольцами; характеризация аддитивных фробениусовых эндоморфизмов матриц над полукольцами для комбинаторных свойств матриц, в том числе, регулярности и почти-регулярности турнирных матриц, примитивности наборов матриц; распространение классической теоремы Фробениуса о линейных отображениях, сохраняющих определитель, на матрицы над телами; характеризация линейных отображений пространств многочленов, сохраняющих свойство положительности, неотрицательности или эллиптичности многочлена.

Основные методы исследования. В работе используются классические методы и результаты структурной теории колец, линейной алгебры над полями и кольцами, теории классических групп, метод матричных деформаций, разработанный в кандидатской диссертации автора работы, а также новые методы, в том числе метод элементарных операторов и метод цепей, разработанные автором.

Научная новизна. Основные результаты работы являются новыми и состоят в следующем:

- Разработка метода элементарных операторов, классификация с его помощью сюръективных отображений матриц над полями, строго сохраняющих множество нулей однородного полилинейного многочлена (теоремы 1.2.1, 1.2.6, 1.2.2, 1.3.3) и доказательство их невырожденности (следствия 1.2.7, 1.3.6). В частности, получено решение проблемы Капланского-Уоткинса 1976г.

- Классификация аддитивных отображений матриц над полем, монотонных относительно регулярных отношений частичного порядка (теорема 2.4.2), в том числе,

– минус-порядок,

– $*$-порядок Дрейзина,

– левый и правый $*$-порядки,

– бриллиантовый порядок,

– порядки, заданные сингулярными значениями матрицы.

- Доказательство биективности ненулевых аддитивных отображений матриц над полем комплексных чисел, монотонных относительно каждого из $*$-порядков и бриллиантового порядка (теоремы 2.4.5 и 2.4.8).

- Доказательство существования небиективного ненулевого аддитивного отображения матриц над полем комплексных чисел, монотонного относительно минус-порядка.

- Классификация линейных отображений матриц над полем, монотонных относительно частичного порядка, заданного групповой обратной матрицей, или относительно его обощения, связанного с нильпотентным разложением матрицы (теоремы 2.3.30 и 2.3.32).

- Характеризация линейных и аддитивных фробениусовых эндоморфизмов матриц над полями для следующих множеств, связанных с ранговыми свойствами, в том числе решение проблем Бисли 1999г.:

  – множество матриц, удовлетворяющих граничным равенствам в классических верхних и нижних оценках ранга произведения матриц над полями (теоремы 3.1.5, 3.1.10, 3.1.17 и 3.1.18),

  – множество матриц, для которых выполняется свойство инвариантности ранга произведения некоторого набора матриц относительно заданной перестановки матриц внутри набора (теоремы 3.2.13 и 3.2.15).

- Разработка комбинаторных методов линейной алгебры над полукольцами, в том числе,

  – введение и сравнение друг с другом комбинаторных ранговых функций, использующихся при изучении неотрицательных матриц, матриц над макс-алгебрами и другими полукольцами (предложения 4.1.2, 4.1.68, 4.1.72, 4.1.75, 4.1.79),

  – характеризация линейных отображений матриц над полукольцами, сохраняющих граничные случаи в арифметических неравенствах для факторизационного ранга матриц (теоремы 4.4.3, 4.4.5, 4.4.7, 4.4.9, 4.4.11, 4.4.12, 4.4.15, 4.4.16, 4.4.20, 4.4.21, 4.4.23 и 4.4.26).

- характеризация линейных отображений матриц над полукольцами, сохраняющих нули многочленов (теорема 4.5.17),
- структурная характеризация идемпотентных матриц и матриц, мажорируемых идемпотентной матрицей в смысле минус-порядка (теоремы 5.3.7 и 5.3.49, соответственно),
- характеризация аддитивных отображений матриц над антинегативными полукольцами, сохраняющих примитивные наборы матриц (теорема 5.1.61),
- характеризация аддитивных отображений матриц над антинегативными полукольцами, сохраняющих регулярные и почти-регулярные турнирные матрицы (теорема 5.2.27).

• Аналоги теорем Фробениуса и Дьедонне о характеризации линейных отображений матриц над полями, сохраняющих определитель и множество вырожденных матриц, соответственно, для матриц над антинегативными полукольцами (теоремы 4.3.2, 4.3.10 и 4.3.8).

• Развитие метода матричных деформаций, классификация с его помощью сюръективных полулинейных отображений матриц над телами, сохраняющих определитель Дьедонне (теоремы 6.3.8 и 6.4.2).

• Исследование линейных отображений конечномерных и бесконечномерных пространств многочленов с вещественными коэффициентами, сохраняющих одно из следующих свойств многочленов:

  - положительность,
  - неотрицательность,
  - эллиптичность.

  В частности, доказано отсутствие линейных дифференциальных операторов конечного порядка k, сохраняющих каждое из указанных свойств на пространствах многочленов степени большей $2k$, получена характеризация линейных дифференциальных операторов бесконечного порядка с постоянными коэффициентами, сохраняющих эти свойства. Последняя задача восходит к работе Полиа и Шура 1914г. (теорема 7.1.5, следствие 7.1.6 и теорема 7.1.9).

Практическая и теоретическая ценность. Работа имеет теоретический характер. Полученные в ней результаты могут быть использованы в различных задачах линейной и полилинейной алгебры, теории колец, математической статистики, вычислительных методов, теории управления.

Апробация результатов. Результаты диссертации неоднократно докладывались на научно-исследовательских семинарах: кафедральный семинар кафедры Высшей алгебры МГУ; семинар "Кольца и модули" в МГУ; семинар "Избранные вопросы алгебры" в МГУ; семинар "Теория матриц и ее приложения" в МГУ; кафедральный семинар кафедры Дифференциальной геометрии и топологии МГУ; семинар Института вычислительной математики РАН; семинар Института проблем управления РАН; семинар проф. Гобера, Эколь Политехник, Париж, Франция, 2006, 2008гг.; семинар "Макс-алгебры", INRIA, Париж, Франция, 2005, 2006, 2008гг.; семинар университета г. Стокгольма, Швеция, 2007г.; семинар университета г. Дортмунд, Германия, 2003, 2004, 2005 гг.; семинар университета г. Копенгаген, Дания, 2005г.; семинар проф. Бутковича, универитет г. Бирмингем, Великобритания, 2005г.; семинар проф. Бака и семинар проф. Эльшнера в университете г. Белефельда, Германия, 2004, 2005гг.; семинар университета г. Падуя, Италия, 2008г.; семинар университета г. Упсала, Швеция, 2007г.; семинар университета, г. Нант, Франция, 2006 г., семинар университета г. Брауншвейг, Германия 2004, 2005гг.; семинар университета г. Тампере, Финляндия, 2004, 2005гг., семинар университета г. Люнд, Швеция, 2007 г., семинар университета г. Лиссабон, Португалия, 2003; семинар проф. Рана, университет г. Амстердам, Голландия, 2003г.; семинар университета г. Порто, Португалия, 2003; семинар технического университета г. Берлин, Германия, 2005г и др.; на заседании Московского математического общества, 2003г.; на пленарных заседаниях: Международной алгебраической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения А. Г. Куроша, Россия, Москва, 2008; 5-ой международной конференции по линейной алгебре, Словения, Любляна, 2008; Международной конференции "Идемпотентная и тропическая математика и проблемы математической физики", Россия, Москва, 2007; 2-ой международной конференции по матричным методам и операторным уравнениям, Россия, Москва, 2007; Конференции по квазидетерминантам и универсальной локализации, Испания, Барселона, 2007; Международной конференции по теории групп и универсальным алгебрам, Израиль, Иерусалим, 2005; Международной конференции по некоммутативной геометрии, Бельгия, Антверпен, 2004; Международной алгебраической конференции, Россия, Москва, 2004; XII-ой международной конференции по матрицам и статистике, Германия, Дортмунд, 2003; 3-ей международной конференции по линейной алгебре, Словения, Блед, 2003; на многочисленных секционных докладах на конференциях, в том числе, на всемирных конгрессах математиков в Пекине в 2002г. и Мадриде в 2006г.; на регулярных конференциях, проводимых международным сообществом линейных алгебраистов: в 2006, 2004, 2001гг.

Публикации. Основные результаты опубликованы в 30 статьях, список которых приведен в конце автореферата. Тезисы докладов не включены в этот список.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, 7 глав, разбитых на параграфы, нумерация параграфов подчинена нумерации глав, нумерация теорем подчинена нумерации параграфов, и списка литературы. Полный объем диссертации 321 страница, библиография включает 239 наименований.

Краткое содержание работы.

Глава 1 посвящена решению следующей проблемы Капланского-Уоткинса[11]:

Пусть $\mathfrak{p}(x_1, \ldots, x_k)$ — произвольный элемент свободной ассоциативной алгебры степени $\deg \mathfrak{p} > 1$ над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{F}$ нулевой характеристики и пусть $T : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ — возможно, линейное, отображение пространства $n \times n$-матриц с элементами из поля $\mathbb{F}$. Предположим, что для любого набора матриц $(A_1, \ldots, A_k)$, удовлетворяющего условию $\mathfrak{p}(A_1, \ldots, A_k) = 0$, справедливо $\mathfrak{p}(T(A_1), \ldots, T(A_k)) = 0$. Требуется доказать невырожденность таких отображений и/или охарактеризовать их структуру.

В представленной диссертационной работе проблема решена для произвольных однородных полилинейных многочленов с ненулевой суммой коэффициентов и однородных полилинейных многочленов с нулевой суммой коэффициентов специального вида, исключающего полиномиальные тождества матричной алгебры. Для решения этой проблемы предложен новый метод — *метод элементарных операторов*, позволяющий получить ответы на оба вопроса сразу: доказать невырожденность рассматриваемых операторов и получить их общий вид, причем ответить на вопрос в более общей постановке, а именно, отказаться от требования линейности рассматриваемых отображений. Также преимуществом предложенного метода является то, что он работает над полем произвольной характеристики, отличной от двух, и применим не только к полной матричной алгебре, но и ко многим ее подмножествам.

Зафиксируем произвольный однородный полилинейный многочлен $\mathfrak{p}(x_1, \ldots, x_k) = \sum\limits_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot x_{\sigma(k)}$, $\alpha_\sigma \in \mathbb{F}$, удовлетворяющий условию $\sum\limits_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \alpha_\sigma \neq 0$, здесь и далее $\mathfrak{S}_k$ — группа перестановок, действующая на множестве $\{1, \ldots, k\}$.

Основным результатом главы 1 является следующий.

Теорема 5. *(Теорема 1.2.1) Пусть* $\mathbb{F}$ *— алгебраически замкнутое поле,* $\operatorname{char} \mathbb{F} \neq 2$, $n \geq 4$, $k \geq 3$. *Предположим, что сюръективное отображение* $T : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ *строго сохраняет нули многочлена* $\mathfrak{p}(x_1, \ldots, x_k)$, *т.е.* $\mathfrak{p}(A_1, \ldots, A_k) = 0$

[11] W. Watkins, Linear maps that preserve commuting pairs of matrices // Linear Alg. Appl., **14** (1976), 29–35.
W. Watkins, Polynomial functions that preserve commuting pairs of matrices // Linear and Multilinear Algebra, **5** (1977), 87–90.
I. Kaplansky, Mappings preserving various properties, 1976.
M. Marcus, I. Filippenko, Invariance of the nonvanishing specializations of polynomials // Linear and Multilinear Algebra, **5** (1977), 99–105.

тогда и только тогда, когда $\mathfrak{p}(T(A_1),\ldots,T(A_k)) = 0$. *Тогда существуют такие изоморфизм поля* $\varphi : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$, *функции* $\gamma : M_n(\mathbb{F})\backslash\{0\} \to \mathbb{F}^*$, *где* $\mathbb{F}^* = \mathbb{F}\backslash\{0\}$, *и* $\mu : M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$, *а также обратимая матрица* S, *что*

(i) $T(A) = \gamma(A)\, SA^{\varphi}S^{-1} + \mu(A)\, I$ *для всех* $A \in M_n(\mathbb{F})$ *или*

(ii) $T(A) = \gamma(A)\, S\,(A^{\varphi})^t\, S^{-1} + \mu(A)\, I$ *для всех* $A \in M_n(\mathbb{F})$, *здесь через* X^{φ} *обозначена матрица, элементы которой получаются применением автоморфизма* φ *к элементам матрицы* X, *через* X^t — *транспонированная матрица, через* I — *единичная матрица.*

Теорема 5 решает проблему Капланского-Уоткинса для отображений, строго сохраняющих нули однородных полилинейных многочленов с ненулевой суммой коэффициентов. В конце главы 1 приведены примеры, показывающие существенность предположения о строгом сохранении нулей многочлена как для доказательства невырожденности, так и для характеризации рассматриваемого отображения.

Однако предложенный метод позволяет в ряде случаев отказаться от некоторых введенных ограничений. Для многочленов специального вида удалось избавиться от предположения сюръективности отображения T и доказать следующее утверждение:

Теорема 6. *(Теорема 1.2.6) Пусть для многочлена* $\mathfrak{p}$ *справедливо, что матрица*

$$\sum_{i,j=1}^{n}\Bigg(\sum_{\sigma:\,\sigma(i)=j}\alpha_{\sigma}\Bigg)E_{i,j}$$

обратима в $M_k(\mathbb{F})$. *Допустим, что в предположениях теоремы 5 несюръективное отображение* $T : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ *строго сохраняет нули многочлена* $\mathfrak{p}$. *Тогда заключения* (i), (ii) *справедливы, однако, гомоморфизм поля* $\varphi : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ *может быть несюръективным.*

В случае $k = 2$ отображение T может не иметь определенной структуры: например, для многочлена $\mathfrak{p} = x_1x_2$ любое отображение, действующее произвольной перестановкой на множестве обратимых матриц, строго сохраняет нули $\mathfrak{p}$. Однако на множестве матриц ранга 1 предложенный метод позволяет получить следующую характеризацию:

Теорема 7. *(Теорема 1.2.2) Пусть* $\mathbb{F} = \overline{\mathbb{F}}$, $n \geq 3$, $k \geq 2$. *Предположим, что сюръективное отображение* $T : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ *строго сохраняет нули многочлена* $\mathfrak{p}(x_1,\ldots,x_k)$, *т.е.* $\mathfrak{p}(A_1,\ldots,A_k) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{p}(T(A_1),\ldots,T(A_k)) = 0$. *Тогда существуют автоморфизм поля* $\varphi : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$, *функция* $\gamma : M_n(\mathbb{F})\backslash\{0\} \to \mathbb{F}^*$ *и обратимая матрица* $S \in M_n(\mathbb{F})$ *такие, что*

$T(A) = \gamma(A)\, SA^{\varphi}S^{-1}$ *для всех матриц* A *ранга 1 или*

$T(A) = \gamma(A)\, S\,(A^{\varphi})^t\, S^{-1}$ *для всех матриц* A *ранга 1.*

В частности, для аддитивного отображения T получаем:

Следствие 8. *(Следствие 1.2.7) Пусть $\mathbb{F} = \overline{\mathbb{F}}$, $n \geq 3$, $k \geq 2$, $T : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ — аддитивное биективное отображение, сохраняющее нули многочлена $\mathfrak{p}(x_1, \ldots, x_k)$. Тогда существуют элемент $\gamma \in \mathbb{F}$, обратимая матрица $S \in M_n(\mathbb{F})$ и автоморфизм поля $\varphi : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$, такие, что $T(A) = \gamma S A^{\varphi} S^{-1}$ для всех $A \in M_n(\mathbb{F})$ или $T(A) = \gamma S (A^{\varphi})^t S^{-1}$ для всех $A \in M_n(\mathbb{F})$.*

Следующее утверждение решает проблему невырожденности рассматриваемых отображений для многочленов с ненулевой суммой коэффициентов:

Следствие 9. *(Следствие 1.2.8) В условиях теоремы 5 отображение T невырождено, т.е. имеет нулевое ядро.*

Замечание 10. *Все приведенные результаты доказаны в диссертационной работе также при более слабых ограничениях на отображения, а именно, для отображений $T : \mathfrak{D}_1 \to \mathfrak{D}_2$, где $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2 \subseteq M_n(\mathbb{F})$ — произвольные подмножества, каждое из которых содержит все матрицы ранга 1 и все идемпотенты ранга $n-1$. В этом случае заключение имеет место для всех матриц $A \in \mathfrak{D}_1$ (кроме теоремы 7, где заключение верно только для матриц ранга 1).*

Для многочленов с нулевой суммой коэффициентов ситуация усложняется тем, что среди таких многочленов содержатся тождества матричной алгебры, сохранение нулей которых не накладывает никаких ограничений на отображение T. Например, согласно известной теореме Амицура-Левицкого, многочлен

$$\mathfrak{p}(x_1, \ldots, x_{2n}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}} (-1)^{\sigma} x_{\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot x_{\sigma(2n)}$$

тождественно равен нулю на $M_n(\mathbb{F})$, значит, его нули сохраняются всеми отображениями. С другой стороны, строение идеала тождеств матричной алгебры при $n > 2$ — открытая проблема[12], поэтому не существует конструктивного способа исключить из рассмотрения все тождества. В связи с этим в диссертационной работе рассмотрен более узкий класс однородных полилинейных многочленов, где суммирование ведется по следующему множеству допустимых перестановок:

Определение 11. Пусть $k \geq 2$. Множество перестановок $\Xi \subseteq \mathfrak{S}_k$ называется *допустимым*, если выполнены следующие условия: (i) существует такое $t \in \{1, \ldots, k\}$, что каждая перестановка $\sigma \in \Xi$ фиксирует первые $t-1$ элемент, но $\sigma(t) \neq t$; (ii) существуют такие числа $w, u, v \in \{1, \ldots, k\}$, $u < v$, что $\sigma(w) = v$ и $\sigma(w+1) = u$ для всех $\sigma \in \Xi$.

[12] V. Drensky, Ed. Formanek, Polynomial Identity Rings // Basel – Boston – Berlin: Birkhäuser Verlag. 2004. 201 pp.

Например, для любой перестановки $\sigma \neq id$, множество $\Xi = \{\sigma\}$ является допустимым. Также допустимо множество всех перестановок из $\mathfrak{S}_k$, переставляющих 1 и 2.

Применение разработанного метода позволяет получить следующий результат, решающий проблему Капланского-Уоткинса для биективных отображений, сохраняющих нули однородных полилинейных многочленов с нулевой суммой коэффициентов, задаваемых допустимой перестановкой.

Теорема 12. *(Теорема 1.3.3) Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле и $|\mathbb{F}| > 2$, $n \geq 3$, $k \geq 2$ — целые числа. Пусть $\Xi \subset \mathfrak{S}_k$ — фиксированное допустимое множество перестановок,*

$$\mathfrak{p}(x_1, \ldots, x_k) = x_1 \cdot \ldots \cdot x_k - \sum_{\sigma \in \Xi} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot x_{\sigma(k)}, \quad \alpha_\sigma \in \mathbb{F}, \quad \sum_{\sigma \in \Xi} \alpha_\sigma = 1.$$

Тогда произвольное биективное отображение $T : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$, сохраняющее множество нулей $\mathfrak{p}$, сохраняет коммутативность.

В работе доказано также следующее уточнение теоремы 12:

Теорема 13. *(Теорема 1.3.3, следствия 1.3.5 и 1.3.6)*

1. Пусть два однородных полилинейных многочлена

$$\mathfrak{p}_1(x_1, \ldots, x_k) = x_1 \cdot \ldots \cdot x_k - \sum_{\sigma \in \Xi} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot x_{\sigma(k)}, \ \alpha_\sigma \in \mathbb{F},$$

$$\mathfrak{p}_2(x_1, \ldots, x_k) = x_1 \cdot \ldots \cdot x_k - \sum_{\sigma \in \Xi} \beta_\sigma x_{\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot x_{\sigma(k)}, \ \beta_\sigma \in \mathbb{F}$$

удовлетворяют условию $\sum\limits_{\sigma \in \Xi} \alpha_\sigma = 1 = \sum\limits_{\sigma \in \Xi} \beta_\sigma$. Тогда произвольное биективное отображение $T : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$, переводящее множество нулей $\mathfrak{p}_1$ в множество нулей $\mathfrak{p}_2$, сохраняет коммутативность.

2. При дополнительном предположении $T(I) \neq 0$ заключение теоремы 12 справедливо также и в случае $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_2$.

3. При $k \geq 3$ и при условии, что $\mathfrak{p}_1(A_1, \ldots, A_k) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{p}_2(T(A_1), \ldots, T(A_k)) = 0$, заключение теоремы 12 справедливо без требования инъективности T. Более того, в этих предположениях отображение T имеет нулевое ядро.

Последний пункт приведенной теоремы решает проблему невырожденности рассматриваемых отображений для многочленов с нулевой суммой коэффициентов.

В аддитивном случае получается следующий результат:

Следствие 14. *(Замечание 1.3.7) Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле с $|\mathbb{F}| > 2$, $n \geq 3$, $k \geq 2$ — целые числа. Пусть $\Xi \subset \mathfrak{S}_k$ — фиксированное допустимое множество перестановок, а многочлены*

$$\mathfrak{p}_1(x_1, \ldots, x_k) = x_1 \cdot \ldots \cdot x_k - \sum_{\sigma \in \Xi} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot x_{\sigma(k)}, \ \alpha_\sigma \in \mathbb{F},$$

$$\mathfrak{p}_2(x_1, \ldots, x_k) = x_1 \cdot \ldots \cdot x_k - \sum_{\sigma \in \Xi} \beta_\sigma x_{\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot x_{\sigma(k)}, \ \beta_\sigma \in \mathbb{F},$$

удовлетворяют условию $\sum\limits_{\sigma \in \Xi} \alpha_\sigma = 1 = \sum\limits_{\sigma \in \Xi} \beta_\sigma$. Тогда биективное аддитивное отображение $T : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$, переводящее множество нулей многочлена $\mathfrak{p}_1$ в множество нулей многочлена $\mathfrak{p}_2$ имеет вид $T(A) = \gamma\, S A^\varphi S^{-1} + f(A) I$ или $T(A) = \gamma\, S (A^\varphi)^t S^{-1} + f(A) I$, где $\gamma \in \mathbb{F}$, $\varphi : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ — автоморфизм, $f : M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ — аддитивная функция, $S \in M_n(\mathbb{F})$ — обратимая матрица.

В последнем параграфе главы 1 построены примеры, демонстрирующие существенность условий теорем 5, 7 и 12, а значит, показывающие, что результаты главы 1 неулучшаемы.

Предложенный в данной диссертационной работе метод элементарных операторов возможно применить также для классификации фробениусовых эндоморфизмов относительно неоднородных многочленов специального вида, а также для классификации фробениусовых эндоморфизмов пространств симметрических, эрмитовых, треугольных матриц и др.

В главе 2 исследуются линейные и аддитивные отображения, монотонные относительно регулярных частичных порядков на матричной алгебре и частичных прорядков, заданных групповой обратной матрицей, т.е. отображения, сохраняющие эти порядки. В частности, доказано, что аддитивные монотонные относительно порядка Дрейзина отображения автоматически биективны.

Введено общее определение регулярного порядка.

Определение 15. Порядок $\prec$ на $M_{m\,n}(\mathbb{F})$ называется *регулярным*, если:

(i) порядок $\prec$ унитарно инвариантен;

(ii) порядок $\prec$ слабее порядка Дрейзина;

(iii) если $A \prec B$, то $\operatorname{rk} A \leq \operatorname{rk} B$;

(iv) если $A \prec B$ и $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} B$, то $A = B$.

Разработан метод *цепей*, позволяющий классифицировать все *аддитивные* фробениусовы эндоморфизмы, монотонные относительно регулярных порядков, и доказана следующая теорема.

Теорема 16. *(Теорема 2.4.2) Пусть $\prec$ — регулярный частичный порядок. Предположим, что $T : M_{m,n}(\mathbb{F}) \to M_{m,n}(\mathbb{F})$ — аддитивное отображение, монотонное относительно порядка $\prec$. Тогда T имеет одну из следующих форм:*

1) $T(X) = PX^{\varphi}Q$ для всех $X \in M_{m,n}(\mathbb{F})$, где $\varphi : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ — эндоморфизм поля, P, Q — обратимые матрицы подходящих размеров,

2) если $m = n$, $T(X) = P(X^{\varphi})^t Q$ для всех $X \in M_n(\mathbb{F})$, где $\varphi : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ — эндоморфизм поля, $P, Q \in GL_n(\mathbb{F})$, здесь и далее $GL_n(\mathbb{F})$ обозначает группу обратимых $n \times n$ матриц с элементами из поля $\mathbb{F}$.

3) $T(X) = 0$ для всех $X \in M_{m,n}(\mathbb{F})$.

В некоторых случаях эту теорему удается значительно усилить, в частности,

а) описать те и только те отображения, которые монотонны относительно рассматриваемого отношения частичного порядка;

б) доказать автоматическую биективность ненулевых монотонных отображений.

Например, получены следующие результаты:

Теорема 17. *(Теорема 2.4.5) Аддитивное преобразование $T : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ монотонно относительно порядка Дрейзина тогда и только тогда, когда $T \equiv 0$ или существуют $U, V \in U_n(\mathbb{C})$ — группа унитарных матриц, и $0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$, такие, что T имеет одну из следующих форм:*

1) $T([x_{i,j}]) = \alpha U[x_{i,j}]V$ для всех $X = [x_{i,j}] \in M_n(\mathbb{C})$,

2) $T([x_{i,j}]) = \alpha U[\overline{x_{i,j}}]V$ для всех $X = [x_{i,j}] \in M_n(\mathbb{C})$, здесь и далее $\overline{x}$ обозначает комплексно-сопряженное число для $x \in \mathbb{C}$,

3) $T([x_{i,j}]) = \alpha U[x_{i,j}]^t V$ для всех $X = [x_{i,j}] \in M_n(\mathbb{C})$,

4) $T([x_{i,j}]) = \alpha U[\overline{x_{i,j}}]^t V$ для всех $X = [x_{i,j}] \in M_n(\mathbb{C})$.

В этом, как и в следующем, случае, так как матрицы U и V обратимые, легко видеть, что ненулевое отображение автоматически биективно.

Теорема 18. *(Теорема 2.4.8) Аддитивное преобразование $T : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ является монотонным относительно бриллиантового порядка тогда и только тогда, когда либо $T \equiv 0$, либо существуют матрицы $U, V \in U_n(\mathbb{C})$ и $0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$, такие, что T имеет одну из следующих форм:*

1) $T([x_{i,j}]) = \alpha U[x_{i,j}]V$ для всех $X = [x_{i,j}] \in M_n(\mathbb{C})$,

2) $T([x_{i,j}]) = \alpha U[\overline{x_{i,j}}]V$ для всех $X = [x_{i,j}] \in M_n(\mathbb{C})$,

3) $T([x_{i,j}]) = \alpha U[x_{i,j}]^t V$ для всех $X = [x_{i,j}] \in M_n(\mathbb{C})$,

4) $T([x_{i,j}]) = \alpha U[\overline{x_{i,j}}]^t V$ для всех $X = [x_{i,j}] \in M_n(\mathbb{C})$.

Существуют ненулевые небиективные аддитивные отображения, монотонные относительно минус-порядка. Однако из теоремы 16 следует, что ненулевые линейные монотонные относительно любого регулярного порядка отображения автоматически биективны.

Для нерегулярных порядков метод цепей не работает. Однако в случае порядков, порожденных групповой обратной матрицей, удалось установить связь между монотонными отображениями и отображениями, сохраняющими одновременную диагонализуемость наборов матриц, к которым применим метод цепей. В итоге, для монотонных отображений получена следующая характеризация.

Теорема 19. *(Теорема 2.3.30) Пусть* $\mathbb{F}$ *— произвольное поле,* $n > 3$. *Линейное биективное отображение* $T : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ *монотонно относительно частичного порядка, заданного групповой обратной матрицей,* $\overset{\sharp}{<}$*-порядка, (или его расширения на все матрицы,* $\overset{\mathrm{cn}}{<}$ *-порядка) тогда и только тогда, когда существует матрица* $P \in GL_n(\mathbb{F})$ *и ненулевой элемент* $\alpha \in \mathbb{F}$*, такой, что* T *имеет вид* $T(X) = \alpha P X P^{-1}$ *для всех матриц* $X \in M_n(\mathbb{F})$ *или* $T(X) = \alpha P X^{\mathrm{t}} P^{-1}$ *для всех матриц* $X \in M_n(\mathbb{F})$.

Развивая далее введенный метод, удалось еще усилить эту теорему, заменив условие биективности на условие строгой монотонности:

Теорема 20. *(Теорема 2.3.32) Пусть* $\mathbb{F}$ *— произвольное поле,* $n > 3$, $T : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ *— линейное отображение. Отображение* T *строго монотонно относительно* $\overset{\sharp}{<}$ *(или* $\overset{\mathrm{cn}}{<}$ *)-порядка тогда и только тогда, когда существует матрица* $P \in GL_n(\mathbb{F})$ *и ненулевой элемент* $\alpha \in \mathbb{F}$*, такой, что* T *имеет вид* $T(X) = \alpha P X P^{-1}$ *для всех матриц* $X \in M_n(\mathbb{F})$ *или* $T(X) = \alpha P X^{\mathrm{t}} P^{-1}$ *для всех матриц* $X \in M_n(\mathbb{F})$.

Аналогичный результат получается для отображений $T : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$, удовлетворяющих условию: $A \overset{\sharp}{<} B \Longrightarrow T(A) \overset{\mathrm{cn}}{<} T(B)$.

Замечание 21. *Заметим, что не существует биективных линейных отображений* $T : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$*, удовлетворяющих условию:* $A \overset{\mathrm{cn}}{<} B$ *влечет* $T(A) \overset{\sharp}{<} T(B)$.

Отметим также, что существуют примеры "нестандартных" линейных биективных фробениусовых эндоморфизмов для $\overset{\sharp}{<}$ и $\overset{\mathrm{cn}}{<}$ порядков в случае $|\mathbb{F}| = n = 2$:

Пример 22. При $|\mathbb{F}| = n = 2$ существуют биективные линейные отображения, монотонные относительно рассматриваемых порядков, но не являющиеся композицией подобия и умножения на скалярные матрицы. Примером может служить отображение, задаваемое так: $T(E_{ii}) = E_{ii}$, $T(E_{ij}) = I + E_{ij}$.

Глава 3 посвящена изучению аддитивных и линейных отображений матриц над полями, сохраняющих различные свойства матриц, определяемые в терминах функции ранга. Обозначим

$$\mathcal{Q}_1 = \big\{(A,B) \mid \mathrm{rk}\,(A+B) = \mathrm{rk}\,(A) + \mathrm{rk}\,(B)\big\};$$

$$\mathcal{Q}_2 = \big\{(A,B) \mid \mathrm{rk}\,(A+B) = \ |\mathrm{rk}\,(A) - \mathrm{rk}\,(B)|\big\};$$

$$\mathcal{Q}_3 = \big\{(A,B) \mid \mathrm{rk}\,(AB) = \min\{\mathrm{rk}\,(A), \mathrm{rk}\,(B)\}\big\};$$

$$\mathcal{Q}_4 = \big\{(A,B) \mid \mathrm{rk}\,(AB) = \mathrm{rk}\,(A) + \mathrm{rk}\,(B) - n\big\};\ \text{и}$$

$$\mathcal{Q}_5 = \big\{(A,B,C) \mid \mathrm{rk}\,(AB) + \mathrm{rk}\,(BC) = \mathrm{rk}\,(ABC) + \mathrm{rk}\,(B)\big\}.$$

В 1999г. вопрос характеризации фробениусовых эндоморфизмов для каждого из перечисленных множеств был сформулирован в докладе Л. Бисли на конференции “Linear Preserve Workshop” в Лиссабоне (Португалия). Поскольку задачи изучения линейных и аддитивных отображений, сохраняющих $\mathcal{Q}_1$ или $\mathcal{Q}_2$, легко сводятся к задачам изучения линейных, соответственно, аддитивных, отображений, сохраняющих вычитаемость ранга, или, что тоже самое, минус-порядок, которые были решены в главе 2 представленной диссертационной работы, параграф 3.1 посвящен исследованию операторов, сохраняющих множество $\mathcal{Q}_3$, $\mathcal{Q}_4$ или $\mathcal{Q}_5$. Кроме того в параграфе 3.2 рассмотрены семейства матриц, для которых справедливо свойство перестановочности ранга произведения матриц.

Основными результатами этой главы являются следующие.

Теорема 23. *(Теорема 3.1.5) Если $\mathbb{F}$ — произвольное поле, и $T : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ — обратимое линейное отображение, то отображение T сохраняет множество $\mathcal{Q}_3$ тогда и только тогда, когда $T(X) = \alpha PXP^{-1}$ для некоторой обратимой матрицы $P \in M_n(\mathbb{F})$ и ненулевого скаляра $\alpha \in \mathbb{F}$.*

Также приведены примеры, демонстрирующие существование большого класса несюръективных линейных фробениусовых эндоморфизмов для $\mathcal{Q}_3$.

Теорема 24. *(Теорема 3.1.10) Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Тогда линейное биективное отображение $T : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ сохраняет множество $\mathcal{Q}_4$ в том и только том случае, когда $T(X) = \alpha PXP^{-1}$ для некоторой обратимой матрицы $P \in M_n(\mathbb{F})$ и ненулевого скаляра $\alpha \in \mathbb{F}$.*

Более того, доказано, что если поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто, то фробениусовы эндоморфизмы для $\mathcal{Q}_4$ являются автоморфизмами.

Теорема 25. *(Теорема 3.1.17) Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле и отображение $T : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ является биективным и линейным. Тогда T сохраняет множество $\mathcal{Q}_5$ в том и только в том случае, когда $T(X) = \alpha PXP^{-1}$ для некоторой обратимой матрицы $P \in M_n(\mathbb{F})$ и ненулевого скаляра $\alpha \in \mathbb{F}$.*

Следущее утверждение показывает, что при некоторых дополнительных ограничениях на основное поле, ненулевые линейные фробениусовы эндоморфизмы для $\mathcal{Q}_5$ биективны.

Теорема 26. *(Теорема 3.1.18) Пусть поле $\mathbb{F}$ содержит, по крайней мере, три элемента, и $T : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ — линейное отображение. Тогда отображение T сохраняет множество $\mathcal{Q}_5$ в том и только том случае, когда $T(X) = \alpha PXP^{-1}$ для некоторой обратимой матрицы $P \in M_n(\mathbb{F})$ и скаляра $\alpha \in \mathbb{F}$.*

Используя также идеи, предложенные в параграфе 1.3 главы 1, удалось охарактеризовать фробениусовы эндоморфизмы и для перестановочности ранга произведения матриц.

Теорема 27. *(Теорема 3.2.13) Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле нулевой характеристики, $n, k \geq 2$ — целые числа и $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ — фиксированная нетождественная подстановка, отображение $T : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ является аддитивной биекцией. Тогда T переводит набор матриц, удовлетворяющий соотношению*

$$\operatorname{rk}(A_1 \cdot \ldots \cdot A_k) = \operatorname{rk}(A_{\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot A_{\sigma(k)}), \qquad (*)$$

в набор матриц, удовлетворяющий этому же соотношению, в том и только том случае, когда существует матрица $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$, ненулевой скаляр $\alpha \in \mathbb{F}$, и автоморфизм поля $\varphi : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$, такие, что T имеет одну из следующих форм:

$$T(A) = \alpha\, PA^{\varphi}P^{-1} \text{ для всех } A \in M_n(\mathbb{F})$$

или, в случае, $\sigma(i) = k - i + 1$ для всех i, $1 \leq i \leq k$,

$$T(A) = \alpha P(A^{\varphi})^t P^{-1} \text{ для всех } A \in M_n(\mathbb{F}).$$

В этом случае также удается отказаться от требования биективности, но для этого необходимо, чтобы отображение T строго сохраняло отношение $(*)$, т.е. переводило в себя как множество наборов матриц, удовлетворяющих $(*)$, так и его дополнение. Отображение линейных пространств называется *почти-сюръективным*, если линейная оболочка его образа совпадает со всем пространством-образом. Для аддитивных почти-сюръективных отображений получено следующее усиление теоремы 27:

Теорема 28. *(Теорема 3.2.15) Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле, $\operatorname{char}\mathbb{F} = 0$, $n \geq 2$, и $T : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ — почти-сюръективное аддитивное преобразование. Отображение T строго сохраняет отношение $(*)$ тогда и только тогда, когда существует матрица подобия $P \in GL_n(\mathbb{F})$, ненулевой скаляр $\alpha \in \mathbb{F}$, и ненулевой гомоморфизм полей $\varphi : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$, такой, что T имеет одну из следующих форм:*

$$T(A) = \alpha\, PA^{\varphi}P^{-1} \text{ для всех } A \in M_n(\mathbb{F})$$

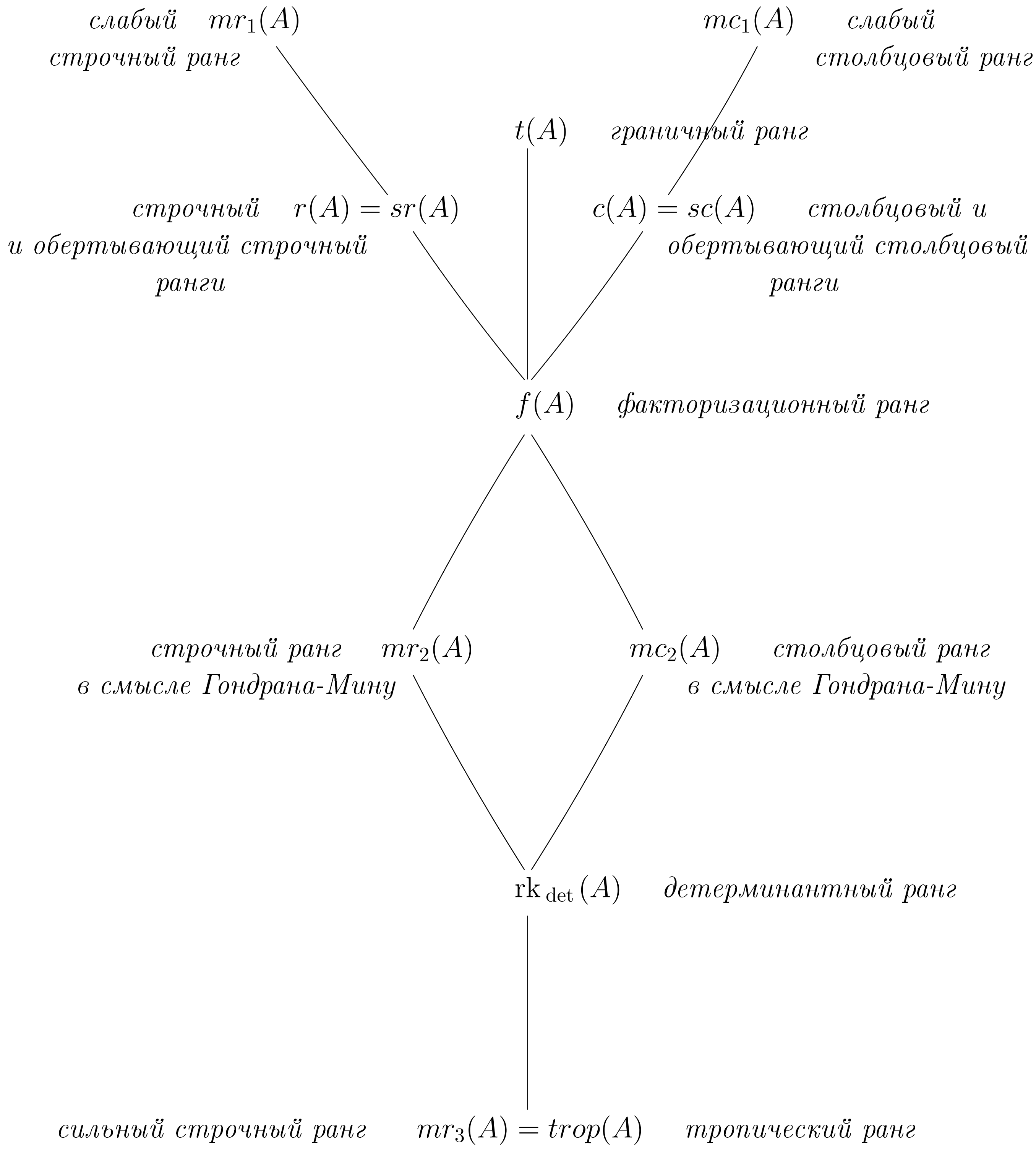
или, в случае $\sigma(i) = k - i + 1$ *для всех* i, $1 \le i \le k$,

$$T(A) = \alpha P(A^{\varphi})^t P^{-1} \text{ для всех } A \in M_n(\mathbb{F}).$$

Отметим, что инъективность отображения T следует автоматически из того, что T строго сохраняет отношение $(*)$, поэтому в линейном случае требование почти-сюръективности оказывается излишним. Показано, что накладываемые ограничения далее неулучшаемы, в частности, приведены примеры почти-сюръективных аддитивных отображений, нестрого сохраняющих отношение $(*)$, для которых заключение теоремы 28 не выполняется.

Главы 4 и 5 посвящены изучению фробениусовых эндоморфизмов матриц над полукольцами. При переходе от полей к полукольцам многие классические матричные инварианты теряют смысл, а эквивалентные над полями определения, например, ранга, перестают быть эквивалентными. Многочисленные приложения линейной алгебры над полукольцами требуют изучения разнообразных матричных инвариантов. В начале главы 4 приведены наиболее часто используемые определения линейной независимости и матричных инвариантов над полукольцами, изучены их свойства. Доказана следующая теорема, описывающая связи между различными ранговыми функциями матрицы над макс-алгеброй.

Теорема 29. *(Предложения 4.1.2, 4.1.68, 4.1.72, 4.1.75, 4.1.79) Основные ранговые функции матриц над макс-алгеброй удовлетворяют следующим неравенствам, приведенным в виде диаграммы, на которой пути соединяют сравнимые величины и из двух ранговых функций, соединенных ребром, больше та, которая расположена выше. Отметим, что все приведенные неравенства являются строгими.*



Приведенная теорема полностью решает вопрос сравнения различных функций ранга для матриц над полукольцами. В качестве приложения эта теорема позволяет оценивать такие трудно-вычислимые комбинаторные инварианты, как факторизационный ранг и ранг Гондрана-Мину, через ранговые функции, которые считаются сравнительно легко. На основе выявленных связей между ранговыми функциями доказаны следующие аналоги теорем Фробениуса и

Дьедонне.

Чтобы их сформулировать, приведем определения вырожденности и би-определителя над полукольцами, поскольку эти понятия не являются общеизвестными. Пусть $\mathcal{S}$ — полукольцо, через $\mathcal{S}^n$ обозначим полумодуль столбцов длины n с элементами из $\mathcal{S}$.

Определение 30. Матрица $A \in M_{mn}(\mathcal{S})$ называется $\mathcal{S}$-*вырожденной*, если $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ или $\mathbf{x}A = \mathbf{0}$ для некоторого ненулевого вектора $\mathbf{x} \in \mathcal{S}^n$. Матрица $A \in M_{mn}(\mathcal{S})$ называется $\mathcal{S}$-*невырожденной*, если она не является $\mathcal{S}$-вырожденной.

Определение 31. Если $\mathcal{S}$ — подполукольцо некоторого коммутативного кольца R, то матрица $A \in M_{mn}(\mathcal{S})$ называется R-*вырожденной*, если $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ или $\mathbf{x}A = \mathbf{0}$ для некоторого ненулевого вектора $\mathbf{x} \in R^n$. Матрица $A \in M_{mn}(\mathcal{S})$ называется R-*невырожденной*, если она не является R-вырожденной.

Определение 32. *Би-определителем* матрицы $A = [a_{i,j}] \in M_n(\mathcal{S})$ называется пара чисел $(\|A\|^+, \|A\|^-)$, где

$$\|A\|^+ = \sum_{\sigma \in \mathfrak{A}_n} a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}, \ \|A\|^- = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n \setminus \mathfrak{A}_n} a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)},$$

где $\mathfrak{A}_n \subseteq \mathfrak{S}_n$ обозначает подгруппу четных подстановок.

Определение 33. Преобразование T называется (P, Q, B)-*оператором*, если существуют перестановочные матрицы P и Q и матрица B без нулевых элементов, такие, что $T(X) = P(X \circ B)Q$ для всех $X \in M_{m,n}(\mathcal{S})$ или, если $m = n$, $T(X) = P(X \circ B)^t Q$ для всех $X \in M_n(\mathbb{F})$; (P, Q, B)-оператор называется (P, Q)-*оператором,* если $B = J$, здесь и далее через J обозначена матрица, все элементы которой равны единице.

Теорема 34. *(Теорема 4.3.2) Пусть $T : M_n(\mathcal{S}) \to M_n(\mathcal{S})$ — сюръективный линейный оператор. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *Оператор T сохраняет множество $\mathcal{S}$-вырожденных матриц,*
2. *Оператор T сохраняет множество $\mathcal{S}$-невырожденных матриц,*
3. *Оператор T — (P, Q, B)-оператор и элементы матрицы B обратимы в полукольце $\mathcal{S}$.*

Теорема 35. *(Теорема 4.3.10) Пусть $T : M_n(\mathcal{S}) \to M_n(\mathcal{S})$ — сюръективный линейный оператор. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *Оператор T сохраняет множество R-вырожденных матриц;*
2. *Оператор T сохраняет множество R-невырожденных матриц*

3. *Оператор T имеет вид $T(X) = PDXEQ$ для всех $X \in M_n(\mathcal{S})$ или $T(X) = PDX^tEQ$ для всех $X \in M_n(\mathcal{S})$, где P и Q — некоторые матрицы перестановки, D и E — обратимые диагональные матрицы.*

Здесь матрицы P, Q определены единственным образом, а матрицы D, E определены единственным, с точностью до обратимого скалярного множителя, образом.

Теорема 36. *(Теорема 4.3.8) Пусть отображение $T : M_n(\mathcal{S}) \to M_n(\mathcal{S})$ является сюръективным и линейным. Тогда би-определитель $(\|T(X)\|^+, \|T(X)\|^-) = (\|X\|^+, \|X\|^-)$ для всех $X \in M_n(\mathcal{S})$ в том и только том случае, когда отображение T имеет вид $T(X) = PDXEQ$ для всех $X \in M_n(\mathcal{S})$ или $T(X) = PDX^tEQ$ для всех $X \in M_n(\mathcal{S})$, где P и Q — некоторые матрицы перестановки одинаковой четности, D и E — обратимые диагональные матрицы, удовлетворяющие условию $(\|DE\|^+, \|DE\|^-) = (1, 0)$. Матрицы P, Q определяются единственным образом, а матрицы D, E определены единственным образом с точностью до обратимого скалярного множителя.*

Определитель является многочленом от коэффициентов матрицы. Перейдем к рассмотрению фробениусовых эндоморфизмов для многочленов от матриц. Остановимся на случае собственных многочленов, т.е. представимых в виде произведения длинных коммутаторов.

Теорема 37. *(Теорема 4.5.17) Пусть антинегативное полукольцо $\mathcal{S}$ содержит полукольцо неотрицательных целых чисел $\mathbb{Z}_+$,*

$$f(x_1, \ldots, x_{m_k}) = [[\ldots[[x_1, x_2], x_3], \ldots], x_{m_1}] \cdot \ldots \cdot [[\ldots[x_{m_{k-1}+1}, x_{m_{k-1}+2}], \ldots], x_{m_k}]$$

— многочлен с целыми коэффициентами, $f_+(x_1, \ldots, x_{m_k})$ — многочлен, состоящий из всех мономов с положительными коэффициентами, входящих в многочлен f, $f_-(x_1, \ldots, x_{m_k})$ — многочлен, состоящий из всех мономов многочлена f, имеющих отрицательные коэффициенты,

$$\mathcal{V}(P_{m_1,\ldots,m_k}) = \{(X_1, X_2, \ldots, X_{m_k}) \in (M_n(\mathcal{S}))^{m_k} | f_+(X_1, \ldots, X_{m_k}) = f_-(X_1, \ldots, X_{m_k})\},$$

$T : M_n(\mathcal{S}) \to M_n(\mathcal{S})$ — биективное линейное отображение. Пусть отображение T сохраняет множество $\mathcal{V}(P_{m_1,\ldots,m_k})$. Тогда существует матрица перестановки $P \in M_n(\mathcal{S})$, такая, что $T(X) = PXP^{-1}$ для всех $X \in M_n(\mathcal{S})$ или $T(X) = PX^tP^{-1}$ для всех $X \in M_n(\mathcal{S})$.

В главе 5, на основе развитой в предыдущей главе техники, характеризуются аддитивные отображения матриц над полукольцами, сохраняющие комбинаторные свойства матриц, а именно, примитивность наборов матриц для отображений декартовой степени пространства матриц в себя и свойство матрицы быть регулярной (почти-регулярной) турнирной матрицей.

Пусть $M^k(\mathcal{S}) = \underbrace{M_n(\mathcal{S}) \times \ldots \times M_n(\mathcal{S})}_{k \text{ раз}}$, $M_n(\mathbb{B})^{(0)}$ обозначает множество матриц с нулевой диагональю над бинарным булевым полукольцом.

Для примитивных наборов матриц доказана следующая характеризация фробениусовых эндоморфизмов:

Теорема 38. *(Теорема 5.1.61) Пусть $2 \le k < n$ и $T : M_n^k(\mathcal{S}) \to M_n^k(\mathcal{S})$ является сюрьективным аддитивным отображением, которое сохраняет примитивность наборов матриц, тогда найдутся матрицы перестановок $P, Q_i, i = 1, \ldots, k$, перестановка $\sigma : \{1, 2, \ldots, k\} \to \{1, 2, \ldots, k\}$ и матрицы $B_i \in M_n(\mathcal{S}), i = 1, \ldots, k$, все элементы которых являются ненулевыми, такие, что $T(X^{(r)}) = (P(X \circ K \circ B_r)P^t + Q_r(X \circ I \circ B_r)Q_r^t)^{(\sigma(r))}$ для всех $r = 1, \ldots, k$ или $T(X^{(r)}) = (P(X^t \circ K \circ B_r)P^t + Q_r(X \circ I \circ B_r)Q_r^t)^{(\sigma(r))}$ для всех $r = 1, \ldots, k$, где $(X^{(r)}) \in M_n^k(\mathcal{S})$ обозначает набор матриц, в котором матрица $X \in M_n(\mathcal{S})$ расположена в r-той позиции, а матрицы во всех остальных позициях нулевые.*

Для регулярных (почти-регулярных) турнирных матриц доказано, что, если $n > 3$ и $T : M_n(\mathbb{B})^{(0)} \to M_n(\mathbb{B})^{(0)}$ является сюрьективным аддитивным отображением, которое сохраняет регулярные турнирные матрицы, в случае нечетного n, и почти-регулярные турнирные матрицы, если n — четное число, то отображение T является (P, P^t)-оператором (см. теорему 5.2.27).

Глава 6 посвящена полулинейным отображениям, сохраняющим некоммутативный определитель.

В этой главе модифицирован метод матричных деформаций, ранее использовавшийся только для изучения фробениусовых эндоморфизмов матриц над полями. Предложенное развитие метода матричных деформаций позволило в случае матриц над некоммутативными кольцами свести задачу характеризации полулинейных отображений, сохраняющих вырожденность, к задаче характеризации полулинейных отображений, сохраняющих ранг один, решенной в работе Хуа[13], и получить следующий некоммутативный аналог теоремы Дьедонне:

Теорема 39. *(Теорема 6.3.8) Пусть D — тело, являющееся K-алгеброй над некоторым полем K, отличным от $\mathbb{F}_2$.*

Рассмотрим биективное, σ-полулинейное над K отображение $T : M_n(D) \to M_n(D)$, взаимооднозначное на множестве вырожденных матриц.

Тогда отображение T имеет вид $T(X) = PX^\mu Q$ для всех матриц $X \in M_n(D)$ или имеет вид $T(X) = P(X^\mu)^t Q$ для всех матриц $X \in M_n(D)$. Здесь $P,\ Q \in GL_n(D)$, μ — автоморфизм в первом случае или анти-автоморфизм — во втором — тела D, σ-полулинейный над K, причем матрицы P и Q определены единственным, с точностью до обратимого скалярного множителя, образом, μ единственен с точностью до внутреннего автоморфизма тела D.

[13]L.K. Hua, A theorem on matrices over sfield and its applications // J. Chinese Math. Soc. (N.S) **1** (1951) 110-163.

В качестве следствия из этой теоремы получен также аналог теоремы Фробениуса для матриц над телом:

Теорема 40. *(Теорема 6.4.2) Пусть D — тело, являющееся алгеброй над некоторым полем K, отличным от $\mathbb{F}_2$. Пусть $T : M_n(D) \to M_n(D)$ — σ-полулинейное над K отображение, сохраняющее определитель Дьедонне. Если D является бесконечномерным расширением K, предположим, что отображение T является сюръективным.*

Тогда отображение T имеет такой же вид, как в теореме 39, причем $\det(PQ) = \overline{1}$.

Фробениусовы эндоморфизмы пространства в большой степени играют роль его симметрий. Итогом исследований, представленных в предыдущих главах, является характеризация ряда фробениусовых эндоморфизмов пространства матриц. В частности показано, что пространство матриц допускает достаточно большое семейство таких симметрий. В главе 7 на примере пространства многочленов продемонстрировано, что в других классических линейных пространствах ответ может быть принципиально другим. Соответствующие результаты, как и методы доказательства, удалось сформулировать в матричных терминах.

Рассматриваются следующие типы многочленов от одной переменной:

Определение 41. Многочлен $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ называется
- *гиперболическим*, если все его корни являются вещественными;
- *эллиптическим*, если он не имеет вещественных корней;
- *положительным*, если $p(x) > 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$;
- *неотрицательным*, если $p(x) \geq 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

В главе 7 исследованы линейные операторы на пространстве всех многочленов с вещественными коэффициентами, обозначается $\mathbb{R}[x]$, или на пространстве многочленов степени не выше n с вещественными коэффициентами, обозначается $\mathbb{R}_n[x]$, которые сохраняют один из классов многочленов, введеных выше. А именно, мы будем называть линейный оператор, действующий на пространстве $\mathbb{R}[x]$ или $\mathbb{R}_n[x]$, отображением, сохраняющим *гиперболичность, эллиптичность, положительность, неотрицательность*, если оно сохраняет множество гиперболических, эллиптических, положительных, неотрицательных многочленов, соответственно. Проблема характеризации фробениусовых эндоморфизмов пространства многочленов восходит к работе Полиа и Шура[14]. В частности в этой работе ими доказана характеризация диагональных линейных отображений, сохраняющих гиперболичность. В дальнейшем это направление интенсивно развивалось.

[14] G. Pólya, I. Schur, Über zwei Arten von Faktorenfolgen in der Theorie der algebraischen Gleichungen // J. Reine Angew. Math. **144** (1914), 89–113.

Однако несмотря на существенный прогресс в вопросах характеризации линейных отображений, сохраняющих гиперболичность, вопрос характеризации линейных отображений, сохраняющих эллиптичность, оставался открытым. Седьмая глава посвящена решению этого вопроса. Рассмотрены три класса отображений: линейные отображения, сохраняющие множество положительных многочленов, множество неотрицательных многочленов или множество эллиптических многочленов. Легко видеть, что любой линейный оператор на пространстве $\mathbb{R}[x]$ можно представить в виде линейного дифференциального оператора, т.е. в виде формального степенного ряда $\frac{d}{dx}$ с полиномиальыми коэффициентами. Поэтому достаточно исследовать линейные дифференциальные операторы конечного и бесконечного порядка на пространстве $\mathbb{R}[x]$. Как оказывается, существует гораздо меньше линейных операторов, сохраняющих любое из перечисленных множеств, чем линейных операторов, сохраняющих гиперболичность. Более точно, два основных результата главы 7 формулируются следующим образом:

Теорема 42. *(Теорема 7.1.5) Пусть $U_Q : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ — дифференциальный оператор порядка $k \geq 1$ с полиномиальными коэффициентами $Q = (q_0(x), q_1(x), \ldots, q_k(x))$, $q_i(x) \in \mathbb{R}[x]$, $i = 0, \ldots, k$, $q_k(x) \not\equiv 0$, т.е.*

$$U_Q = q_0(x) + q_1(x)\frac{d}{dx} + q_2(x)\frac{d^2}{dx^2} + \ldots + q_k(x)\frac{d^k}{dx^k}.$$

Тогда для произвольной последовательности коэффициентов Q оператор U_Q не сохраняет множество неотрицательных (соответственно, положительных, эллиптических) многочленов степени $2k$ и выше.

Следствие 43. *(Следствие 7.1.6) Линейный дифференциальный оператор конечного положительного порядка, который сохраняет множество неотрицательных (соответственно, положительных, эллиптических) многочленов в $\mathbb{R}[x]$, имеет вид $\alpha_0 \cdot \mathbf{1}$, где $\mathbf{1}$ — тождественный оператор на пространстве многочленов, для некоторого положительного $\alpha_0 \in \mathbb{R}$.*

Замечание 44. *Заметим, что в отличие от случая операторов конечного порядка, существует много линейных дифференциальных операторов бесконечного порядка, которые сохраняют положительность. Первым примером отображения такого типа является следующий:*

$$\left(1 - \frac{d}{dx}\right)^{-1} = 1 + \frac{d}{dx} + \frac{d^2}{dx^2} + \ldots$$

Случай линейного дифференциального оператора бесконечного порядка, имеющего постоянные коэффициенты, допускает полную характеризацию. А именно, получена следующая теорема, усиливающая результаты Ремака[15] и Гурвица[16] (см. также задачу 38 из книги Полиа и Сеге[17]):

Теорема 45. *(Теорема 7.1.9) Пусть $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots)$ — бесконечная последовательность вещественных чисел, отличная от тождественно нулевой. Рассмотрим линейный дифференциальный оператор бесконечного порядка с постоянными коэффициентами, заданный последовательностью α:*

$$U_\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{d}{dx} + \alpha_2 \frac{d^2}{dx^2} + \ldots + \alpha_k \frac{d^k}{dx^k} + \ldots .$$

Тогда для отображения U_α следующие условия эквивалентны:

1. *U_α сохраняет положительность.*
2. *U_α сохраняет неотрицательность.*
3. *Для произвольного неотрицательного многочлена $p(x) = a_k x^k + \ldots + a_1 x + a_0$ справедливо*
$$U_\alpha(p)(0) = a_0\alpha_0 + a_1\alpha_1 + \ldots + k!a_k\alpha_k \geq 0;$$
4. *Следующая бесконечная ганкелевая матрица*
$$\begin{pmatrix} \alpha_0 & 1!\alpha_1 & 2!\alpha_2 & \ldots & l!\alpha_l & \ldots \\ 1!\alpha_1 & 2!\alpha_2 & 3!\alpha_3 & \ldots & (l+1)!\alpha_{l+1} & \ldots \\ 2!\alpha_2 & 3!\alpha_3 & 4!\alpha_4 & \ldots & (l+2)!\alpha_{l+2} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ l!\alpha_l & (l+1)!\alpha_{l+1} & (l+2)!\alpha_{l+2} & \ldots & (2l)!\alpha_{2l} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$
задает неотрицательно определенную квадратичную форму.
5. *Существует положительная мера μ_α на $\mathbb{R}$, все моменты которой удовлетворяют условию $\int_{-\infty}^{\infty} t^k d\mu_\alpha(t) = k!\alpha_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. В этом случае отображение U_α может быть представлено в виде*
$$U_\alpha(p)(x) = p(x) \star \mu_\alpha,$$
где $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ — произвольный многочлен и $\star$ обозначает следующее отображение типа свертки:
$$U_\alpha(p)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) d\mu(t - x).$$

[15] R. Remak, Bemerkung zu Herrn Stridsbergs Beweis des Waringschen Theorems, Math. Ann. **72** (1912), 153–156.

[16] A. Hurwitz, Über definite Polynome, Math. Ann. **73** (1913), 173–176.

[17] G. Pólya, G. Szegö, Problems and theorems in analysis. II. Theory of functions, zeros, polynomials, determinants, number theory, geometry. Translated from the German by C. E. Billigheimer. Reprint of the 1976 English translation. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1998. xii+392 pp.

Основные результаты диссертации, выносимые на защиту.

1. Предложены новые универсальные методы исследования фробениусовых эндоморфизмов, позволившие решить вопросы характеризации фробениусовых эндоморфизмов и отыскать взаимосвязи между фробениусовыми эндоморфизмами, возникающими в различных областях математики.

2. Введен метод элементарных операторов и с его помощью охарактеризованы сюръективные отображения матриц над полями, сохраняющие нули однородных полилинейных многочленов. В качестве следствия получено решение проблемы Капланского-Уоткинса 1976г. (теоремы 1.2.1, 1.2.2, 1.2.6, 1.3.3).

3. Введен метод цепей и с его помощью охарактеризованы аддитивные отображения, монотонные относительно регулярных порядков (теорема 2.4.2). Для ряда порядков доказана автоматическая биективность таких отображений (теоремы 2.4.5 и 2.4.8). Доказано существование небиективных аддитивных отображений, монотонных, относительно минус-порядка.

4. Охарактеризованы линейные отображения, монотонные относительно порядков, порожденных групповой обратной матрицей (теорема 2.3.30).

5. Охарактеризованы линейные отображения матриц над полями, сохраняющие ранговые свойства матриц, тем самым решены проблемы Бисли 1999г. (теоремы 3.2.13, 3.2.15, 3.1.5, 3.1.10, 3.1.17 и 3.1.18).

6. Получены полукольцевые аналоги теорем Фробениуса и Дьедонне, характеризующих фробениусовы эндоморфизмы матриц над полями (теоремы 4.3.2, 4.3.10 и 4.3.8).

7. Охарактеризованы аддитивные фробениусовы эндоморфизмы матриц над полукольцами для комбинаторных свойств матриц: примитивность набора матриц, свойство матрицы быть регулярной или почти-регулярной турнирной матрицей (теоремы 5.1.61 и 5.2.27).

8. Разработана некоммутативная модификация метода матричных деформаций. С его использованием охарактеризованы полулинейные отображения матриц над телом, сохраняющие определитель Дьедонне (теоремы 6.3.8 и 6.4.2).

9. Развит линейно-алгебраический подход к изучению фробениусовых эндоморфизмов пространств многочленов. Доказано отсутствие линейных дифференциальных операторов конечного порядка на пространстве многочленов достаточно высокой степени, сохраняющих множество

положительных многочленов, множество неотрицательных многочленов или множество эллиптических многочленов (теоремы 7.1.5, 7.1.6, 7.1.9).

Автор выражает глубокую благодарность своему Учителю профессору Александру Васильевичу Михалеву за направляющие советы и всестороннюю поддержку. Также автор благодарит коллектив кафедры Высшей алгебры Механико-Математического факультета МГУ: И. В. Аржанцева, В. А. Артамонова, Е. И. Бунину, Э. Б. Винберга, Е. С. Голода, М. В. Зайцева, А. И. Зобнина, Н. К. Ильину, В. А. Исковских, В. Н. Латышева, В. Т. Маркова, Ю. Г. Прохорова, Д. А. Тимашева, И. А. Чубарова, А. Л. Шмелькина за ценные обсуждения и творческую дружественную атмосферу на кафедре, Л. Г. Черныш за помощь при подготовке диссертации, М. Акиан, А. А. Алиеву, Л. Б. Бисли, И. И. Богданова, Ю. Борсеа, С. Гобера, Б. Кузьму, Ч.-К. Ли, О. В. Маркову, А. А. Михалева, Б. Т. Поляка, О. А. Пшеницыну, А. М. Райгородского, Б. Шапиро, П. Шемерла за интересную и плодотворную совместную работу. Наконец, автор благодарит свою семью за понимание и любовь.

Основные публикации автора по теме диссертации

1. A. Guterman, Linear preservers for matrix inequalities and partial orderings, Linear Algebra and Applications, **331** (2001) 75-87

2. A. E. Guterman, Frobenius type theorems in the noncommutative case, Linear and Multilinear Algebra, **48**, 4, (2001) 293-312

3. A. Guterman, Linear preservers for Drazin partial order, Communications in Algebra, **29**, 9, (2001) 3905-3917

4. А. Э. Гутерман, Тождества матриц, близких к треугольным, Математический сборник, **192**, 6, (2001) 3-15

5. А. Э. Гутерман, Линейные отображения, сохраняющие определитель Дьедонне над произвольным телом, Успехи математических наук, **57**, 4, (2002) 171-172

6. A. E. Guterman, Monotone matrix maps preserve non-maximal rank, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, **235** (2003) 311-328

7. А. Э. Гутерман, А. В. Михалев, Общая алгебра и линейные отображения, сохраняющие матричные инварианты, Фундаментальная и прикладная математика, **9**, 1, (2003) 83-101

8. А. А. Алиева, А. Э. Гутерман, Линейные отображения, сохраняющие коммутативность ранга, Вестник Московского университета, Сер. 1, математика, механика, **6** (2003) 11-17

9. А. Э. Гутерман, Преобразования неотрицательных целочисленных матриц, сохраняющие определитель, Успехи математических наук, **58**, 6, (2003) 147-148

10. Л. Б. Бисли, А. Э. Гутерман, LP-проблемы для ранговых неравенств над полукольцами: факторизационный ранг, Современная математика и приложения. Алгебра, **13** (2004) 53-70

11. A. A. Alieva, A. E. Guterman, Linear preservers of rank permutability, Linear Algebra and its Applications, **384** (2004) 97-108

12. L. B. Beasley, A. E. Guterman, S.-G. Lee, S.-Z. Song, Linear transformations preserving the Grassmannian over $M_n(\mathbb{Z}+)$, Linear Algebra and its Applications, **393** (2004) 39-46

13. Л. Б. Бисли, А. Э. Гутерман, С.-Ч. Йи, LP-проблемы для ранговых неравенств над полукольцами: граничные ранги,
Фундаментальная и прикладная математика, **10**, 2, (2004) 3-21

14. А. А. Алиева, А. Э. Гутерман, Перестановочность ранга и аддитивные операторы, сохраняющие некоторые условия на ранг произведения,
Фундаментальная и прикладная математика, **10**, 4, (2004) 3-14

15. О. А. Вайсман, А. Э. Гутерман, Факторизационный ранг для неотрицательных матриц,
Чебышевский сборник, **6**, 4, (2005) 64-67

16. L. B. Beasley, A. E. Guterman, S.-G. Lee, S.-Z. Song, Linear preservers of zeros of matrix polynomials,
Linear Algebra and its Applications, **401** (2005) 325-340

17. L. B. Beasley, A. E. Guterman, Rank inequalities over semirings,
Journal of Korean Mathematical Society, **42**, 2, (2005) 223-241

18. A. A. Alieva, A. E. Guterman, Monotone linear transformations on matrices are invertible,
Communications in Algebra, **33** (2005) 3335-3352

19. L. B. Beasley, A. E. Guterman, Y.-B. Jun, S.-Z. Song, Linear preservers of extremes of rank inequalities over semirings: the row and column ranks,
Linear Algebra and its Applications, **413** (2006) 495-509

20. A. A. Alieva, A. E. Guterman, B. Kuzma, Rank-permutable additive mappings,
Linear Algebra and its Applications, **414** (2006) 607-616

21. L. B. Beasley, A. E. Guterman, C. L. Neal, Linear preservers for Sylvester and Frobenius bounds on matrix rank,
Rocky Mountain Journal of Mathematics, **86**, 1, (2006) 67-80

22. Л.-Б. Бисли, А. Э. Гутерман, К-Т. Канг, С.-З. Сонг, Идемпотентные матрицы и мажорирование,
Фундаментальная и прикладная математика, **13**, 1, (2007) 11-29

23. A. E. Guterman, Transformations preserving matrix invariants over semirings,
Idempotent and tropical mathematics and problems of mathematical physics,
Москва: Издательство НМУ, **1** (2007) 84-90

24. L. B. Beasley, A. E. Guterman, S.-G. Lee, S.-Z. Song, Frobenius and Dieudonne theorems over semirings,
Linear and Multilinear Algebra, **55**, 1, (2007) 19-34

25. И. И. Богданов, А. Э. Гутерман, Монотонные отображения матриц, заданные групповой обратной, и одновременная диагонализуемость, Математический сборник, **198**, 1, (2007) 3-20

26. А. Э. Гутерман, Монотонные аддитивные отображения матриц, Математические заметки, **81**, 5, (2007) 681-692

27. A. E. Guterman, Rank and determinant functions for matrices over semirings, London Mathematical Society Lecture Notes, **347** (2007) 1-33

28. A. Guterman, B. Shapiro, On linear operators preserving the set of positive polynomials,
Journal of Fixed Point Theory and Applications, **3**, 2, (2008), 411-429

29. L. B. Beasley, A. E. Guterman, Operators preserving primitivity for matrix pairs Matrix Methods: Theory, Algorithms, Applications, Word Scientific Publishing (2008) 2-20

30. А. Гутерман, Б. Кузьма, Характеризация отображений, строго сохраняющих нули матричных многочленов,
Успехи математических наук, **63**, 5, (2008), 184-185

В работе [7], совместной с А.В. Михалевым — научным консультантом диссертанта, А. В. Михалеву принадлежат разделы 4.7, 4.8 и 4.11, а диссертанту остальные разделы работы.

В работах [8,11,14,18], совместных с дипломницей диссертанта А.А. Алиевой, диссертанту принадлежит формулировка основных результатов и идея их доказательств, а Алиевой — техническая часть доказательств результатов о биективных отображениях. Доказательства теорем о небиективных отображениях принадлежат диссертанту.

В работе [20], совместной с А.А. Алиевой и Б. Кузьмой, диссертанту принадлежит формулировка основных результатов и идея доказательств лемм и теорем параграфов 2 и 3, Кузьме принадлежит идея доказательств леммы 4.1 и теоремы 4.2 и идея примера 5.2, техническая проработка доказательств принадлежит всем трем авторам в равной мере.

В работе [15], совместной с аспиранткой диссертанта О.А. Вайсман (О.А. Пшеницыной), формулировка теорем и основная идея доказательства предложены диссертантом, техническая реализация предложенной идеи принадлежит Вайсман.

В работе [25], совместной с И.И. Богдановым, диссертанту принадлежат формулировка и доказательство основного результата, Богданову принадлежит идея рассматривать одновременную диагонализуемость матриц, позволившая применить метод цепей, предложенный диссертантом.

В работах [10,17], совместных с Л.Б. Бисли, работе [13], совместной с Л.Б. Бисли и С.-Ч. Йи, и работе [19], совместной с Л.Б. Бисли, Й.-Б. Джуном и С.-З. Сонгом, диссертант разрабатывал линейно-алгебраические методы и подходы к решению поставленных задач, а Л.Б. Бисли — комбинаторные. Решаемые в этих статьях проблемы были поставлены Бисли на конференции в Лиссабоне в 1999г. для матриц над полями. Диссертантом предложены их полукольцевые аналоги. Йи, Джуну и Сонгу принадлежат доказательства технических лемм об отсутствии (P, Q, B)-операторов, сохраняющих транспонирование, среди фробениусовых эндоморфиизмов для рассматриваемого инварианта.

В работах [12,16,24], совместных с Л.Б. Бисли, С.-Г. Ли и С.-З. Сонгом, и в работе [29], совместной с Л.Б. Бисли, диссертанту принадлежит формулировка и основная идея доказательства всех результатов, а также развитие техники доказательства в части применения линейно-алгебраических методов, Бисли принадлежит доказательство основного вспомогательного утверждения об общем виде линейных биективных операторов над полукольцами и предложение применять комбинаторные методы для упрощения структуры некоторых доказательств, Ли и Сонгу принадлежит техническое доказательсво вспомогательных лемм об отборе отображений, сохраняющих рассматриваемый инвариант, среди стандартных отображений.

В работе [21], совместной с Л.Б. Бисли и К. Нил, решена проблема, поставленная Бисли на конференции в Лиссабоне в 1999г. Бисли разрабатывал комбинаторные методы и подходы к решению поставленных задач, однако только добавление к ним разрабатываемых диссертантом линейно-алгебраических методов позволило решить задачу. К. Нил принадлежат части доказательств вспомогательных лемм 3.3 и 4.6, касающиеся выделения из всех стандартных отображений именно тех, которые сохраняют данный инвариант.

В работе [22], совместной с Л.Б. Бисли, К.-Т. Кангом и С.-З. Сонгом, соавторами диссертанта инициированы проведенные исследования, рассмотрены частные случаи при малых n и сформулирована первоначальная версия результата об общем виде идемпотентной матрицы над бинарной булевой алгеброй. Диссертантом сформулирован окончательный вариант теоремы об общем виде идемпотентной матрицы, предложено охарактеризовать множество матриц, мажорируемых данной, сформулирован окончательный результат о мажорировании и предложена концепция доказательства, реализация основной части которой принадлежит диссертанту. Техническая часть доказательств лемм из секции 4 проведена Бисли.

В работе [28], совместной с Б. Шапиро, диссертанту принадлежит идея применить линейно-алгебраический подход к решению проблемы Полиа-Шура, а Шапиро дополнил этот подход применением методов функционального анализа, что позволило им совместно решить указанную проблему. Диссертантом доказано отсутствие линейных дифференциальных операторов конечного порядка на пространстве многочленов достаточно высокой степени, сохраняющих множество положительных многочленов, множество неотрицательных многочленов или множество эллиптических многочленов (теорема A).

В работе [30], совместной с Б. Кузьмой, основной результат работы получен путем внедрения предложенного диссертантом метода элементарных операторов и предложенного Кузьмой подхода, базирующегося на идемпотентах. Неулучшаемость полученных результатов при $k = 2$ доказана Кузьмой, а при $k > 2$ доказана диссертантом.