Московский Государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 512.813.4

Минченко Андрей Николаевич

О ПОЛУПРОСТЫХ ПОДАЛГЕБРАХ ОСОБЫХ АЛГЕБР ЛИ

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2008

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научные руководители:

доктор физико-математических наук,
профессор Эрнест Борисович Винберг;
кандидат физико-математических наук,
доцент Иван Владимирович Аржанцев.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
профессор Николай Александрович Вавилов
(Санкт-Петербургский государственный университет);
кандидат физико-математических наук,
ведущий научный сотрудник Андрей Владимирович Алексеевский
(НИИ физико-химической биологии имени А. Н. Белозерского МГУ имени М. В. Ломоносова).

Ведущая организация:

Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова.

Защита диссертации состоится 26 декабря 2008 г. в 16 ч. 40 мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 26 ноября 2008 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д.501.001.84 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор А. О. Иванов.

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Диссертация посвящена проблеме классификации полупростых подалгебр полупростых алгебр Ли над полями $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$. Этот вопрос тесно связан с классификацией однородных пространств групп Ли.[1] Проблемой описания подалгебр алгебр Ли занимались многие математики.

Первый значимый прогресс в этом направлении был достигнут Э. Картаном[2] и Г. Вейлем[3], которые развили теорию представлений полупростых комплексных алгебр Ли. Тем самым была получена классификация полупростых подалгебр в A_n. Описание полупростых подалгебр других классических алгебр Ли B_n, C_n и D_n было дано А. И. Мальцевым[4], им же частично были исследованы подалгебры особых алгебр Ли G_2 и F_4.

Идея Мальцева использовать теорию представлений для классификации полупростых подалгебр полупростых алгебр Ли, была реализована Е. Б. Дынкиным[5] для классификации полупростых подалгебр особых комплексных алгебр Ли. А именно, Дынкин рассматривал классификацию с точностью до *линейной сопряженности.* (Подалгебры $\mathfrak{h}_1$ и $\mathfrak{h}_2$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называются линейно сопряженными, если для любого линейного представления алгебры $\mathfrak{g}$ образы подалгебр $\mathfrak{h}_1$ и $\mathfrak{h}_2$ сопряжены в алгебре матриц.) Сопряженные подалгебры линейно сопряжены, и в подавляющем большинстве случаев верно обратное. Однако полный список линейно сопряженных несопряженных полупростых подалгебр особых комплексных алгебр Ли получен не был. Этот список получен автором [1], что в некотором смысле завершает классификацию полупростых подалгебр полупростых комплексных алгебр Ли.

Случай произвольного алгебраически замкнутого поля (с небольшими ограничениями на характеристику) рассматривался Либеком и Сейтцем[6]. Они классифицировали простые подалгебры особых алгебр Ли с точностью до сопряженности, а также нашли их централизаторы.

В предположении, что известна классификация полупростых подалгебр полупростой комплексной алгебры $\mathfrak{g}$ с точностью до сопряженности, а так-

[1] Онищик А. Л., *Топология транзитивных групп преобразований*, Физматлит, Москва, 1995.

[2] Cartan É., *Sur la structure des groupes des transformations finit et continus*, Thesis, Paris, 1894.

Cartan É., *Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane*, Bull. Soc. Math. France **41** (1913), 53—96.

[3] Weyl H., *Theorie der Darstellung kontinuierlicher halb-einfacher Gruppen durch lineare Transformationen*, Math. Zeitschr. **I—23** (1925), 271—309; **II—24** (1926), 328—376; **III—24** (1926), 377—395. Русский перевод (неполный) в УМН, вып. 4 (1938), 201—257.

[4] Мальцев А. И., *О полупростых подгруппах групп Ли*, Изв. АН СССР, сер. мат. **8** : 4 (1944), 143—174.

[5] Дынкин Е. Б., *Полупростые подалгебры полупростых алгебр Ли*, Матем. сб. **30**(72) : 2 (1952), 349—462.

[6] Liebeck M. W., Seitz G. M., *Redictive subgroups of exceptional algebraic groups*, Mem. Amer. Math. Soc. **121** : 580 (1996), 1—111.

же известны их нормализаторы в $\mathrm{Int}\,\mathfrak{g}$, Ф. И. Карпелевич[7] предложил метод получения классификации полупростых подалгебр вещественных форм алгебры $\mathfrak{g}$ с точностью до *квазисопряженности.* (Если $\mathfrak{r}$ — вещественная форма $\mathfrak{g}$, то $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2 \subset \mathfrak{r}$ квазисопряжены, если существует автоморфизм $\varphi \in \mathrm{Int}\,\mathfrak{g}$ такой, что $\varphi(\mathfrak{r}) = \mathfrak{r}$ и $\varphi(\mathfrak{s}_1) = \mathfrak{s}_2$). Таким образом, им была получена классификация с точностью до квазисопряженности полупростых подалгебр классических вещественных алгебр Ли.

Некоторые результаты по проблеме описания подалгебр особых вещественных алгебр Ли были получены в работах Берже, Вольфа, Грэя, Комракова.[8] А именно, были найдены вещественные формы комплексных пар $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ в некоторых специальных случаях. (Комплексная (вещественная) пара — это набор из полупростой комплексной (вещественной) алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и ее полупростой подалгебры $\mathfrak{h}$. Вещественная форма комплексной пары — это набор из вещественной формы $\mathfrak{r}$ алгебры $\mathfrak{g}$ и вещественной формы $\mathfrak{s}$ алгебры $\mathfrak{h}$ такой, что $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{r}$. Всякая вещественная пара является вещественной формой комплексной пары.) Кроме того, Комраковым был предложен метод получения вещественных форм произвольных пар, зная их в упомянутых выше специальных случаях. Это дает некий способ описания всех полупростых подалгебр полупростых вещественных алгебр Ли, но тем не менее, вопрос о нахождении классов сопряженности остается открытым.

В настоящей диссертации излагается несколько отличное от предыдущего описание вещественных форм произвольных комплексных пар, и на его основе приводится классификация полупростых подалгебр полупростых вещественных алгебр Ли с точностью до сопряженности (и квазисопряженности).

Цель работы

Нахождение всех полупростых подалгебр особых комплексных алгебр Ли, класс линейной сопряженности которых содержит более одного класса сопряженности. Классификация полупростых подалгебр особых вещественных алгебр Ли.

---

[7]Карпелевич Ф. И., *Простые подалгебры вещественных алгебр Ли*, Труды Моск. мат. общ. **4** (1955), 3—112.

[8]Berger M., *Les espaces symétriques noncompacts*, Ann. Ec. Norm. **74** (1957), 85—177.

Wolf J., Gray A., *Homogeneous spaces defined by Lie group automorphisms*, J. Diff. Geom. **2** : 1–2 (1968), 77—-159.

Gray A., *Riemannian manifolds with geodesic symmetries of order 3*, Diff. Geom. **7** (1972), 343—369.

Комраков Б. П., *Редуктивные подалгебры полупростых вещественных алгебр Ли*, ДАН СССР **308** : 3 (1989), 521—525.

Методы исследования

В диссертации используются средства теории полупростых алгебр Ли и их представлений, факты из теории инвариантов представлений групп Ли. Используется метод Алексеевского нахождения групповых централизаторов. Также применяются средства работы с полупростыми вещественными алгебрами Ли, а именно, как с парами $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^\theta)$, где $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли, θ — ее инволютивный автоморфизм. Используется теория симметрических пространств полупростых групп Ли, в частности, описание их геодезических.

Научная новизна

Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем.

1. Завершена классификация Дынкина полупростых подалгебр особых комплексных алгебр Ли. А именно, найдены все классы линейной сопряженности их полупростых подалгебр, нетривиально распадающиеся на классы сопряженности.

2. Найдены групповые централизаторы $Z(\mathfrak{h})$ в группе $\operatorname{Int}\mathfrak{g}$ простых подалгебр $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ ранга более 1, где $\mathfrak{g}$ — особая алгебра Ли.

3. Предложен новый метод классификации инволютивных автоморфизмов простых алгебр Ли в терминах инвариантов действия группы Вейля на множестве инволютивных элементов максимального тора.

4. Дана классификация полупростых подалгебр полупростых вещественных алгебр Ли.

Теоретическая и практическая ценность

Диссертация имеет теоретический характер. Доказанные в диссертации теоремы представляют интерес для специалистов по теории полупростых алгебр Ли и их представлений. В диссертации приводится несколько объемных таблиц, которые могут существенно облегчить работу и вычисления, связанные с полупростыми подалгебрами особых алгебр Ли.

Апробация результатов

Результаты диссертации докладывались на следующих семинарах и конференциях:

1. Семинар “Группы Ли и теория инвариантов” под руководством Э.Б.Винберга и А.Л.Онищика, МГУ (2004 и 2007);

2. Международная алгебраическая конференция, посвященная 250-летию Московского университета и 75-летию кафедры высшей алгебры (Москва, 25 мая —- 2 июня, 2004);
3. Кафедральный семинар кафедры высшей алгебры МГУ (2004);
4. Международная конференция “Группы преобразований”, посвященная 70-летнему юбилею Э. Б. Винберга (Москва, 17 декабря — 22 декабря, 2007);

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в трех работах автора. Список работ приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения и двух глав. Текст диссертации изложен на 111 страницах. Список литературы включает 23 наименования.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** показана актуальность исследуемого вопроса, вкратце изложена его история и сформулированы основные результаты диссертации.

Первая глава

В первой главе получены результаты о полупростых подалгебрах особых комплексных алгебр Ли. В разделе 1.1 помещены определения и утверждения, которые будут использоваться в дальнейшем. В основном, все они были получены в уже упомянутых работах Мальцева и Дынкина.

Вложения $\varphi_i\colon \mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{g}$, $i = 1, 2$, называются *эквивалентными* ($\varphi_1 \sim \varphi_2$), если найдётся такой элемент $\theta \in \operatorname{Int} \mathfrak{g}$, что $\varphi_2 = \theta \circ \varphi_1$. Из классификации вложений нетрудно получить классификацию подалгебр: нужно объединить те классы эквивалентных вложений $\mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{g}$, которые переводятся друг в друга внешним автоморфизмом алгебры $\mathfrak{h}$ (и рассмотреть их образы в $\mathfrak{g}$). Обратно, имея описание подалгебр и зная, какие их внешние автоморфизмы реализуются в $\mathfrak{g}$, можно получить классификацию вложений.

По аналогии с понятием линейной сопряжённости подалгебр возникает понятие линейной эквивалентности вложений. А именно, вложения $\varphi_i\colon \mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{g}$, $i = 1, 2$, линейно эквивалентны $(\varphi_1 \overset{L}{\sim} \varphi_2)$, если для любого представления

$\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ соответствующие представления $\rho \circ \varphi_i$, $i = 1,2$, алгебры $\mathfrak{h}$ изоморфны. Очевидно, что из эквивалентности следует линейная эквивалентность. Имеют место следующие критерии линейной эквивалентности.

Теорема 1 (Дынкин[5]). *Два вложения $\varphi_i\colon \mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{g}$, $i = 1,2$, линейно эквивалентны тогда и только тогда, когда их ограничения на картановскую подалгебру алгебры $\mathfrak{h}$ эквивалентны.*

Теорема 2 (Мальцев[4], Дынкин[5]). *Пусть $\mathfrak{g}$ — простая алгебра Ли и $\varphi_i\colon \mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{g}$, $i = 1,2$, — два вложения. Тогда*

1. *если $\mathfrak{g} \neq \mathfrak{so}_{2n}$, то $\varphi_1 \overset{L}{\sim} \varphi_2 \Longleftrightarrow \pi \circ \varphi_1 \sim \pi \circ \varphi_2$;*

2. *если $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n}$, то $\varphi_1 \overset{L}{\sim} \varphi_2 \Longleftrightarrow \pi \circ \varphi_1 \sim \pi \circ \varphi_2$, $\psi \circ \varphi_1 \sim \psi \circ \varphi_2$,*

где π — представление минимальной размерности алгебры $\mathfrak{g}$ и ψ — полуспинорное представление алгебры $\mathfrak{so}_{2n}$.

Подалгебра полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется *регулярной*, если она нормализуется некоторым максимальным тором группы $\operatorname{Int}\mathfrak{g}$. В частности, регулярные полупростые подалгебры порождены некоторыми корневыми векторами $\mathfrak{g}$ относительно некоторой ее картановской подалгебры. Пусть $\varphi_i\colon \mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{g}$, $i = 1,2$ — вложения.

Теорема 3 (Мальцев[4], Дынкин[5]). *Равносильность $\varphi_1 \sim \varphi_2 \Longleftrightarrow \varphi_1 \overset{L}{\sim} \varphi_2$ имеет место при выполнении любого из условий:*

1. *$\mathfrak{h} \simeq \mathfrak{sl}_2$;*

2. *$\operatorname{Im}\varphi_i$, $i = 1,2$, — регулярные подалгебры;*

3. *$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$, $\mathfrak{sp}_n$, $\mathfrak{so}_{2n+1}$, G_2, F_4.*

Теорема 4 (Мальцев[4], Дынкин[5]). *Пусть в предыдущих обозначениях $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n}$. Тогда*

1. *если вложения φ_1 и φ_2 линейно эквивалентны, но не эквивалентны, то $\varphi_2 = \sigma \circ \varphi_1$, где σ — внешний автоморфизм алгебры $\mathfrak{g}$, определённый элементом ортогональной группы O_{2n};*

2. *вложения φ и $\sigma \circ \varphi$ линейно эквивалентны тогда и только тогда, когда представление $\pi_1 \circ \varphi$ алгебры $\mathfrak{h}$ содержит нулевой вес;*

3. *вложения φ и $\sigma \circ \varphi$ эквивалентны тогда и только тогда, когда представление $\pi_1 \circ \varphi$ имеет нечётномерное ортогональное подпредставление.*

Теоремы 2 и 4 фактически представляют собой классификацию полупростых подалгебр классических алгебр Ли.

Регулярные полупростые подалгебры особых алгебр Ли были классифицированы Дынкиным с точностью до сопряженности. Как правило, регулярные подалгебры одного типа сопряжены. Регулярная редуктивная подалгебра называется *полной*, если она не содержится в качестве собственной подалгебры ни в одной регулярной редуктивной подалгебре того же ранга. Множество регулярных полупростых (соотв. полных регулярных полупростых) подалгебр, содержащих данную подалгебру $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, рассматриваемых с точностью до сопряжённости в $\mathfrak{g}$, мы будем обозначать $\mathcal{R}(\mathfrak{h})$ (соотв. $\widetilde{\mathcal{R}}(\mathfrak{h})$). Стандартными приемами теории полупростых алгебр Ли доказывается

Предложение 1. *Пусть $\mathfrak{h}$ — полупростая подалгебра полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Тогда*

1. *найдётся единственная (с точностью до сопряжённости) подалгебра $\tilde{\mathfrak{r}} \in \widetilde{\mathcal{R}}(\mathfrak{h})$, такая что*
$$\operatorname{rk} \tilde{\mathfrak{r}} = \min_{\mathfrak{l} \in \widetilde{\mathcal{R}}(\mathfrak{h})} \operatorname{rk} \mathfrak{l};$$
2. *если вложения $\varphi_i \colon \mathfrak{h} \hookrightarrow \tilde{\mathfrak{r}} \subset \mathfrak{g}$, $i = 1, 2$, эквивалентны в $\mathfrak{g}$, то элемент $\theta \in \operatorname{Int} \mathfrak{g}$ из определения эквивалентности можно выбрать так, что $\theta(\tilde{\mathfrak{r}}) = \tilde{\mathfrak{r}}$.*

Подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ называется *S-подалгеброй*, если $\mathfrak{h}$ не содержится ни в одной собственной регулярной подалгебре алгебры $\mathfrak{g}$. Понятие S-подалгебры было введено Дынкиным в качестве аналога неприводимой подалгебры алгебры матриц. Дынкин классифицировал все S-подалгебры особых алгебр Ли с точностью до сопряженности.

Пусть $\mathfrak{h}$ — полупростая подалгебра полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Введем обозначение:
$$\mathcal{R}(\mathfrak{h})^L = \bigcup_{\mathfrak{h}' \overset{L}{\sim} \mathfrak{h}} \mathcal{R}(\mathfrak{h}').$$

Запись $\mathfrak{h}' \overset{L}{\sim} \mathfrak{h}$ означает, что $\mathfrak{h}'$ и $\mathfrak{h}$ линейно сопряжены. Множества $\mathcal{R}(\mathfrak{h})$ для простых подалгебр $\mathfrak{h}$ особых алгебр Ли были найдены Дынкиным.

Корангом подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ назовём число $\operatorname{cork} \mathfrak{h} = \operatorname{rk} \mathfrak{g} - \operatorname{rk} \mathfrak{h}$. Для целого неотрицательного числа d обозначим через $m(d)$ минимально возможный ранг редуктивных алгебр Ли размерности d. Мы доказываем следующие утверждения.

Предложение 2. *Пусть $d = \dim \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$. Тогда существует полная регулярная подалгебра, содержащая $\mathfrak{h}$, коранга не менее $m(d)$.*

Предложение 3. *Пусть c, c' — максимальные возможные коранги подалгебр из $\mathcal{R}(\mathfrak{h})^L$, $\mathcal{R}(\mathfrak{h})$ соответственно, причём $c \leqslant 2$. Тогда $c' = c$.*

Предложения 1, 2, 3 являются основным инструментом для получения списка всех простых подалгебр особых алгебр Ли, класс линейной сопряженности которых не совпадает с классом сопряженности. Это делается в разделе 1.2. Приведем примеры рассуждений.

Пусть $\mathfrak{g} = E_6$ и $\mathfrak{h} = B_2^3$ (для обозначения простых алгебр Ли, с точностью до линейной сопряженности, Дынкин использует тип, индекс и, в некоторых случаях, штрихи). Известно, что любая подалгебра из класса линейной сопряженности $\mathfrak{h}$ является S-подалгеброй в $D_5 \subset E_6$. По теореме 4, $\mathfrak{so}_{10}$ содержит две, с точностью до сопряженности, S-подалгебры типа B_2 (заданной присоединенным представлением). Обозначим их через $\mathfrak{h}_1$ и $\mathfrak{h}_2$, а соответствующую алгебру типа D_5 — через $\mathfrak{r}$. Если бы $\mathfrak{h}_1$ и $\mathfrak{h}_2$ были сопряжены в $\mathfrak{g}$, то в силу предложения 1, они были бы сопряжены с помощью элемента, нормализующего $\mathfrak{r}$. Но внешний автоморфизм $\mathfrak{r}$ не реализуется в $\mathfrak{g}$. Следовательно, подалгебры $\mathfrak{h}_1$ и $\mathfrak{h}_2$ не сопряжены.

Пусть $\mathfrak{g} = E_7$ и $\mathfrak{h} = C_4^1$. Известно, что любая подалгебра $\mathfrak{h}'$ из класса линейной сопряженности $\mathfrak{h}$ является S-подалгеброй в E_6 или в A_7. Но по предложению 2 и известной размерности $\mathfrak{z}(\mathfrak{h})$, определяем, что тогда она содержится в некоторой регулярной подалгебре типа E_6. Поскольку все S-подалгебры E_6 типа C_4 сопряжены, получаем, что $\mathfrak{h}'$ и $\mathfrak{h}$ сопряжены, т. е. класс линейной сопряженности $\mathfrak{h}$ не распадается.

На основе полученной классификации простых подалгебр находятся все классы линейной эквивалентности вложений простых алгебр Ли.

Прежде чем приступить к классификации полупростых подалгебр и их вложений, мы сводим задачу к случаям $\mathfrak{g} = E_6$, E_7 или E_8. Это делается в разделе 1.3 при помощи методов теории инвариантов. Там же получены результаты, относящиеся к этой теории, интересные сами по себе. Пусть $H \subset G$ — редуктивная подгруппа редуктивной группы Ли и $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ — соответствующее включение алгебр Ли. Рассмотрим присоединённое действие Ad группы G. Соответствующая алгебра инвариантных полиномов обозначается $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G$. Алгебра ограничений этих функций на подпространство $\mathfrak{h}$ обозначается $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^G$. Её спектр $\mathfrak{h}//G$ совпадает с замыканием множества $\pi_G(\mathfrak{h})$ в $\mathfrak{g}//G$, где $\pi_G\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}//G$ — морфизм факторизации. Пусть $\psi\colon \mathfrak{h}//H \to \mathfrak{h}//G$ — морфизм, отвечающий включению $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^G \subset \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^H$.

Рассмотрим цепочку включений:

$$G_2 \subset D_4 \subset F_4 \subset E_6 \subset E_7. \tag{1}$$

Теорема 5 (Лосев[9])**.** *Следующие условия эквивалентны:*

[9] Losev I. V., *On invariants of a set of elements of a semisimple Lie algebra*, arXiv:math.RT/0512538 (2005).

1. *Для любых двух вложений тора* $\varphi_i\colon \mathfrak{t} \subset \mathfrak{h}$, $i = 1, 2$, *таких что* $\varphi_2 = \operatorname{Ad} g \circ \varphi_1$, $g \in G$, *следует* $\varphi_2 = \operatorname{Ad} h \circ \varphi_1$, $h \in H$;
2. *Для любого полупростого элемента* $h \in H$ *верно* $Gh \cap H = Hh$;
3. *Отображение* ψ *биективно.*

Устанавливается, что условия теоремы 5 выполнены для любого включения $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ из (1), если считать $G = \operatorname{Int} \mathfrak{g}$ и $H = N_G(\mathfrak{h}) \simeq \operatorname{Aut} \mathfrak{h}$.

Теорема 6. *Если* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ *— включение (не обязательно соседних) подалгебр из (1), то*

$$\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^G = \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^H. \tag{2}$$

Доказательство теоремы 6 довольно легко сводится к случаю $\mathfrak{h} = E_6$, $\mathfrak{g} = E_7$, который разбирается при помощи стандартных приемов теории инвариантов.

В разделе 1.4 находятся все классы линейно эквивалентных вложений, которые распадаются на несколько классов эквивалентных вложений. В силу результатов 1.2 и 1.3, остается рассмотреть вложения непростых полупростых алгебр Ли $\mathfrak{h}$ в особые алгебры Ли $\mathfrak{g} = E_6$, E_7, E_8. Основная идея состоит в следующем. Пусть $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$ — разложение в сумму ненулевых идеалов и $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{h}$, $\mathfrak{k}_i \subset \mathfrak{h}_i$, $i = 1, 2$, — картановские подалгебры. Нас интересует, насколько однозначно вложение $\varphi\colon \mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{g}$ определяется по вложению $\varphi|_{\mathfrak{k}}$, а именно, существует ли в классе линейной эквивалентности вложения φ неэквивалентное ему вложение. Вложения φ, класс линейной эквивалентности которых не совпадает с классом эквивалентности, а также соответствующие подалгебры $\varphi(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{g}$, мы называем *интересными*, а в противном случае — *неинтересными*.

Положим $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_i)$, $\mathfrak{z}_i = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k}_i)$, $i = 1, 2$. Имеем $\mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{z}_i$ и коммутант подалгебры $\mathfrak{z}_i$ является полной регулярной подалгеброй в $\mathfrak{g}$.

Предположим, что алгебра $\mathfrak{z}_1$ не содержит простых идеалов типа $D_n (n \geqslant 4)$, E_6, E_7. Тогда, по теореме 3, вложение $\varphi|_{\mathfrak{h}_2}\colon \mathfrak{h}_2 \hookrightarrow \mathfrak{z}_1$ определяется однозначно по вложению $\varphi|_{\mathfrak{k}_2}$, с точностью до сопряжения в $\mathfrak{z}_1$. Далее, если подалгебра $\mathfrak{a}_2 \subset \mathfrak{g}$ не содержит простых идеалов перечисленных выше типов, то вложение $\varphi|_{\mathfrak{h}_1}\colon \mathfrak{h}_1 \hookrightarrow \mathfrak{a}_2$ также определяется однозначно по вложению $\varphi|_{\mathfrak{k}_1}$. Таким образом, получаем, что при сделанных предположениях класс линейной эквивалентности вложения φ совпадает с классом эквивалентности. Аналогично получаем

Предложение 4. *Пусть* φ *— интересное вложение. Тогда в алгебре* $\mathfrak{h}$ *найдётся такой собственный идеал* $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{h}$, *что либо подалгебра* $\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{g}$, *либо* $\mathfrak{z}_1 \subset \mathfrak{g}$ *содержат ровно одну из подалгебр* D_4, D_5, D_6, E_6, E_7 *в качестве простого идеала.*

Далее идет перебор случаев, что приводит в итоге к главному результату первой главы:

Теорема 7. *Пусть* $\mathfrak{g}$ *— особая алгебра Ли и* $\mathfrak{h}$ *— полупростая алгебра Ли. Тогда класс линейной эквивалентности произвольного вложения* $\varphi\colon \mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{g}$ *состоит, как правило, из одного класса эквивалентности. Все исключения перечислены в таблице 1.*

Таблица 1: Случаи распадений классов эквивалентности вложений в особые алгебры Ли

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{h}$	φ^L
E_6	$\mathfrak{sl}_3$	$\varphi_1\colon \mathfrak{h} \hookrightarrow E_6, \quad \varphi_2 = \sigma \circ \varphi_1$
	G_2	$\varphi_1\colon \mathfrak{h} \hookrightarrow E_6, \quad \varphi_2 = \sigma \circ \varphi_1$
	$\mathfrak{so}_5$	$\varphi_1\colon \mathfrak{h} \hookrightarrow D_5, \quad \varphi_2 = \sigma \circ \varphi_1$
E_7	$\mathfrak{sl}_3 + 2\mathfrak{sl}_2$	$\varphi_1\colon \mathfrak{h} \hookrightarrow D_4 + 2A_1, \quad \varphi_2 = \sigma \circ \varphi_1$
	$\mathfrak{sl}_3 + 3\mathfrak{sl}_2$	$\varphi_1\colon \mathfrak{h} \hookrightarrow D_4 + 3A_1, \quad \varphi_2 = \sigma \circ \varphi_1$
E_8	$\mathfrak{h}_0 + \mathfrak{sl}_3$, $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{sl}_3, \mathfrak{so}_5, G_2$	$\varphi_1\colon \mathfrak{h} \hookrightarrow E_6 + A_2, \quad \varphi_2 = \varphi_1 \circ (\mathrm{Id} \times \tau)$
	$\mathfrak{h}_0 + \mathfrak{sl}_3$, $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{so}_8, \mathfrak{sl}_3, 3\mathfrak{sl}_2, 4\mathfrak{sl}_2$	$\varphi_1\colon \mathfrak{h} \hookrightarrow 2D_4, \quad \varphi_2 = \varphi_1 \circ (\mathrm{Id} \times \tau)$
	$\mathfrak{so}_5 + \mathfrak{sl}_4$	$\varphi_1\colon \mathfrak{h} \hookrightarrow D_5 + A_3, \quad \varphi_2 = \varphi_1 \circ (\mathrm{Id} \times \tau)$
	$\mathfrak{sl}_3$	$\varphi_1\colon \mathfrak{h} \hookrightarrow E_6 + A_2, \quad \varphi_2 = \varphi_1 \circ \tau$
	$\mathfrak{sl}_3$	$\varphi_1\colon \mathfrak{h} \hookrightarrow 2D_4, \quad \varphi_2 = (\sigma \times \mathrm{Id}) \circ \varphi_1$

Поясним обозначения в таблице 1: $\varphi^L = \{\varphi_1, \dots \varphi_k\}$ обозначает множество представителей классов эквивалентных вложений для данного класса линейной эквивалентности вложения $\varphi = \varphi_1$. При описании вложения φ_1 мы указываем регулярную подалгебру $\mathfrak{r}$, относительно которой φ_1 является S-вложением. Исключением из этого являются только случаи $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 + \mathfrak{sl}_3 \subset E_8$, когда $\mathfrak{h}_0$ является либо интересной подалгеброй в E_6, либо суммой трехмерных подалгебр в D_4. Произвольный внешний автоморфизм второго порядка алгебры $\mathfrak{r}$ обозначается через σ, а алгебры $\mathfrak{h}$ — через τ.

Следствие 1. *Пусть* $\mathfrak{h}$ *— полупростая подалгебра простой особой алгебры Ли* $\mathfrak{g}$. *Тогда при* $\mathfrak{g} \neq E_6, E_8$ *класс линейной сопряжённости подалгебры* $\mathfrak{h}$ *совпадает с её классом сопряжённости. В остальных случаях имеются следующие исключения:*

(1) $\mathfrak{g} = E_6$*:* $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{sl}_3$, G_2, $\mathfrak{so}_5$ *— S-подалгебры соответственно в* E_6, E_6, D_5, $\mathfrak{h}_2 = \sigma(\mathfrak{h}_1)$*;*

(2) $\mathfrak{g} = E_8$ *:* $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{sl}_3$ *— S-подалгебра в* $E_6 + A_2$ *,* $\mathfrak{h}_2 = (\sigma \times \mathrm{Id})(\mathfrak{h}_1)$ *.*

В силу результатов Либека и Сейтца[6], следствие 1 известно для простых подалгебр $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$. Поскольку все исключения в следствии исчерпываются именно такими случаями, новым результатом является то, что для полупростых непростых подалгебр $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ класс линейной сопряженности совпадает с классом сопряженности.

В разделе 1.5 вычислены нормализаторы простых подалгебр $\mathfrak{h}$ ранга больше 1 в присоединённых особых группах Ли G, точнее, группы $\Gamma \leftthreetimes Z_G(\mathfrak{h})$, где группы Γ — группы реализуемых внешних автоморфизмов $\mathfrak{h}$. В подавляющем большинстве случаев Γ вкладывается в $N_G(\mathfrak{h})$, т.е. $N_G(\mathfrak{h}) = \Gamma \leftthreetimes (H \cdot Z_G(\mathfrak{h}))$. Вначале мы находим группы $Z_G(\mathfrak{h})$, а затем — действие группы Γ на группе $Z_G(\mathfrak{h})$. Тем самым описываются группы $\Gamma \leftthreetimes Z_G(\mathfrak{h})$.

Централизаторы простых трёхмерных подалгебр были вычислены Алексеевским.[10] Предложенный им способ годится, с небольшими поправками, и в нашем случае. Соответствующие результаты представлены в таблицах раздела 1.6.

Вторая глава

Вторая глава посвящена классификации полупростых подалгебр полупростых вещественных алгебр Ли. В разделе 2.1 приводятся некоторые факты структурной теории полупростых вещественных алгебр Ли.[11] Пусть $\mathfrak{r}$ – полупростая вещественная алгебра Ли. Все ее максимальные компактные подалгебры сопряжены. Пусть $\mathfrak{k}$ – одна из них и $\mathfrak{p} = \mathfrak{k}^{\perp}$ — ортогональное дополнение $\mathfrak{k}$. Линейное преобразование θ, $\theta|_{\mathfrak{k}} = \mathrm{Id}$, $\theta|_{\mathfrak{p}} = -\mathrm{Id}$, вещественного пространства $\mathfrak{r}$ является (инволютивным) автоморфизмом. Он называется *инволюцией Картана*, а разложение $\mathfrak{r} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ – *разложением Картана* алгебры $\mathfrak{r}$. Для произвольной группы G назовем два ее элемента *внутренне* сопряженными, если они сопряжены элементом из G°.

Пусть $\mathfrak{g}$ – полупростая комплексная алгебра Ли. Ее вещественные формы, с точностью до изоморфизма, находятся во взаимно однозначном соответствии с классами сопряженности инволюций (включая тривиальную) в группе $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$, а классы сопряженности вещественных форм — с классами внутренней сопряженности инволюций. При этом всякой вещественной форме $\mathfrak{r}$ алгебры $\mathfrak{g}$ ставится в соответствие ее инволюция Картана, которая естественным образом продолжается до инволюции алгебры $\mathfrak{g}$.

Пусть теперь $\mathfrak{h}$ – полупростая подалгебра полупростой комплексной алгебры Ли $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{s}$ – некоторая ее вещественная форма с инволюцией Картана τ,

[10] Алексеевский А. В., *Группы компонент централизаторов унипотентных элементов в полупростых алгебраических группах*, Труды Тбилис. мат. инст. **62** (1979), 5—27.

[11] Винберг Э. Б., Онищик А. Л. *Семинар по группам Ли и алгебраическим группам*, М.: УРСС (1995).

$\mathfrak{r}$ – вещественная форма алгебры $\mathfrak{g}$ с инволюцией Картана θ. Если пара $(\mathfrak{r}, \mathfrak{s})$ является вещественной формой пары $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, то инволюция τ продолжается до некоторой инволюции Картана алгебры $\mathfrak{r}$, сопряженной θ. В некотором смысле верно и обратное. А именно, положим $G = \operatorname{Int} \mathfrak{g}$,

$$\mathcal{E}(\tau, \theta) = \{\omega \in \operatorname{Aut} \mathfrak{g}: \quad \omega \underset{G}{\sim} \theta,\ \omega(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h},\ \omega|_{\mathfrak{h}} \underset{N_G(\mathfrak{h})}{\sim} \tau\}.$$

Теорема 8 (Карпелевич[7]). *Подалгебра $\mathfrak{s}$ содержится в вещественной форме алгебры $\mathfrak{g}$, сопряженной $\mathfrak{r}$, тогда и только тогда, когда множество $\mathcal{E}(\tau, \theta)$ непусто.*

В разделе 2.2 изложен комбинаторный метод классификации (с точностью до внутренней сопряженности) инволюций в группе $\operatorname{Aut} \mathfrak{g}$, где $\mathfrak{g}$ – полупростая комплексная алгебра Ли. Фиксируем картановскую подалгебру $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ и соответствующий максимальный тор $T \subset G = \operatorname{Int} \mathfrak{g}$. Пусть $\Pi = \{\alpha^i\}_{i=1}^n$ – система простых корней относительно $\mathfrak{t}$. Для всякого автоморфизма системы простых корней Π каноническим образом строится автоморфизм алгебры $\mathfrak{g}$. Такие автоморфизмы алгебры $\mathfrak{g}$ мы называем *диаграммными*. Всякий полупростой автоморфизм алгебры $\mathfrak{g}$ внутренне сопряжен автоморфизму вида ωh, где ω – диаграммный автоморфизм относительно системы Π, $h \in T^\omega$. Если автоморфизмы $\omega_1 h_1$ и $\omega_2 h_2$ сопряжены в $\operatorname{Aut} \mathfrak{g}$, то $\omega_1 = \omega_2$ (ω_i – диаграммные автоморфизмы, $h_i \in T^{\omega_i}$, $i = 1, 2$). В этом случае, если положить $\omega = \omega_1$, указанные автоморфизмы сопряжены элементом $g \in G$ таким, что $g\omega g^{-1} = \omega h$, $\operatorname{Ad} g(\mathfrak{t}^\omega) = \mathfrak{t}^\omega$, где $h \in T^\omega$.

Пусть ω – диаграммный автоморфизм алгебры $\mathfrak{g}$ относительно системы Π, $\mathfrak{g}_0$ — регулярная полупростая подалгебра $\mathfrak{g}$ с системой простых корней Π^ω. Мы получаем следующий результат.

Теорема 9. *Две инволюции из ωT^ω внутренне сопряжены тогда и только тогда, когда их ограничения на подалгебру $\mathfrak{g}_0$ внутренне сопряжены.*

Теорема 9 сводит классификацию инволюций к классификации внутренних инволюций $\theta \in G$. Имеем $\theta = \exp \pi i h$ для некоторого элемента $h \in \mathfrak{t}$, и для всякого $\alpha \in \Pi$ верно $\alpha(h) \in \mathbb{Z}$. Элементы $x_\alpha = \alpha(h) \mod 2$ не зависят от выбора h; таким образом, имеем отображение $\mathcal{I} \ni \theta \mapsto x(\theta) = \{x_\alpha, \alpha \in \Pi\} \in \mathbb{Z}_2^n$, где $\mathcal{I} \subset T$ — группа инволютивных элементов. Группа Вейля W алгебры $\mathfrak{g}$ действует на $\mathcal{I}$, причем ее орбиты являются пересечениями с $\mathcal{I}$ орбит группы $\operatorname{Int} \mathfrak{g}$. Для каждой простой алгебры $\mathfrak{g}$ мы выводим критерий сопряженности $\theta_1, \theta_2 \in \mathcal{I}$ в терминах $x(\theta_1), x(\theta_2)$, т. е. наборов из 0 и 1. Например, в случае $\mathfrak{g} = F_4$ инвариантом на $x(\mathcal{I}) = \mathbb{Z}_2^n$, разделяющим нетривиальные W-орбиты (их две), является $\mathbb{Z}_2$-значная функция $x_\alpha \vee x_\beta$, где $\alpha, \beta \in \Pi$ — длинные корни. Похожие критерии приводятся и в других случаях. В частности, мы устанавливаем, что для простых алгебр $\mathfrak{g}$ внутренняя сопряженность инволюций из $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ равносильна их $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$-сопряженности за одной серией исключений. А именно, в случае $\mathfrak{g} = D_{2n}$, $n \geq 3$ (соотв. $n = 2$), класс $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$-сопряженности инволюции θ, для которой $\mathfrak{g}^\theta$ имеет тип A_{n-1}, содержит ровно два (соотв. три) класса сопряженности.

В разделе 2.3 определяется частичный порядок на множестве $\mathcal{S} = \mathcal{S}[\mathfrak{g}]$ полупростых подалгебр полупростой алгебры $\mathfrak{g}$. Мы полагаем $\mathfrak{h} \prec \mathfrak{p}$, если $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{p}$ и $N_{\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \subset N_{\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}}(\mathfrak{p})$. $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$-эквивариантное отображение $\mu\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ назовем *мажорантой* на алгебре $\mathfrak{g}$, если $\mathfrak{h} \prec \mu(\mathfrak{h})$ для любой $\mathfrak{h} \in \mathcal{S}$. В частности, если $\mu(\mathfrak{h}_1) = \mu(\mathfrak{h}_2) = \mathfrak{p}$ и $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$ сопряжены автоморфизмом $\mathfrak{g}$, то существует элемент $\sigma \in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ такой, что $\sigma(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{h}_2$ и $\sigma(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$. Мажоранты образуют моноид относительно композиции. Мы увидим, что мажоранты представляют удобный инструмент для изучения подалгебр комплексных и вещественных алгебр Ли. Более точно, интерес будут представлять подалгебры $\mathfrak{h} \in \mathcal{S}$, для которых $\mu(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$ или $\mathfrak{g}$. Такие подалгебры, за исключением тривиальных 0 и $\mathfrak{g}$, мы будем называть *μ-примитивными.* Они окажутся "кирпичиками"в нашей классификации.

Далее строится мажоранта $\mu[\mathfrak{g}]$ для любой полупростой комплексной алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Это достаточно сделать для простых алгебр $\mathfrak{g}$ и положить $\mu[\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2] = \mu[\mathfrak{g}_1] \oplus \mu[\mathfrak{g}_2]$. Если $\mathfrak{g}$ — классическая алгебра Ли, то положим $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$, где Ω_1 — множество регулярных подалгебр, а также типа $B_k + B_{n-k-1}$ в случае $\mathfrak{g} = D_n$; Ω_2 — множество неприводимых подалгебр, заданных тензорными произведениями матричных алгебр $\mathfrak{sl}_k(\mathbb{C})$, $\mathfrak{so}_k(\mathbb{C})$, $\mathfrak{sp}_k(\mathbb{C})$, причем последние две возможности допускаются только в случаях $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_n(\mathbb{C})$ и $\mathfrak{sp}_n(\mathbb{C})$; Ω_3 — множество неприводимых простых подалгебр, а также G_2 в случае $\mathfrak{g} = D_4$. Если $\mathfrak{g}$ — особая алгебра Ли, то положим $\Omega = \Omega_4 \cup \Omega_5 \cup \Omega_6$, где Ω_4 — множество максимальных среди полупростых подалгебр $\mathfrak{g}$; Ω_5 — множество максимальных S-подалгебр, в случае $\mathfrak{g} = E_8$ включающее также S-подалгебру $2G_2^1 + A_1^8$; подалгебры $\mathfrak{h} \in \Omega_6$ исчерпываются в списке пар $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$: (F_4, D_4), (E_6, D_4), $(E_7, D_4 + 3A_1)$, $(E_7, 7A_1)$, (E_7, D_4^2), $(E_8, 2D_4)$, $(E_8, 8A_1)$, $(E_8, 4A_2)$, (E_8, A_1^{40}). Доказывается

Теорема 10. *Существует мажоранта $\mu = \mu[\mathfrak{g}]\colon \mathcal{S}[\mathfrak{g}] \to \Omega$.*

Более того, мы приводим формулы для $\mu(\mathfrak{h})$ для любой $\mathfrak{h} \in \mathcal{S}[\mathfrak{g}]$.

Пусть $R \subset G$ — замкнутая подгруппа, причем $\mathrm{Lie}\,R = \mathfrak{r} \subset \mathfrak{r}(\mathbb{C}) = \mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\,G$. Функтор комплексификации определяет отображение множеств полупростых подалгебр $\mathcal{S}[\mathfrak{r}] \to \mathcal{S}[\mathfrak{g}]$, спускающееся до отображения множеств орбит

$$\nu\colon \mathcal{S}[\mathfrak{r}]/R \to \mathcal{S}[\mathfrak{g}]/G,$$

где R и G действуют на $\mathcal{S}[\mathfrak{r}]$ и $\mathcal{S}[\mathfrak{g}]$ посредством присоединенного представления (как $\mathrm{Ad}\,R$ и $\mathrm{Ad}\,G$). В разделе 2.4 излагается метод, позволяющий перечислить представителей всех орбит произвольного слоя отображения ν.

Тем самым получается классификация полупростых подалгебр $\mathfrak{r}$ с точностью до R-сопряженности на основе классификации полупростых подалгебр $\mathfrak{g}$ с точностью до G-сопряженности. Пусть $\mathfrak{h}, \mathfrak{p} \in \mathcal{S}[\mathfrak{g}]$ и $\mathfrak{h} \prec \mathfrak{p}$. Пусть $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_s \in \mathcal{S}[\mathfrak{r}]$ — (различные) представители всех R-орбит из $\nu^{-1}(G\mathfrak{p})$. Положим $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{q}_i(\mathbb{C})$, $P_i = N_G(\mathfrak{p}_i)$, $Q_i = N_R(\mathfrak{q}_i)$, $1 \leq i \leq s$. Из соотношения $\mathfrak{p}_i = \operatorname{Ad} g_i(\mathfrak{p})$ для некоторого $g_i \in G$, $1 \leq i \leq s$, определим $\mathfrak{h}_i = \operatorname{Ad} g_i(\mathfrak{h})$. По аналогии с ν, имеем естественные отображения

$$\nu_i \colon \mathcal{S}[\mathfrak{q}_i]/Q_i \to \mathcal{S}[\mathfrak{p}_i]/P_i, \qquad 1 \leq i \leq s.$$

Пусть $\mathfrak{q}_{ij}$, $1 \leq j \leq s_i$, — представители всех R-орбит слоя $\nu_i^{-1}(P_i\mathfrak{h}_i)$. Нами доказывается

Теорема 11. *Подалгебры $\mathfrak{q}_{ij} \in \mathcal{S}[\mathfrak{g}]$, $1 \leq i \leq s$, $1 \leq j \leq s_i$, являются представителями всех R-орбит слоя $\nu^{-1}(G\mathfrak{h})$.*

Теорема 11 сводит классификацию к случаю, когда $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ — μ-примитивная подалгебра. Более того, показано, что обозначенную задачу достаточно решить в случае, когда $\mathfrak{r}$ — простая алгебра Ли, $R = \operatorname{Aut} \mathfrak{r}$, $G = R(\mathbb{C}) \subset \operatorname{Aut} \mathfrak{g}$. Для изучения слоев отображения ν применяется следующий прием. Замечается, что $\nu = \nu' \circ \nu''$, где

$$\nu'' \colon \mathcal{S}[\mathfrak{r}]/R \to \mathcal{S}[\mathfrak{r}]/G, \qquad \nu' \colon \mathcal{S}[\mathfrak{r}]/G \to \mathcal{S}[\mathfrak{g}]/G \qquad -$$

естественные отображения. Следовательно, слои $\mathcal{F}(\cdot)$ отображения ν могут быть описаны посредством описания слоев $\mathcal{F}'(\cdot)$ и $\mathcal{F}''(\cdot)$ отображений ν' и ν'' соответственно.

Пусть $\mathfrak{h} \in \mathcal{S}[\mathfrak{g}]$ и $\theta \in \operatorname{Aut} \mathfrak{g}$ — некоторая инволюция Картана алгебры $\mathfrak{r}$. Пусть τ_i, $i \in I$, — представители всех $N_G(\mathfrak{h})$-орбит инволюций τ алгебры $\mathfrak{h}$, для которых множество $\mathcal{E}(\tau, \theta)$ не пусто. Соответствующие вещественные формы $\mathfrak{h}$ обозначим через $\mathfrak{s}_i$, $i \in I$. Доказывается

Предложение 5. *Подалгебры $\mathfrak{s}_i \subset \mathfrak{h}$, $i \in I$, образуют множество представителей в $\mathcal{S}[\mathfrak{r}]$ точек слоя $\mathcal{F}'(G\mathfrak{h})$.*

Далее приводятся результаты Карпелевича, отвечающие на вопрос о непустоте множества $\mathcal{E}(\tau, \theta)$ в случае классической алгебры $\mathfrak{g}$. Рассмотение особого случая начинается с доказательства утверждения:

Предложение 6. *Предположим, что подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ регулярна, $\tau \in \operatorname{Int} \mathfrak{h}$, $\theta \in \operatorname{Int} \mathfrak{g}$. Тогда*

$$\mathcal{E}(\tau, \theta) = \varnothing \Longleftrightarrow T \cap \mathcal{E}(\tau, \theta) = \varnothing.$$

С учетом полученных в разделе 2.2 результатов, предложение 6 позволяет найти слои отображения ν' в случае $\mathfrak{h} \in \Omega_4$. Если $\mathfrak{h} \in \mathfrak{g}$ — S-подалгебра, то используется другой метод нахождения $\mathcal{E}(\tau, \theta)$. Всякий внутренний автоморфизм $\mathfrak{h}$ однозначно продолжается до внутреннего автоморфизма $\mathfrak{g}$. Пусть $\varphi\colon \mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{g}$ –S-вложение. Выберем картановские подалгебры $\mathfrak{t}_0 \subset \mathfrak{h}, \mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ так, что $\varphi(\mathfrak{t}_0) \subset \mathfrak{t}$. Для каждой S-подалгебры особой алгебры Ли Дынкиным указаны значения $\alpha(\varphi(h_\beta))$ (при некотором выборе систем простых корней $\{\alpha_i\}$, $\{\beta_j\}$ в алгебрах $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{g}$). По этим числам можно без труда находить внутренние овеществления. Например, в случае $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}_2$ получаем, что инволюция $\mathfrak{h}$ продолжается до инволюции со схемой равной характеристике подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, где вместо 2 стоят 1.

Раздел 2.4 завершается изучением слоев ν''. Учитывая результаты Карпелевича, фактически остается разобраться только со случаем особой алгебры $\mathfrak{g}$. Пусть $(\mathfrak{r}, \mathfrak{s})$ — вещественная форма пары $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, $\theta \in \operatorname{Aut} \mathfrak{r}$, $\tau \in \operatorname{Aut} \mathfrak{s}$ — инволюции Картана. Мы используем следующий результат Карпелевича.

Теорема 12. *Точки слоя $\mathcal{F}''(G\mathfrak{s})$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с орбитами действия $N_G(\mathfrak{h})\colon \mathcal{E}(\tau, \theta)$.*

В частности, верна

Теорема 13. *Если $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{r}$ — вещественная форма S-подалгебры в $\mathfrak{g}$, то слой $F''(G\mathfrak{s})$ состоит из одной R-орбиты.*

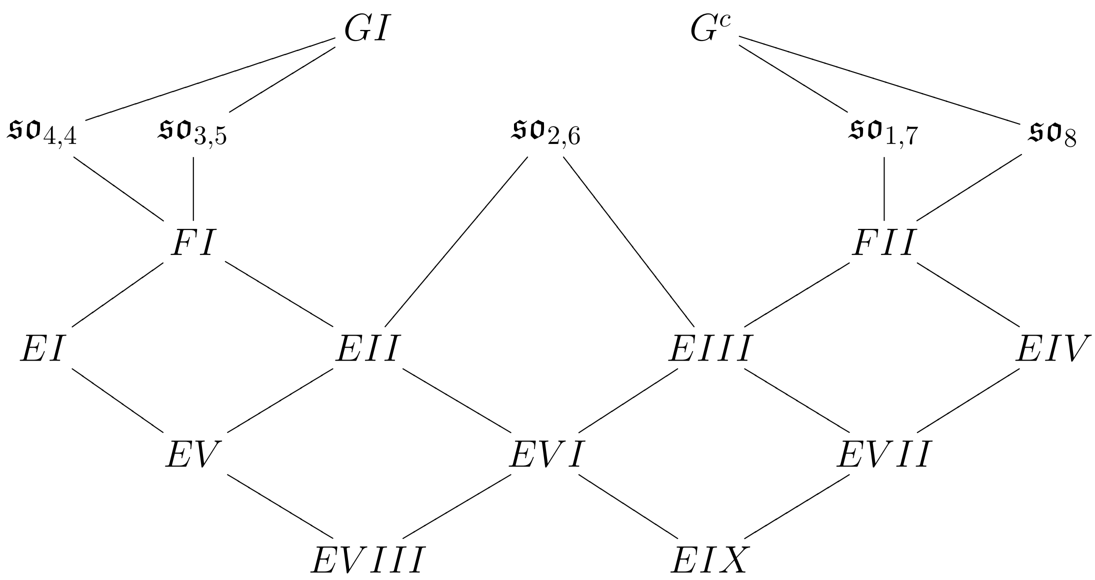
С помощью методов теории симметрических пространств, доказывается

Теорема 14. *Если $\mathfrak{h} = \mathfrak{s}(\mathbb{C})$ — максимальная полупростая подалгебра в $\mathfrak{g}$ (максимальная среди полупростых), то слой $\mathcal{F}''(G\mathfrak{s})$ состоит из одной R-орбиты.*

В разделе 2.5 изучаются группы автоморфизмов полупростых вещественных алгебр Ли $\mathfrak{r}$. В частности, доказывается, что группа $\operatorname{Out} \mathfrak{r} = \operatorname{Aut} \mathfrak{r} / \operatorname{Int} \mathfrak{r}$ внешних автоморфизмов $\mathfrak{r}$ изоморфна полупрямому прозведению группы квазивнутренних автоморфизмов $\operatorname{QOut} \mathfrak{r}$ и некоторой подгруппы группы $\operatorname{Out} \mathfrak{g}$.

В качестве иллюстрации изложенных методов в разделе 2.6 мы приводим схему доказательства теоремы о включениях между особыми вещественными алгебрами Ли.

Теорема 15. *Имеется следующая диаграмма включений:*



При этом любые два включения изоморфных вещественных форм соседних элементов цепочки $G_2 \subset D_4 \subset F_4 \subset E_6 \subset E_7 \subset E_8$ *сопряжены.*

Многие результаты главы 2 представлены в виде таблиц, которые помещены в разделе 2.7.

В заключение автор выражает благодарность своим научным руководителям профессору Эрнесту Борисовичу Винбергу и доценту Ивану Владимировичу Аржанцеву за постановку задачи и постоянное внимание к данной работе.

Работы автора по теме диссертации

1. А. Н. Минченко, *Полупростые подалгебры особых алгебр Ли*, Труды Московского математического общества **67** (2006), 256—293.

2. А. Н. Минченко, *Триады и короткие* SO_3 *-подгруппы компактных групп*, Успехи математических наук **62** : 5 (2007), 159—160.

3. А. Н. Минченко, *О полупростых подалгебрах особых вещественных алгебр Ли*, депонировано в ВИНИТИ РАН, 337-В 2008, 40 с.