

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

---

**МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ**

На правах рукописи  
УДК 531.3

ЛУЖИН Александр Александрович

**Моделирование выстрела из лука.**

Специальность 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Москва 2008

Работа выполнена на кафедре газовой и волновой динамики  
механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова

Научный руководитель: Доктор физико-математических наук  
Профессор А.В. Звягин

Официальные оппоненты: Доктор физико-математических наук  
Профессор В.И. Горбачев  
Кандидат физико-математических наук  
Доцент А.А. Малашин

Ведущая организация: МГТУ «МАМИ»

Защита состоится 13 февраля 2009 года в \_\_\_\_ часов на заседании специализированного совета Д501.001.91 по механике при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова по адресу: 119992, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория \_\_\_\_\_.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж)

Автореферат разослан « \_\_\_\_ » января 2009 года.

Ученый секретарь  
Диссертационного совета Д 501.001.91  
Профессор



С.В. Шешенин

## **Общая характеристика работы.**

### **Актуальность темы.**

Актуальность исследования связана с возможностью оптимизации конструкции спортивных и охотничьих луков для повышения их эффективности.

### **Объект и предмет исследования.**

В данной работе исследуется процесс выстрела из лука. При построении математической модели плечи лука моделируются стержнем Кирхгофа - Лява, тетива – нерастяжимой нитью, стрела – сосредоточенной массой.

### **Цель работы.**

Целью работы является исследование влияния основных параметров лука на процесс разгона стрелы.

### **Методы исследования.**

Для решения задачи использовались экспериментальные методы, методы механики сплошных сред, теоретической механики, теории дифференциальных уравнений и численные методы решения краевых задач.

### **Научная новизна.**

С точки зрения автора научная новизна полученных результатов заключается в том, что

1. построена модель процесса выстрела из лука;
2. проведено экспериментальное исследование процесса выстрела из лука;
3. проведено исследование влияния основных параметров лука на скорость вылета стрелы. Результаты расчетов проверены экспериментально.

### **Достоверность результатов.**

Достоверность результатов обеспечивается строгостью постановки задачи и методов ее решения, экспериментальной проверкой основных принимаемых предположений. Проведено тестирование математической модели путем сравнения ее с результатами экспериментальных исследований. Сравнение показало хорошее соответствие результатов.

### **Теоретическая и практическая значимость.**

Полученные результаты могут быть использованы для оптимизации различных конструкций луков (в первую очередь спортивных).

### **Личный вклад соискателя.**

Постановка задачи принадлежит научному руководителю – профессору А.В. Звягину. Экспериментальные исследования, вычислительное моделирование и расчеты, анализ результатов исследований выполнены А.А. Лукиным лично.

### **Апробация работы.**

Результаты работы докладывались и обсуждались:

1. На Ломоносовских чтениях в МГУ (2005, 2006, 2008 гг.);
2. На конференции «Теория и практика расчета зданий, сооружений и элементов конструкций. Аналитические и численные методы» (2008 г., Москва, МГСУ);
3. На научно - исследовательском семинаре кафедры газовой и волновой динамики МГУ под руководством академика РАН Е.И. Шемякина в 2003 - 2008 гг.;
4. На научно – исследовательских семинарах кафедр теории упругости, теории пластичности, механики композитов МГУ в 2008 г.

### **Структура диссертации.**

Диссертация состоит из введения, четырех глав с выводами по каждой главе, двух приложений, заключения и списка литературы (65 наименования). Главы разбиты на параграфы; параграфы пронумерованы двумя числами, первое из которых – номер главы, второе – номер параграфа в данной главе. Текст изложен на 103 страницах, диссертация содержит без учета приложений 44 рисунка.

## Содержание работы.

**Введение** состоит из двух частей.

В **первой** изложена история развития луков, рассказано о предыдущих исследованиях, сформулированы цели диссертации и приведено краткое содержание ее глав.

Первое упрощенное решение задачи было предложено В.И. Феодосьевым. Рассматривалась упрощенная модель лука:

1. кривизна плеча лука равна нулю;
2. плечи имеют постоянное сечение;
3. угол между плечами лука – развернутый.

Учитывались только два состояния лука: натянутое (в момент начала выстрела) и стянутое (конец выстрела) (Рис.1). В каждом из состояний подсчитывалась упругая энергия плеч лука. Далее считалось, что вся истраченная энергия (разность энергий в натянутом и стянутом состоянии) переходит в кинетическую энергию стрелы, то есть кинетическая энергия движения плеч лука и тетивы не учитывалась.

Второе решение было предложено А.В. Звягиным и А.А. Малашиным. В нем задача о выстреле из лука решалась в линейной постановке, для малых прогибов плеч.

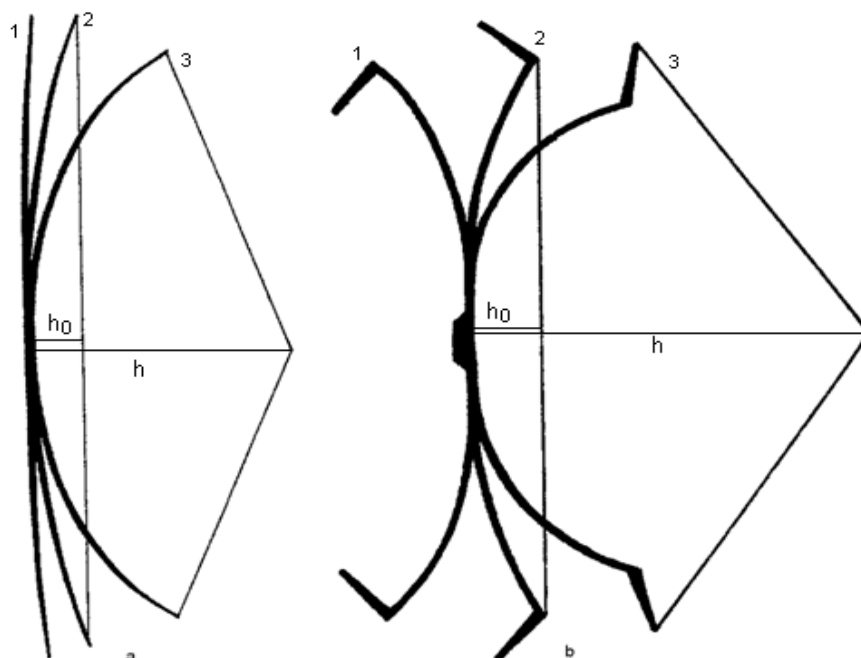


РИС.1 СОСТОЯНИЯ ЛУКА: 1 – РАССЛАБЛЕННОЕ (СО СНЯТОЙ ТЕТИВОЙ); 2 – СТЯНУТОЕ (ТЕТИВА НАТЯНУТА И ПРЯМОЛИНЕЙНА); 3 – НАТЯНУТОЕ (В МОМЕНТ НАЧАЛА ВЫСТРЕЛА)

**В отличие от предшествующих работ**, в рассматриваемой диссертации учтена кинетическая энергия плеч лука, их начальная кривизна, начальный угол выгиба и переменная жесткость.

Во **второй части** предложена классификация луков, сделаны основные определения и введены основные параметры лука.

При работе с луками выделяют три состояния лука (РИС. 1):

1. Расслабленное. Состояние лука при отсутствии тетивы (1).
2. Стянутое. На лук одета тетива, к ней не прикладываются внешние усилия (2).
3. Натянутое. К тетиве приложены внешние усилия (3).

Основными параметрами лука являются:

1. Кривизна плеча лука в расслабленном состоянии  $\chi_0(s)$ ;
2. Угол выгиба лука  $\alpha$  – угол равный половине угла, дополняющего до развернутого угол между плечами лука;
3. Длина плеча лука  $L$ ;
4. Длина тетивы  $2 \cdot l$ ;
5. База лука  $h$ , определяемая в первую очередь длиной рук стрелка;
6. Сила натяжения лука  $F$  – сила, действующая на стрелу со стороны лука.

Еще одним важным параметром является распределение жесткости по плечу лука. Для исследования влияния этого параметра будут рассмотрены трапецевидные луки – луки, у которых жесткость и линейная плотности меняются вдоль плеча лука по линейному закону. Характеристикой таких луков будет являться

7. Коэффициент сужения  $C$  – отношение жесткости на свободном конце плеча лука к жесткости в точке скрепления плеч лука.

Основные обозначения:

$S$  - Лагранжева координата точек нити, координата срединного волокна стержня;

$\vec{V}$  - вектор скорости точек нити или плеча лука;

$\vec{Q}$  - вектор сил;

$\vec{M}$  - вектор моментов;

$\theta$  - угол наклона нити или срединного волокна к заданной оси;

$u$  и  $v$  - касательная и нормальная составляющие вектора скорости нити или плеча лука;

$T$  и  $N$  - касательная и нормальная составляющие вектора силы;  
 $E(S)$  - модуль Юнга плеча лука;  
 $\rho$  - линейная плотность плеча лука;  
 $J(S)$  - геометрический момент инерции плеча лука;

**Первая глава** диссертации посвящена экспериментальному исследованию луков.

В § 1.1 сделано описание применяемых экспериментальных установок и сделаны оценки ошибок, возникающих при снятии экспериментальных результатов.

При проведении экспериментальных исследований применялись две экспериментальные установки.

Первая применялась для проведения динамических экспериментов.

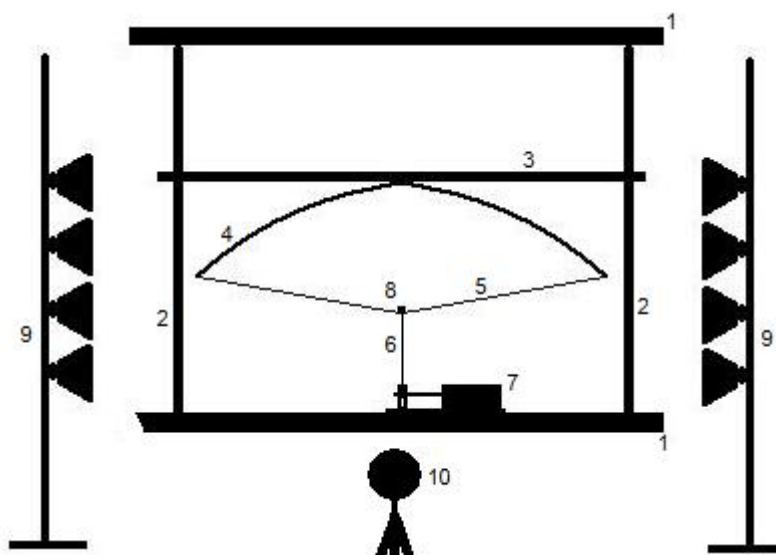


РИС.2 ИСПЫТАТЕЛЬНАЯ УСТАНОВКА ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ. ЦИФРАМИ ОБОЗНАЧЕНЫ: 1 – НЕПОДВИЖНЫЕ ГОРИЗОНТАЛЬНЫЕ БАЛКИ; 2 – ПОДВИЖНЫЕ ВЕРТИКАЛЬНЫЕ СТОЙКИ; 3 – ПОДВИЖНАЯ ГОРИЗОНТАЛЬНАЯ ПЕРЕКЛАДИНА; 4 – ЛУК; 5 – ТЕТИВА; 6 – ОТЯГИВАЮЩАЯ НИТЬ; 7 – ПУСКОВОЙ МЕХАНИЗМ; 8 – ГРУЗ, МОДЕЛИРУЮЩИЙ СТРЕЛУ; 9 – МАЧТЫ ОСВЕЩЕНИЯ; 10 – ВИДЕОКАМЕРА.

Установка для динамических экспериментов (РИС. 2) состоит из неподвижных горизонтальных балок [1], по которым перемещаются вертикальные стойки [2]. По вертикальным стойкам двигается горизонтальная перекладина [3], к которой крепится лук [4]. Тетива лука [5] крепится с помощью оттягивающей нити [6] к пусковому механизму [7]. К тетиве крепится стрела, или груз, имитирующий стрелу [8]. Процесс движения фиксируется высокоскоростной видеочкамерой НСС-1000 немецкой фирмы VDS Vosskühler [10], ка-

чество съемки обеспечивается необходимой подсветкой [9]. Для освещения установки используются 8 галогенных ламп, каждая мощностью по 500 ватт, питающиеся от цепи постоянного тока.

Результатами эксперимента являются последовательные по времени кадры, позволяющие фиксировать положение стрелы и положение маркеров, нанесенных на плечи лука. При обработке снимаются пиксельные координаты точек и далее обрабатываются с учетом масштаба.

При обработке эксперимента определение координаты стрелы происходит с ошибкой в один пиксель. Эта ошибка мало влияет на определение координаты стрелы, но достаточно существенно на скорость. Влияние этой ошибки на скорость вылета стрелы вычисляется по формуле:

$$v_i(t_i) = - \frac{(x_{\text{истинное}}(t_i) + \delta x) - x_{\text{истинное}}(t_{i-1}) + \delta x}{\Delta t} \leq - \frac{\Delta x_{\text{истинное}}}{\Delta t} - 2 \cdot \frac{\delta x}{\Delta t}$$

Вторая установка применялась для исследования статики лука (Рис.3).

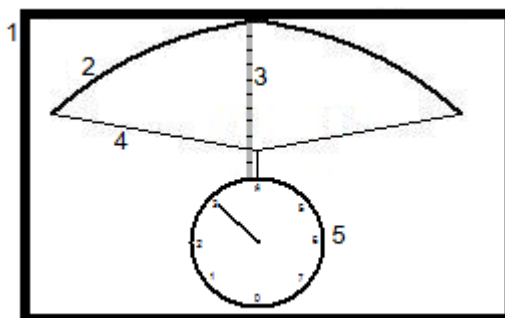


РИС.3 УСТАНОВКА ДЛЯ СТАТИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ. ЦИФРАМИ ОБОЗНАЧЕНЫ: [1] – ЖЕСТКАЯ ОСНОВА; [2] – ЛУК; [3] – ЛИНЕЙКА; [4] – ТЕТИВА; [5] – ДИНАМОМЕТР.

Для статических испытаний использовалась установка (РИС.3). На жесткую основу [1], оснащенную линейкой [3] закрепляется лук [2]. К тетиве [4] прикрепляется динамометр [5]. Перемещение динамометра вдоль линейки позволяет снимать геометрию лука, величину базы лука и соответствующую силу натяжения лука.

В § 1.2 проведено экспериментальное исследование 5 различных луков. Данные экспериментов после обработки позволили получить основные характеристики лука и стрелы в последовательные моменты времени. Соответствующие характеристики процесса разгона стрелы представлены в работе набором графиков: зависимости силы натяжения от величины базы каждого лука; зависимости координаты и скорости пятки стрелы от времени.

Полученные в результате обработки экспериментов данные позволили сделать следующие выводы:



1. В процессе разгона стрелы верхняя и нижняя половины тетивы остаются практически прямолинейными.
2. В процессе выстрела плечи лука движутся «монотонно» (то есть отсутствуют заметные собственные колебания плеч лука).
3. Вид зависимости координаты пятки стрелы и ее скорости качественно одинаковы для различных конструкций лука.
4. Материал, из которого изготовлены плечи лука (дерево, пластик, металл) оказывает качественное влияние на вид зависимости силы натяжения лука от величины базы лука.

Во **второй главе** приведены основные уравнения движения балки и нити, сделана постановка задачи. Приведен обзор необходимой литературы. Показано, что в общем случае задача сводится к связанной системе нелинейных динамических уравнений.

В § 2.1 приведены уравнения движения стержня, полученные на основе гипотез Кирхгофа - Лява. Сделан обзор литературы по данному вопросу. Приняты следующие основные гипотезы:

1. Справедлива гипотеза плоских сечений Бернулли – Эйлера – Кирхгофа - Лява;
2. Размеры поперечного сечения считаются малыми по сравнению с длиной стержня и радиусом кривизны осевой линии;
3. Осевая линия считается нерастяжимой;
4. Справедлив принцип Сен-Венана.

С учетом предположений 1.-4. рассматриваемая задача сводится к нахождению решения системы 6 нелинейных уравнений в частных производных относительно 6 искомых функций  $u, v, T, N, M, \theta$ :

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} - v \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) &= \frac{\partial T}{\partial S} - N \frac{\partial \theta}{\partial S} \\ \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) &= \frac{\partial N}{\partial S} + T \frac{\partial \theta}{\partial S} \\ M &= EJ \left( \frac{\partial \theta}{\partial S} - \chi_0 \right) \\ \rho \frac{J}{B} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} &= \frac{\partial M}{\partial S} + N \\ \frac{\partial u}{\partial S} - v \frac{\partial \theta}{\partial S} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial S} + u \frac{\partial \theta}{\partial S} &= \frac{\partial \theta}{\partial t} \end{aligned}$$

где:  $u, v$  – компоненты скорости плеча лука в проекциях на касательную и нормаль к срединному волокну;  $N, T$  – компоненты главного вектора сил плеча лука в проекциях на касательную и нормаль к срединному волокну;  $\theta$  – угол наклона касательного вектора к срединному волокну к оси;  $M$  – изгибающий момент;  $E$  – модуль Юнга;  $J$  – геометрический момент инерции;  $\chi$  – начальная кривизна плеча;  $t$  – время;  $S$  – длина дуги срединного волокна.

В этой системе:

- первые два уравнения – проекции уравнения движения на единичные касательный и нормальный вектора к срединному волокну плеча лука;
- третье уравнение – геометрическая связь момента с кривизной срединного волокна;
- четвертое уравнение – закон сохранения момента импульса плеча лука;
- пятое и шестое уравнения - проекции кинематического уравнения плеча лука на направления касательной и нормали к срединному волокну.

В § 2.2 исследуются уравнения динамики гибкой растяжимой нити применительно к рассматриваемой задаче:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - v \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial T}{\partial S} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \frac{T}{\rho} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial S} \\ \frac{\partial u}{\partial S} - v \frac{\partial \theta}{\partial S} &= \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial S} + u \frac{\partial \theta}{\partial S} &= (1 + \varepsilon) \frac{\partial \theta}{\partial t} \end{aligned}$$

где:  $u, v$  – компоненты скорости в проекциях касательную и нормаль к нити;  $T$  – сила натяжения нити;  $\varepsilon$  – деформация нити;  $\theta$  – угол наклона касательного вектора к нити к оси;  $t$  – время;  $S$  – Лагранжева координата.

В этой системе первые два уравнения – проекция уравнения движения на единичные касательный и нормальный вектора к срединному волокну; последние два - проекция кинематического условия на единичные касательный и нормальный вектора к срединному волокну.

В § 2.3 сформулирована постановка краевой задачи о выстреле из лука, в том числе получены граничные условия (РИС. 4):

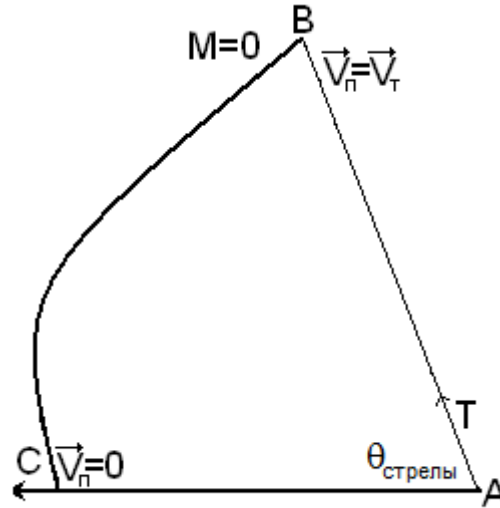


РИС. 4

**Точка А – середина тетивы – точка соприкосновения тетивы со стрелой.** Граничным условием в точке А будет зависимость координаты т. А от времени, получаемая как решение уравнения движения стрелы. Введем угол  $\theta_{стрелы}$  - угол между касательной к траектории стрелы (АС) и тетивой в точке А. Тогда уравнение движения стрелы примет вид:  $m_{стрелы} \frac{dV_{стрелы}}{dt} = 2T_n(A) \cos \theta_{стрелы}$ , где  $T_n(A)$  - сила натяжения тетивы в точке А,  $V_{стрелы}$  – проекция скорости тетивы в точке А на ось АС. Начальное условие для этого уравнения имеет вид  $V_{стрелы}(0) = 0$ .

**Точка В – точка соединения тетивы и плеча лука.** В точке В равны скорости тетивы и плеча лука  $\vec{V}_n = \vec{V}_c$ . Равен нулю главный момент плеча лука  $M_c = 0$ . Связаны сила натяжения нити и главный вектор сил в сечении стержня:  $\vec{T}_n = \vec{Q}_c$ .

**Точка С – точка закрепления лука.** В точке закрепления лука плечо жестко закреплено и, следовательно, равна нулю скорость движения стержня (плеча лука)  $\vec{V}_c = 0$  и известен угол  $\theta$  (он определяется из величины угла выгиба  $\alpha$ ).

В § 2.4 проведен анализ характерных скоростей возмущений в тетиве и плече лука. Этот анализ и результаты экспериментов позволяют рассматривать задачу в квазистатическом приближении, поскольку время выстрела неизмеримо больше характерных времен пробега возмущений по тетиве и плечам лука.

В третьей главе диссертации рассматривается задача о статическом равновесии лука.

В § 3.1 проводится анализ и решение уравнений статики системы плечи лука - тетива. Задача сведена к решению двухточечной краевой задачи для трех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с параметром, определяемым из граничных условий (РИС. 5):

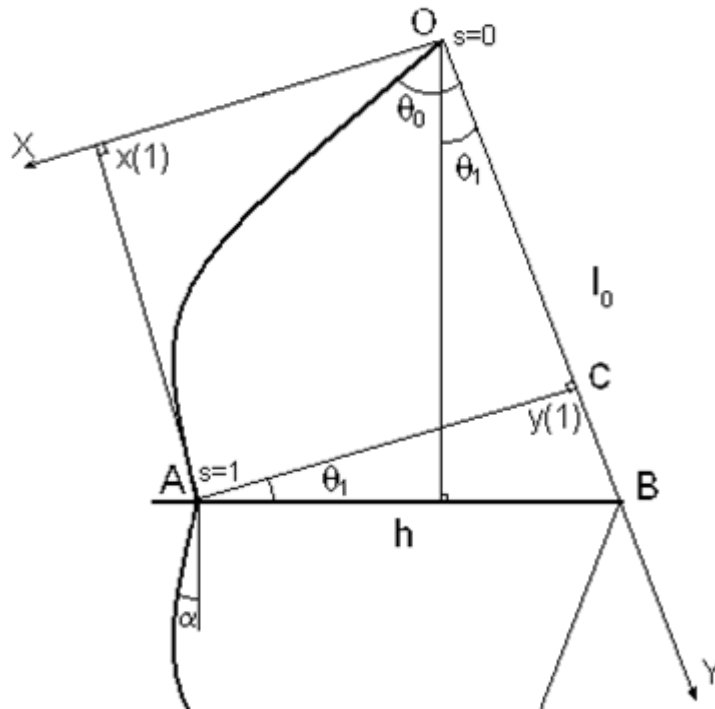


РИС. 5. ИСПОЛЬЗУЕМАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ В ЗАДАЧЕ ВЫСТРЕЛА ИЗ ЛУКА. УГОЛ  $\alpha$  – УГОЛ НАЧАЛЬНОГО ВЫГИБА ПЛЕЧА ЛУКА.

Система уравнений для безразмерных координат  $x, y$  точек плеча лука и угла  $\theta$  в случае равновесия может быть сведена к системе трех нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с параметром  $\mu$ .

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{ds} = -\mu \cdot j(s) \cdot x + \aleph(s) \\ \frac{dx}{ds} = \sin \theta \\ \frac{dy}{ds} = \cos \theta \end{cases}$$

со следующими граничными условиями

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0, \\ y(1) + h \cdot \sin(\theta(1) + \alpha) = l_0 \\ h \cos(\theta(1) + \alpha) = x(1) \end{cases}$$

В этих уравнениях использованы величины:  $s = \frac{s^*}{L}$  – безразмерная лагранжева координата,  $j(s) = \frac{E_c J_c(s_0)}{E_c J_c(s)}$ ,  $\mu = \frac{T_H L^2}{E_c J_c(s_0)}$ ,  $l_0 = \frac{l}{L}$ ,  $x = \frac{x^*}{L}$ ,  $y = \frac{y^*}{L}$ ,  $\aleph(s) = \chi_0(s) \cdot L$ , где  $L$  – длина плеча лука,  $l$  – длина половины тетивы, приведенная жесткость  $j(s)$  – является известной функцией и представляет собой отношение жесткости плеча в фиксированной точке  $s_0$  к его жесткости в текущей точке.

В § 3.2 рассматривается частный случай задачи: плечо лука моделируется прямой балкой постоянного сечения. В этом случае краевая задача сводится к решению приведенной ниже системы нелинейных алгебраических уравнений относительно трех переменных  $k, m, \theta_1$ , которые – суть недостающие граничные условия на концах стержня и искомый параметр ( $k^2 = \mu, m = \sin \frac{\theta(0)}{2}, \theta_1 = \theta(1) + \alpha$ ). При этом использованы следующие обозначения:  $E(\varphi, m)$  – эллиптический интеграл первого рода и  $E_0(m) = E(\pi/2, m)$ ,  $F\varphi, m$  – эллиптический интеграл второго рода и  $F0m = F\pi/2, m$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} k \cdot l_0 = -2 \cdot E \left( \arcsin \frac{\sin \left( \frac{\theta_1 - \alpha}{2} \right)}{m}, m \right) + 2 \cdot E_0(m) + \\ + F \left( \arcsin \frac{\sin \left( \frac{\theta_1 - \alpha}{2} \right)}{m}, m \right) - F_0(m) + \\ + 2 \cdot \operatorname{tg} \theta_1 \cdot m \cdot \cos \left( \arcsin \frac{\sin \left( \frac{\theta_1 - \alpha}{2} \right)}{m} \right) \\ k \cdot h \cdot \cos \theta_1 = 2m \cdot \cos \left( \arcsin \frac{\sin \left( \frac{\theta_1 - \alpha}{2} \right)}{m} \right) \\ k = F_0(m) - F \left( \arcsin \frac{\sin \left( \frac{\theta_1 - \alpha}{2} \right)}{m}, m \right) \end{array} \right.$$

В § 3.3 краевая задача решается в общем случае. Для нахождения решения системы нелинейных алгебраических уравнений применяется итерационный метод Ньютона. Так как сходимость классического метода Ньютона сильно зависит от степени близости начального приближения к искомому решению, то используется его модификация, лишенная этого недостатка, а именно метод Исаева – Сони́на. Для решения задачи Коши схема Дормана – Принса 8(7).

В § 3.4 проведено изучение влияния параметров лука (величина базы лука, длина плеча лука, длина тетивы, начальная кривизна плеча лука, распределения жесткости плеча лука по его длине). Анализ показал, что изменение параметров лука качественно не меняет вид зависимостей сил натяжения тетивы и лука от величины базы лука. Эти зависимости для одного из луков приведены на РИС. 6. Помимо этого установлены следующие факты:

1. Величина силы натяжения тетивы поначалу убывает, до момента, пока угол между тетивой и свободным концом плеча лука не достигает 90 градусов, после этого сила натяжения тетивы начинает возрастать. Во всем рабочем диапазоне величин базы лука (который составляет величину порядка длины плеча лука или менее) максимум силы натяжения лука достигается в стянутом состоянии.
2. Сила натяжения лука монотонно возрастает с ростом базы лука; график зависимости имеет точку перегиба, соответствующую моменту,

когда угол между тетивой и свободным концом плеча лука равен 90 градусам.

3. С ростом угла выгиба лука, коэффициента сужения и начальной кривизны плеча лука сила натяжения лука возрастает.

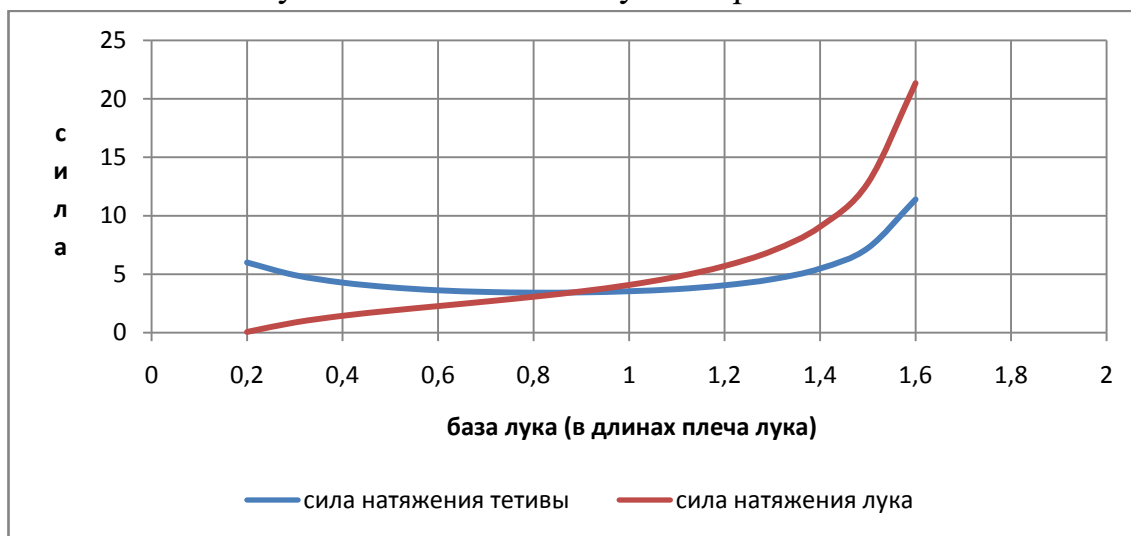


РИС. 6. ЗАВИСИМОСТЬ СИЛЫ НАТЯЖЕНИЯ ЛУКА И СИЛЫ НАТЯЖЕНИЯ ТЕТИВЫ ОТ ВЕЛИЧИНЫ БАЗЫ ЛУКА.

В **четвертой главе**, на основе решения задачи о статическом равновесии лука, предложен и реализован численный метод решения задачи о выстреле из лука.

В § 4.1 излагается метод решения задачи о выстреле из лука. Даны основные предположения:

1. Принимается, что половина тетивы в процессе выстрела прямолинейна в каждый момент времени;
2. Считается, что в процессе разгона стрелы плечо лука проходит состояния, близкие к соответствующим состояниям равновесия;
3. Делается предположение о том, что высокочастотные собственные колебания плеч лука малы.
4. При решении пренебрегается аэродинамическим сопротивлением стрелы, тетивы и плеч лука.

Весь процесс разгона разбивается на элементарные шаги по времени, причем величина текущего шага по времени подлежит определению из закона сохранения полной энергии системы. Форма лука на каждом шаге вычисляется по заданной базе, как решение соответствующей статической задачи. Определяются скорости точек плеч лука, поскольку известны их положения в

два последовательных момента времени. То есть, известны величина базы лука, координаты расчетных точек и изменение упругой энергии плеч. Это позволяет определить шаг по времени из закона сохранения полной энергии системы, которая складывается из упругой и кинетической энергии плеч лука, кинетической энергии тетивы и кинетической энергии стрелы.

В § 4.2 проведена оценка точности вычислений, а также сравнение результатов теоретических расчетов с результатами экспериментов. Составленный пакет программ позволил реализовать предложенный метод расчета разгона стрелы в процессе выстрела. Выполнено сравнение результатов численных расчетов с соответствующими результатами экспериментов. Установлено, что предложенный программный пакет позволяет рассчитывать процесс разгона стрелы с достаточно высокой точностью. Результаты сравнения результатов расчетов и экспериментальных данных приведены на РИС. 7. Вертикальными отрезками прямых показана величина ошибки экспериментальных данных.

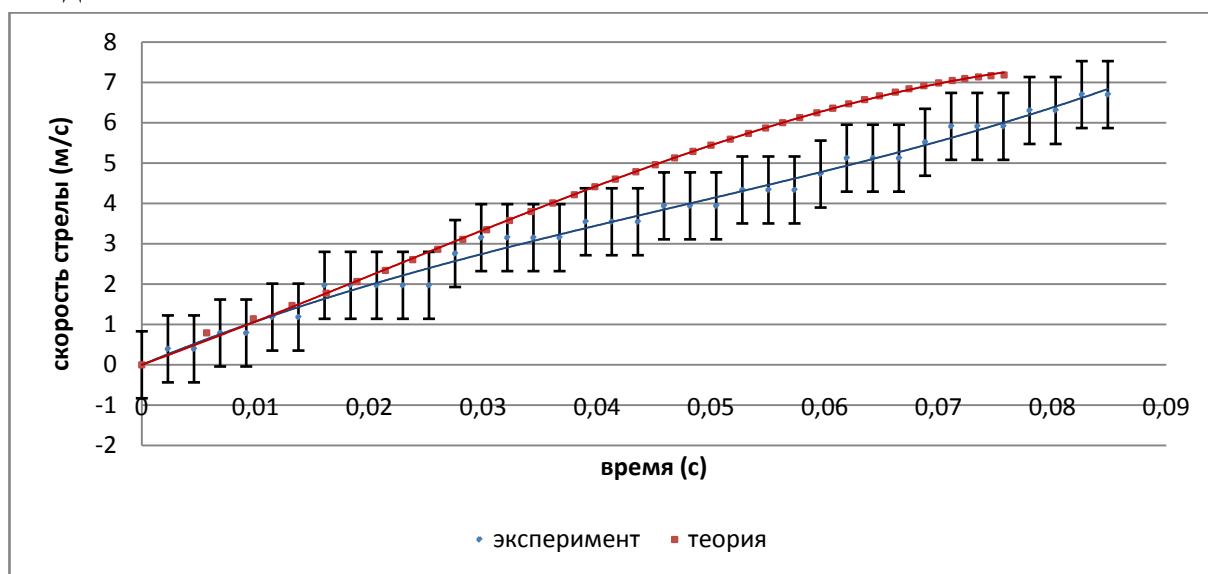


РИС. 7. СРАВНЕНИЕ ТЕОРИИ И ЭКСПЕРИМЕНТА

Также проверена гипотеза о прохождении в процессе движения плечами лука состояний, близких к состояниям равновесия (РИС. 8). На рисунке сплошными линиями обозначены теоретические значения, большими синими точками — результаты эксперимента; их размер показывает ошибку, возникающую при получении экспериментальных данных.



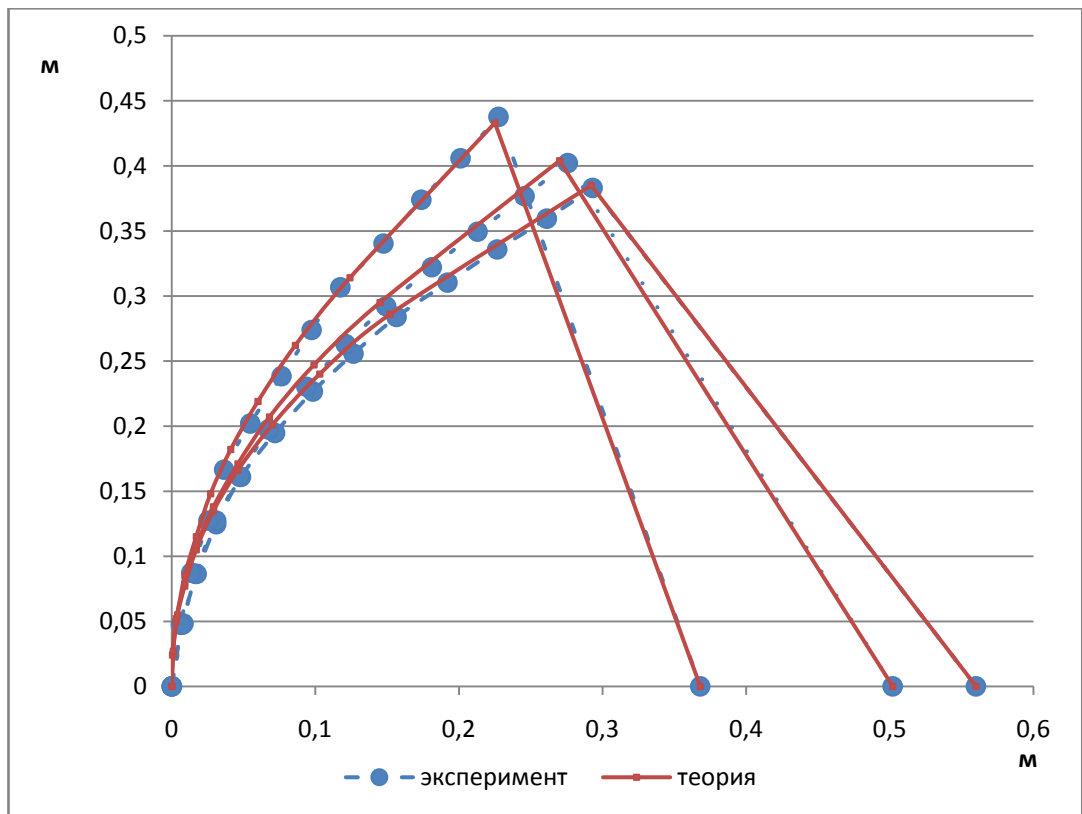


РИС. 8. СРАВНЕНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО РАВНОВЕСНОГО ПОЛОЖЕНИЯ ЛУКА И ДАННЫХ ДИНАМИЧЕСКОГО ЭКСПЕРИМЕНТА ДЛЯ ОДИНАКОВОЙ БАЗЫ. РАССМОТРЕНО НАЧАЛЬНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ, ПОЛОЖЕНИЯ ЧЕРЕЗ МОМЕНТЫ ВРЕМЕНИ, РАВНЫЕ ТРЕТИ И ДВУМ ТРЕТЯМ ОТ ВРЕМЕНИ ВЫСТРЕЛА.

В § 4.3 исследовано влияние основных параметров задачи на скорость вылета стрелы. Показано, что:

1. Для каждого стрелка является более выгодным лук с наибольшей длиной плеч, при этом, чем длиннее плечи лука, тем меньше оптимальный угол выгиба.
2. Существенное влияние на выбор лука имеет масса стрелы;
3. Переменное сечение плеча лука (например, уменьшение коэффициента сужения  $C$  (РИС. 9)) позволяет получить значительный выигрыш в скорости вылета стрелы.
4. Увеличение начальной кривизны плеча лука позволяет получить выигрыш в скорости вылета стрелы, но при этом возрастает сила натяжения лука. При одинаковой силе натяжения лука увеличение начальной кривизны плеча лука не дает выигрыша в скорости вылета стрелы.

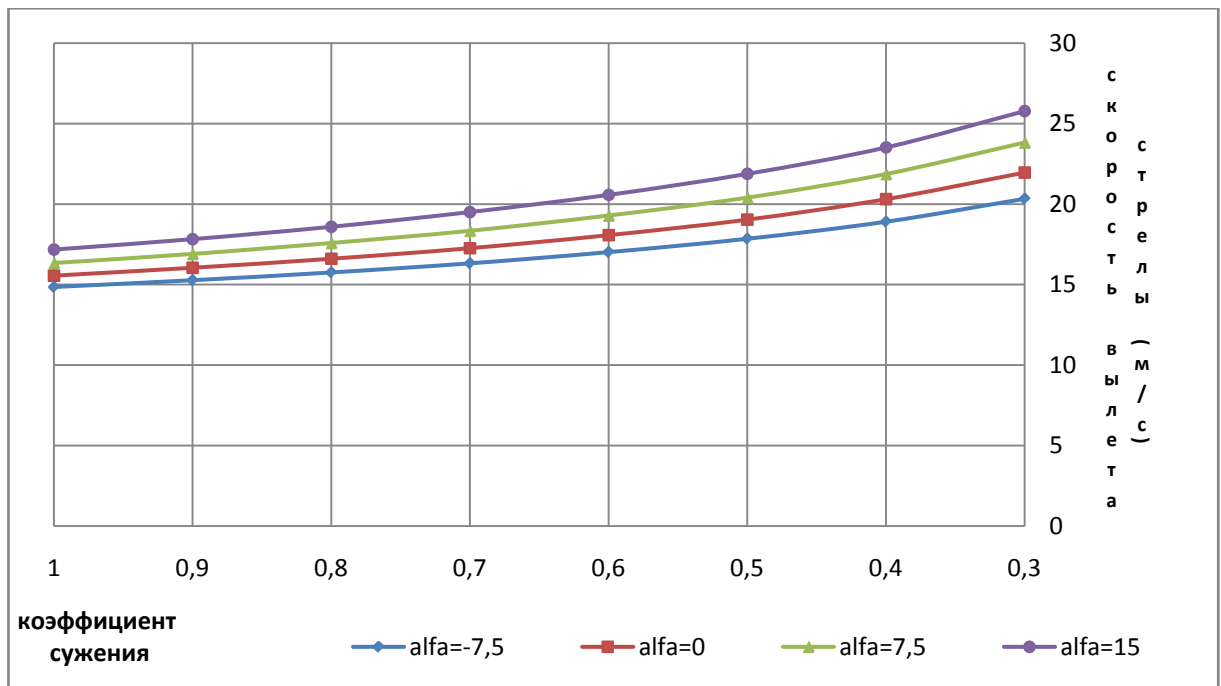


РИС.9. ЗАВИСИМОСТЬ СКОРОСТИ ВЫЛЕТА СТРЕЛЫ ДЛЯ ЛУКА С ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТЬЮ ОТ КОЭФФИЦИЕНТА СУЖЕНИЯ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ УГЛОВ ВЫГИБА ПЛЕЧ

В приложении А приведены кадры характерной видеосъемки выстрела из лука.

В приложении В приведены характерные формы различных луков в зависимости от величины базы лука.

## Основные результаты работы, выносимые на защиту:

1. Экспериментальное исследование процесса выстрела из лука. При этом выявлены следующие закономерности:
  - a. В процессе разгона стрелы обе половины тетивы остаются прямолинейными.
  - b. В процессе выстрела плечи лука движутся поступательно (то есть отсутствуют собственные колебания).
  - c. Вид временной зависимости координаты конца стрелы и скорости стрелы качественно не зависят от конструкции лука.
  - d. Материал, из которого изготовлены плечи лука (дерево, пластик, металл) оказывает качественное влияние на вид зависимости силы натяжения лука от величины базы лука.
2. Построена математическая модель задачи о выстреле из лука.
3. Исследованы зависимости скорости вылета стрелы от различных параметров лука. При этом установлены следующие закономерности:
  - a. Лук для каждого стрелка должен подбираться индивидуально.
  - b. Для каждого стрелка является более выгодным лук с наибольшей длиной плеч, при этом, чем длиннее плечи лука, тем меньше оптимальный угол выгиба.
  - c. Переменное сечение плеча лука (например, уменьшение коэффициента сужения  $C$ ) позволяет получить значительный выигрыш в скорости вылета стрелы.
  - d. Увеличение начальной кривизны плеча лука позволяет получить выигрыш в скорости вылета стрелы, но при этом возрастает сила натяжения лука. При одинаковой силе натяжения лука увеличение начальной кривизны плеча лука не дает выигрыша в скорости вылета стрелы.
4. Выполнено сравнение результатов теоретических расчетов с экспериментальными данными.

## Публикации.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Звягин А.В., Лужин А.А. Зависимость скорости вылета стрелы при выстреле из лука от его параметров. //Ломоносовские чтения. Научная конф. Секция механики. 2005 год. Тезисы докладов. – Москва: Изд-во Моск. Ун-та, 2005. – С. 95.
2. Звягин А.В., Лужин А.А. Влияние угла выгиба плеча лука на скорость вылета стрелы. //Ломоносовские чтения. Научная конф. Секция механики. 2006 год. Тезисы докладов. – Москва: Изд-во Моск. Ун-та, 2006. – С. 69.
3. Лужин А.А. Моделирование выстрела из лука: теория и эксперимент. //Ломоносовские чтения. Научная конф. Секция механики. 2008 год. Тезисы докладов. – Москва: Изд-во Моск. Ун-та, 2008. – С. 124-125.
4. Звягин А.В., Лужин А.А. Моделирование выстрела из лука. //Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем. и Механ. – 2008. - №4. – С. 40-45.
5. Звягин А.В., Лужин А.А. Моделирование выстрела из лука. // Теория и практика расчета зданий, сооружений и элементов конструкций. Аналитические и численные методы. Научная конф. 2006 год. Сборник трудов. – Москва: Изд-во МГСУ, 2008. – С. 58-67.