

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 539.3

ОЛЕХОВА Любовь Владимировна

Кручение неоднородного анизотропного стержня

Специальность: 01.02.04 — механика деформируемого твёрдого тела

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2009

Работа выполнена на кафедре механики композитов
механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова

Научный руководитель:

Доктор физико-математических наук
профессор В.И. Горбачев

Официальные оппоненты:

Доктор технических наук
профессор А.Н. Полилов
Доктор физико-математических наук
профессор А.А. Ташкинов

Ведущая организация:

Институт механики сплошных сред УоРАН

Защита состоится 13 февраля 2009 года в 16 часов на заседании
специализированного совета Д 501.001.91 по механике при Московском
государственном университете им. М.В. Ломоносова по адресу: 119992,
Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет,
аудитория 1610.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-мате-
матического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж)

Автореферат разослан «12» января 2009 года.

Учёный секретарь
диссертационного совета Д 501.001.91
профессор

С.В. Шешенин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Объект исследования и актуальность темы

При интенсивном развитии техники, конструировании машин и проектировании инженерных сооружений важное место занимают расчёты их элементов на прочность. Высокие темпы разработки и внедрения новых конструкционных материалов приводят к необходимости учёта неоднородности механических свойств. Кроме этого многие задачи различных разделов механики деформируемого твёрдого тела сводятся к задачам неоднородной теории упругости. Это подтверждается выходом большого количества книг и статей. К 1977 году Колчиным Г.Б. и Фаверманом Э.А. было издано два весьма полных библиографических указателя, в которых систематизировано 2611 работ советских и иностранных авторов, вышедших только до 1973 г. Особое место в теории неоднородных тел занимает механика композитов. К настоящему времени механика композитов выделилась в самостоятельное направление в МДТТ. По механике композитов во всем мире выходит огромное количество информации. В обзоре Тарнопольского Ю.М. были проанализированы наиболее ценные работы в этой области, вышедшие до 1989 года. Методы решения краевых задач теории упругости неоднородного тела во многом определяются формой области и видом функций, характеризующих зависимость упругих свойств от координат. Большое количество частных задач для непрерывно неоднородных тел было рассмотрено Ломакиным В.А., Колчиным Г.Б. Общая теория расчета упругих брусьев, составленных из материалов с различными механическими характеристиками, развивалась Мухелишвили Н.И. Им рассмотрены задачи изгиба, растяжения и кручения неоднородных (кусочно-однородных) в сечении изотропных брусьев в плане пространственной задачи теории упругости. Кручение анизотропные стержней рассматривались в работах Лехницкого С.Г. В настоящее время наиболее распространенными методами решения задач механики композитов являются два метода — это метод малого геометрического параметра (ММГП) и метод тензоров Грина (МТГ). Первым был предложен ММГП. В 1974 и 1975 годах Бахвалов Н.С. в ДАН СССР опубликовал две статьи по осреднённым характеристикам тел с периодической структурой и по осреднению дифференциальных уравнений в частных производных с периодическими коэффициентами. МТГ был предложен Горбачевым В.И. в 1991 году, т.е. на 17 лет позже. В этом методе рассматривается произвольно неоднородное упругое тело (в том числе и периодически неоднородное). В основе МТГ лежит возможность представления решения любой линейной краевой задачи для тела с одними упругими

характеристиками через решение такой же задачи для тела точно такой же формы, что и исходное, но с другими упругими характеристиками. В представлении существенную роль играет тензор Грина рассматриваемой краевой задачи для исходного тела. Это обстоятельство как раз и послужило основанием для выбора названия метода.

Цель диссертационной работы

Целью диссертационной работы является создание метода осреднения для решения задачи о кручении прямого, неоднородного в сечении, анизотропного стержня.

Научная новизна

1. Получена новая интегральная формула для представления решения задачи о кручении неоднородного стержня через решение задачи о кручении однородного стержня с таким же поперечным сечением.
2. Из интегральной формулы найдено эквивалентное представление решения задачи о кручении неоднородного стержня в виде ряда по производным от решения задачи о кручении однородного стержня с таким же поперечным сечением. Для коэффициентов ряда (N -функций) выведена система вспомогательных рекуррентных краевых задач на поперечном сечении.
3. Получено выражение для эффективных характеристик при кручении через функцию Грина. Показана их симметрия и положительная определенность.
4. Создана программа численного нахождения методом конечных элементов N -функций с одним индексом и эффективных податливостей при кручении неоднородного стержня.
5. Исследованы периодические структуры. Показано, что при кручении стержня с периодической структурой в окрестности контура поперечного сечения имеется пограничный слой, в котором N -функции не являются периодическими функциями координат на ячейке периодичности. При удалении от границы вглубь тела N -функции стремятся к своим периодическим значениям на ячейке периодичности. Показано, что эффективные характеристики, найденные через периодическое решение вспомогательной задачи

на ячейке, практически не отличаются от эффективных характеристик, определяемых через решение краевой вспомогательной задачи на ячейке.

Достоверность результатов обусловлена использованием корректных постановок задач теории упругости, математического анализа, численных методов, сравнением полученных результатов и точных аналитических решений (задачи о кручении неограниченного слоя).

Научная и практическая ценность работы.

Созданы методы, алгоритмы и программные средства, позволяющие проводить численные расчеты для нахождения эффективных характеристик и напряжений при кручении анизотропного неоднородного стержня любого поперечного сечения, что имеет важное значения при расчёте инженерных сооружений, сделанных, например, из волокнистых композиционных материалов.

Апробация работы

Основные результаты, полученные в диссертации, докладывались на:

- Научная конференция “Ломоносовские чтения”, секция механики, МГУ им. М.В. Ломоносова, 2002, 2004, 2005, 2007 гг.
- Аспирантский семинар и научно-исследовательский семинар кафедры механики композитов механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством д.ф.-м.н., проф. Б.Е. Победри, 2003–2008 гг.

Структура и объём работы

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, двух приложений и списка литературы. Нумерация формул в каждой главе автономная. Каждая формула нумеруется тремя числами; первая из них указывает на номер главы, вторая — номер пункта в этой главе, а третья порядковый номер формулы в этом пункте.

Диссертация содержит 116 страницы, включая 32 иллюстрации и 7 страниц списка литературы с 78-ю наименованиями.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении даётся краткий обзор литературы по теме диссертации и излагается краткое содержание диссертационной работы.

В первой главе даётся общая постановка трёхмерной задачи о равновесии прямолинейного стержня. Используя принцип Сен-Венана, даётся приближенная постановка для этой же задачи: вместо распределенных по торцам усилий рассматривается статически эквивалентная им система сил и моментов, приложенных в центрах тяжести торцов. Даётся общая постановка задачи Сен-Венана и вводятся ограничения на тип анизотропии и вид неоднородности, полагая, что любое поперечное сечение бруса является плоскостью симметрии упругих свойств, а свойства являются функциями координат точки в поперечном сечении. В этом случае, если выбрать декартову систему координат и ось x_3 направить по оси стержня, то все коэффициенты J_{ijkl} с нечётным количеством индексов «3» обратятся в нуль, а компоненты тензора податливостей будут зависеть только от координат x_1 и x_2 .

Далее рассматривается чистое кручение, то есть полагается, что внешние силы, распределённые на торце, приводятся только к крутящему вокруг оси x_3 моменту $M_3^L = M$. Используя полуобратный метод Сен-Венана, даётся окончательная постановка задачи Сен-Венана, которая состоит из:

уравнений равновесия:

$$\sigma_{3J,J} = 0 \quad (1)$$

закона Гука:

$$\varepsilon_{I3} = \varepsilon_{I3}(x_1, x_2) = 2 J_{I3K3}(x_1, x_2) \sigma_{K3}(x_1, x_2) \quad (2)$$

условия совместности:

$$\epsilon_{JI} \varepsilon_{3J,IT} = 0 \quad (3)$$

граничных условий:

$$\sigma_{3J} n_J|_{\Gamma} = 0, \Gamma — \text{ контур поперечного сечения,} \quad (4)$$

интегрального условия:

$$\int_{\Sigma_L} \epsilon_{JK} x_J \sigma_{K3} d\Sigma_L = \int_{\Sigma_L} (x_1 \sigma_{23} - x_2 \sigma_{13}) d\Sigma_L = M. \quad (5)$$

Вводятся функция напряжений при кручении $\psi(x_1, x_2)$ и функция кручения (депланация) $\varphi(x_1, x_2)$.

Функция напряжений вводится следующим образом:

$$\sigma_{3I} = \tau \epsilon_{IL} \psi_{,L}. \quad (6)$$

Константа τ по размерности обратна размерности длины и называется круткой. Она представляет собой изменение угла поворота окрестности точки относительно оси x_3 , отнесённое к единице длины.

Выводится постановка задачи для ψ в односвязной области:

$$(D_{IJ} \psi_{,I})_{,J} = -2, \quad \psi|_{\Gamma} = 0, \quad (7)$$

где

$$D_{TL} \equiv 4 \epsilon_{IT} \epsilon_{KL} J_{IK3}, \quad (8)$$

D_{TL} — симметрическая матрица, причем

$$D_{11} = 4 J_{2323} = \frac{1}{G_2}, \quad D_{22} = 4 J_{1313} = \frac{1}{G_1}, \quad D_{12} = D_{21} = -4 J_{1323}, \quad (9)$$

где G_1, G_2 — модули сдвига.

Находится крутка τ :

$$\tau = \frac{M}{2 \int_{\Sigma} \psi d\Sigma}. \quad (10)$$

Выражение, стоящее в знаменателе формулы (10) называется жёсткостью при кручении и обозначается

$$D \equiv 2 \int_{\Sigma} \psi d\Sigma. \quad (11)$$

Дается оценка снизу для жёсткости при кручении.

Функция φ определяет осевое перемещение точки поперечного сечения, в результате которого первоначально плоское поперечное сечение становится искривлённым:

$$u_3(x_1, x_2) = \tau \varphi(x_1, x_2). \quad (12)$$

Дается постановка задачи для нахождения φ . Также в первой главе приводятся примеры точного решения известных задач о кручении однородного изотропного стержня, а именно: кручение круглого стержня,

кручение бесконечного слоя, кручение стержня прямоугольного сечения.

Во второй главе рассматривается метод осреднения для функции кручения. Вводится сопутствующая задача — такая же задача, как и для нахождения функции кручения, только с постоянными коэффициентами:

$$D_{IJ}^0 \psi_{,IJ}^0 = -2, \quad \psi^0|_{\Gamma} = 0, \quad (13)$$

где D_{IJ}^0 — коэффициенты, независящие от координат, например

$$D_{IJ}^0 = \frac{\delta_{IJ}}{G^0}. \quad (14)$$

Смысл метода осреднения в данной работе заключается в том, чтобы выразить решение исходной задачи через решение сопутствующей.

Вводится функция Грина исходной задачи $\Upsilon(x, \xi)$:

$$(D_{IJ} \Upsilon_{,I})_{,J} = -\delta(x - \xi), \quad \Upsilon|_{x \in \Gamma} = 0, \quad (15)$$

где $\delta(x - \xi) = \delta(x_1 - \xi_1) \delta(x_2 - \xi_2)$ — дельта-функция Дирака.

После этого даётся вывод интегрального представления решения исходной задачи через решение сопутствующей задачи и функции Грина исходной задачи:

$$\psi(x) = \psi^0(x) + \int_{\Sigma} [D_{IJ}^0 - D_{IJ}(\xi)] \Upsilon_{,J}(\xi, x) \psi_{,I}^0(\xi) d\Sigma_{\xi}. \quad (16)$$

Для получение представления в виде ряда, раскладываем функцию напряжений для сопутствующей задачи ψ^0 в ряд Тейлора в окрестности точки ξ , предполагая её гладкость:

$$\psi^0(\xi) = \sum_{q=0}^{\infty} \prod_{I_1 \dots I_q} (\xi, x) \psi_{,I_1 \dots I_q}^0(x), \quad (17)$$

$$\text{где } \prod_{I_1 \dots I_q} (\xi, x) \equiv \frac{1}{q!} (\xi_{I_1} - x_{I_1}) \cdots (\xi_{I_q} - x_{I_q}). \quad (18)$$

Затем (17) подставляем в интегральное представление (16):

$$\psi(x) = \sum_{q=0}^{\infty} N_{I_1 \dots I_q}(x) \psi_{,I_1 \dots I_q}^0(x), \quad (19)$$

$$\text{где } N_{I_1 \dots I_q} = \begin{cases} 0, & \text{при } q < 0, \\ 1, & \text{при } q = 0, \\ \int_{\Sigma} (D_{I_1 J}^0 - D_{I_1 J}(\xi)) \Upsilon_{,J} \prod_{I_2 \dots I_q} d\Sigma_{\xi}, & \text{при } q > 0. \end{cases} \quad (20)$$

Поскольку функция Грина исходной задачи нам неизвестна, считаем, что коэффициенты ряда (19) являются искомыми функциями координат x_1 и x_2 . Для их нахождения подставим ряд (19) в уравнение (7) и, учитывая уравнение (13) сопутствующей задачи, получаем систему рекуррентных уравнений:

$$(D_{IJ} N_{I_1, I} + D_{I_1 J})_{,J} = 0, \quad (21)$$

$$(D_{IJ} N_{I_1 I_2, I} + D_{I_2 J} N_{I_1})_{,J} + D_{I I_2} N_{I_1, I} + D_{I_1 I_2} = D_{I_1 I_2}^0, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} & (D_{IJ} N_{I_1 \dots I_q, I} + D_{I_q J} N_{I_1 \dots I_{q-1}})_{,J} + \\ & + D_{I I_q} N_{I_1 \dots I_{q-1}, I} + D_{I_{q-1} I_q} N_{I_1 \dots I_{q-2}} = 0, \text{ при } q \geq 3. \end{aligned} \quad (23)$$

К уравнениям (21)–(23) необходимо добавить граничные условия для N -функций, которые следуют из граничного условия (7) ($\psi|_{\Gamma} = 0$) сопутствующей задачи и представления в виде ряда функции напряжений (19):

$$N_{I_1 \dots I_q}|_{\Gamma} = 0, \text{ при } q \geq 1. \quad (24)$$

В том случае когда ψ^0 является полиномом конечной степени, функция напряжений ψ представляется через ψ^0 в виде конечной суммы, и ψ будет точным решением задачи о кручении неоднородного стержня¹. В выражения для функций $N_{I_1 \dots I_q}$ будут входить коэффициенты D_{IJ}^0 , однако после преобразования конечной суммы и приведения подобных членов эти коэффициенты исчезают из точного решения о кручении неоднородного стержня.

В том случае когда все производные функции ψ^0 отличны от нуля, то конечная сумма для ψ будет приближенным решением исходной задачи и, естественно, в него будут входить коэффициенты D_{IJ}^0 . Качество приближения будет зависеть не только от количества членов в этой сумме, но и от выбора коэффициентов D_{IJ}^0 . Наиболее лучшие результаты будет давать тот случай, когда коэффициенты D_{IJ}^0 являются эффективными коэффициентами для исходной задачи (7), о которых речь будет идти в третьей главе.

¹конечно, для этого нужно найти соответствующие N -функции

Далее, в виде примера, подробно рассматривается задача, когда поперечное сечение — неограниченный слой. Находятся $N_{I_1} N_{I_1 I_2}$ -функции для неоднородного по толщине анизотропного слоя. Делается вывод, что для анизотропного материала функции N_1 , N_{12} и N_{21} отличны от тождественного нуля, причем $N_{12} \neq N_{21}$. В ортотропном случае коэффициенты $D_{12} = D_{21} = 0$ и функции N_1 , N_{12} , N_{21} тождественно равны нулю. Остальные функции будут ненулевые. Также приводятся явные выражения для N_2, N_{11}, N_{22} -функций для изотропного и неоднородного слоя и N_1 - N_5 -функции для однородного слоя при обозначении $\underbrace{N_2 \dots 2}_q \equiv N_q$. Для однородного случая приводятся графики.

В конце второй главы приводится постановка более общей задачи:

$$\begin{aligned} q_{I,I} &= -f(x), & q_I &= b_{I,J}(x)\eta_J, & \eta_J &= \psi_{,J}, & (x \in F) \\ \psi|_{\Gamma_1} &= f_1(y), & q_I n_I|_{\Gamma_2} &= f_2(y). & (y \in \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2) \end{aligned} \quad (25)$$

Наряду с исходной задачей (25), рассматривается точно такая же задача для уравнения с постоянными коэффициентами $b_{I,J}^0 = \text{const}$ в односвязной области той же самой формы (сопутствующая задача):

$$\begin{aligned} q_{I,I}^0 &= -f(x), & q_I^0 &= b_{I,J}^0 \eta_J^0, & \eta_J^0 &= \psi_{,J}^0, & (x \in F) \\ \psi^0|_{\Gamma_1} &= f_1(y), & q_I^0 n_I|_{\Gamma_2} &= f_2(y). & (y \in \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2) \end{aligned} \quad (26)$$

При $f(x) = 2, f_1(y) = 0, f_2(y) = 0, b_{ij} = D_{ij}$ и $\Gamma_1 = \Gamma$ исходная задача (25) описывает чистое кручение неоднородного стержня, а сопутствующая задача (26) описывает чистое кручение однородного стержня. Решение такой задачи было показано ранее. В этом случае напряжения при кручении моментом M однородного стержня будут следующие:

$$\sigma_{I3} = \tau^0 \epsilon_{IK} \psi_{,K}^0, \quad (27)$$

где τ^0 — крутка однородного стержня жесткости D^0 , причем

$$\tau^0 = \frac{M}{D^0}, \quad D^0 = 2 \int_F \psi^0 dF. \quad (28)$$

Приводится интегральная формула представления решения исходного уравнения (25) через решение уравнения (26) сопутствующей задачи:

$$\psi(x) = \psi^0(x) + \int_F (b_{I,J}^0 - b_{I,J}(\xi)) \Upsilon_{|J}(\xi, x) \psi_{|I}^0(\xi) dF_\xi. \quad (29)$$

Индекс после вертикальной черты означает производную по соответствующей переменной ξ_J , а $\Upsilon(x, \xi)$ — функция Грина смешанной краевой задачи (25), т. е.

$$\begin{aligned} (b_{IJ}(x)\Upsilon_{,J}(x, \xi))_{,I} &= -\delta(x - \xi), \quad \text{при } x, \xi \in F, \\ \Upsilon(y, \xi)|_{y \in \Gamma_1} &= 0, \quad b_{IJ}(y)\Upsilon_{,J}(y, \xi)n_I(y)|_{y \in \Gamma_2} = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Здесь $\delta(x - \xi)$ — δ -функция Дирака, сосредоточенная в точке ξ .

В случае второй краевой задачи ($\Gamma_2 \equiv \Gamma$) для функции ψ справедливо тождество:

$$\psi^0(x) - \int_F b_{IJ}(\xi) \Upsilon_{IJ}(\xi, x) \psi_{,I}^0(\xi) dF_\xi \equiv 0, \quad (31)$$

поэтому интегральная формула (29) примет вид:

$$\psi(x) = \int_F \Upsilon_{IJ}(\xi, x) q_J^0(\xi) dF_\xi. \quad (32)$$

В третьей главе рассматриваются эффективные характеристики при кручении. Вводится понятие первой специальной краевой задачи (СКЗ):

$$\begin{aligned} [b_{IJ}(x)\psi_{,J}]_{,I} &= 0, \\ \psi|_\Gamma &= \gamma_I y_I, \quad \gamma_I = \text{const} \quad (x \in F, \quad y \in \Gamma). \end{aligned} \quad (33)$$

и второй СКЗ, отличие которой от первой состоит в виде граничных условий:

$$q_I n_I|_\Gamma = \lambda_I n_I, \quad \lambda_I = \text{const}. \quad (34)$$

Доказывается, что в первой СКЗ:

$$\langle \eta_J \rangle = \gamma_J, \quad (35)$$

где угловые скобки обозначают среднее значение функции в области F , а во второй:

$$\langle q_I \rangle = \lambda_I. \quad (36)$$

Вводится определение эффективных коэффициентов $\widehat{b}_{IJ}$ (эффективные податливости) в случае первой СКЗ:

$$\langle q_I \rangle = \widehat{b}_{IJ} \langle \eta_J \rangle = \widehat{b}_{IJ} \gamma_J, \quad (37)$$

и $\widehat{a}_{IJ}$ (эффективные модули сдвига) в случае второй СКЗ:

$$\langle \eta_I \rangle = \widehat{a}_{IJ} \langle q_J \rangle = \widehat{a}_{IJ} \lambda_J. \quad (38)$$

И вводится сопутствующая задача. Для первой СКЗ:

$$\begin{aligned} q_{I,I}^0 &= 0, \quad q_I^0 = b_{IJ}^0 \eta_J^0, \quad \eta_J^0 = \psi_{,J}^0, \\ \psi^0|_{\Gamma} &= \gamma_I y_I, \quad \gamma_I = \text{const} \quad (x \in F, \quad y \in \Gamma), \end{aligned} \quad (39)$$

или

$$\begin{aligned} b_{IJ}^0 \psi_{,IJ}^0 &= 0, \\ \psi^0|_{\Gamma} &= \gamma_I y_I, \quad \gamma_I = \text{const} \quad (x \in F, \quad y \in \Gamma). \end{aligned} \quad (40)$$

Для второй СКЗ:

$$\begin{aligned} q_{I,I}^0 &= 0, \quad q_I^0 = b_{IJ}^0 \eta_J^0, \quad \eta_J^0 = \psi_{,J}^0, \\ q_I^0 n_I|_{\Gamma} &= \lambda_I n_I, \quad \lambda_I = \text{const}. \end{aligned} \quad (41)$$

Если считать, что $D_{IJ} \equiv b_{IJ}$, где D_{IJ} — коэффициенты в уравнении для функции напряжений при кручении, тогда к эффективным коэффициентам $\widehat{b}_{IJ}$ и $\widehat{a}_{IJ}$ должны быть предъявлены дополнительные требования симметрии и положительной определённости:

$$\begin{aligned} \widehat{b}_{IJ} &= \widehat{b}_{JI}, & \widehat{b}_{IJ} \kappa_I \kappa_J &\geq m \kappa_I \kappa_I, & \text{для } \forall \kappa_I \text{ и } m > 0, \\ \widehat{a}_{IJ} &= \widehat{a}_{JI}, & \widehat{a}_{IJ} \kappa_I \kappa_J &\geq m_1 \kappa_I \kappa_I, & \text{для } \forall \kappa_I \text{ и } m_1 > 0. \end{aligned}$$

Выводятся интегральные формулы для эффективных коэффициентов $\widehat{b}_{IJ}$ и $\widehat{a}_{IJ}$:

$$\widehat{b}_{IJ} = \left\langle b_{IJ}(x) - b_{IK}(x) \int_F b_{JL}(\xi) \Upsilon_{|L,K}(\xi, x) dF_{\xi} \right\rangle, \quad (42)$$

где $\Upsilon(x, \xi)$ — функция Грина первой краевой задачи, то есть функция, в области F удовлетворяющая уравнению (30), а на всём контуре Γ однородному условию первого рода $\Upsilon(y \in \Gamma, \xi) = 0$;

$$\widehat{a}_{IJ} = \left\langle \int_F \Upsilon_{|J,I}(\xi, x) dF_{\xi} \right\rangle, \quad (43)$$

а здесь $\Upsilon(x, \xi)$ — функция Грина второй краевой задачи, то есть функция, в области F удовлетворяющая уравнению (30), а на всём контуре Γ однородному условию второго рода $b_{IJ}(y)\Upsilon_{,J}(y, \xi)n_I(y) = 0$.

Для вычисления эффективных податливостей нужно знать не саму функцию Грина, а лишь интегралы по области от величин, в которые входит функция Грина. Для их вычисления введём вспомогательные обозначения, положив

$$N_I(x) \equiv - \int_F b_{IL}(\xi) G_{|L}(\xi, x) dF_\xi, \quad (44)$$

Выводится краевая задача для нахождения N -функций:

$$(b_{IJ} + b_{IK}N_{J,K})_{,I} = 0, \quad N_J|_\Gamma = 0. \quad (45)$$

После решения этой задачи эффективные коэффициенты $\hat{b}_{IJ}$ находятся по формуле:

$$\hat{b}_{IJ} = \langle b_{IJ} + b_{IK}N_{J,K} \rangle, \quad (46)$$

или же

$$\hat{b}_{IJ} = \langle b_{IK}\Phi_{J,K} \rangle, \quad \Phi_J \equiv x_J + N_J. \quad (47)$$

Также даётся две постановки краевой задачи для вычисления эффективных модулей сдвига. Обозначим

$$M_K(x) \equiv \int_F \Upsilon_{|K}(\xi, x) dF_\xi, \quad (48)$$

тогда

$$\begin{aligned} \eta_I &= M_{K,I}\lambda_K, \\ q_I &= b_{IJ}\eta_I = b_{IJ}M_{K,J}\lambda_K. \end{aligned} \quad (49)$$

Отсюда и из постановки второй СКЗ следует постановка задачи для M -функций:

$$(b_{IJ}M_{K,J})_{,I} = 0, \quad b_{IJ}M_{K,J}n_I|_\Gamma = n_K. \quad (50)$$

После решения этой задачи, учитывая (38), найдем эффективные коэффициенты $\hat{a}_{IJ}$:

$$\hat{a}_{IJ} = \langle M_{J,I} \rangle. \quad (51)$$

Задачу (50) удобно представить в ином виде. Для этого положим

$$A_{IK} \equiv b_{IJ} M_{K,J} \Rightarrow M_{K,J} = a_{JI} A_{IK}. \quad (52)$$

Здесь a_{IJ} симметричная матрица коэффициентов, обратная к матрице b_{IJ} .

Так как постоянные величины λ_I произвольны и $q_I = b_{IJ} M_{K,J} \lambda_K = A_{IK} \lambda_K$ и $\langle q_I \rangle = \lambda_I$, то $\langle A_{IK} \rangle = \delta_{IK}$.

Получаем две формулы для эффективных величин $\hat{a}_{IJ}$:

$$\hat{a}_{IJ} = \langle a_{IK} A_{KJ} \rangle = \langle a_{KL} A_{KI} A_{LJ} \rangle. \quad (53)$$

Величины A_{IJ} находятся из решения следующей краевой задачи:

$$A_{IJ,I} = 0, \quad \epsilon_{JL} (a_{JI} A_{IK})_{,L} = 0, \quad A_{IJ} n_I|_{\Gamma} = n_J. \quad (54)$$

Если теперь ввести другие неизвестные так, чтобы

$$A_{IJ} = \delta_{IJ} + \epsilon_{IM} L_{J,M}, \quad (55)$$

тогда первое уравнение из (54) удовлетворяется тождественно, а из второго уравнения и граничного условия вытекает постановка задачи для L -функций:

$$\epsilon_{JL} (a_{JK} + a_{JI} \epsilon_{IM} L_{K,M})_{,L} = 0, \quad (56)$$

$$L_J|_{\Gamma} = \text{const} = 0. \quad (57)$$

В случае односвязной области F константу можно положить равной нулю.

Функции N и L определяются только функциональной зависимостью тензоров $\underline{b}$ и $\underline{a}$ от координат и обращаются в нуль для однородного материала.

Задачу (56) легко можно преобразовать к виду:

$$(C_{I3J3} \epsilon_{KJ} + C_{I3J3} L_{K,J})_{,I} = 0, \quad L_K|_{\Gamma} = 0. \quad (58)$$

Находится связь решений задач (58) и (45):

$$L_K(\underline{C}, x) = \epsilon_{KS} N_S(\underline{C}, x), \quad N_K(\underline{b}, x) = \epsilon_{KS} L_S(\underline{b}, x). \quad (59)$$

Решив уравнения (56) с учетом граничных условий (57), найдём L -функции, а затем по формуле (53) найдём эффективные величины $\hat{a}_{IJ}$:

$$\begin{aligned}\widehat{a}_{IJ} &= \langle a_{IK} A_{KJ} \rangle = \langle a_{IJ} + \epsilon_{KM} a_{KI} L_{J,M} \rangle = \\ &= \frac{1}{4} \epsilon_{IP} \epsilon_{JQ} \left\langle C_{P3Q3} + C_{P3M3} N_{Q,M}(\zeta, x) \right\rangle = \frac{1}{4} \epsilon_{IP} \epsilon_{JQ} \widehat{C}_{P3Q3}.\end{aligned}\quad (60)$$

В изотропном случае $b_{IJ} = 4J_{IJ} = \delta_{IJ}/G(x)$, $a_{IJ} = C_{I3J3}/4 = \delta_{IJ}G(x)$, где G — переменный по сечению модуль сдвига материала стержня.

Уравнения для N и L функций примут вид:

$$\left(\frac{1}{G} \delta_{KI} + \frac{1}{G} N_{K,I} \right)_{,I} = 0, \quad (G \epsilon_{KI} + G L_{K,I})_{,I} = 0, \quad (61)$$

а эффективные характеристики будут определяться по формулам:

$$\widehat{b}_{IK} = \left\langle \frac{1}{G} \delta_{IK} + \frac{1}{G} N_{K,I} \right\rangle, \quad \widehat{a}_{IK} = \langle G \delta_{IK} + G \epsilon_{IM} L_{K,M} \rangle. \quad (62)$$

Доказаны теоремы о симметрии и положительной определённости эффективных податливостей и эффективных модулей сдвига.

Подробно рассматривается случай неоднородного по толщине слоя. Получены явные аналитические выражения эффективных модулей сдвига и эффективных податливостей неоднородного по толщине слоя. Показано, что в этом случае эффективные характеристики, найденные через решения первой и второй специальных краевых задач, являются взаимно обратными.

В конце третьей главы обсуждается, так называемое, нулевое приближение в механике композитов, введённое Б.Е. Победрей. Рассматривается нулевое приближение в задаче о кручении неоднородного стержня.

В четвертой главе применяется метод конечных элементов для нахождения N -функций и эффективных податливостей. Дётся краткое описание метода конечных элементов.

Численно решается несколько задач, а именно: кручение стержня, поперечное сечение которого — длинная полоса, кручение стержня, когда поперечное сечение — слоистый круг и случай, когда поперечное сечение — квадрат с различным (1, 9, 25) количеством квадратных включений.

Во всех задачах рассматриваются следующие модули сдвига:

случай а

$$D_{IJ}^{\text{внешн}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_{IJ}^{\text{внутр}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix}. \quad (63)$$

случай b

$$D_{IJ}^{\text{внешн}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_{IJ}^{\text{внутр}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}. \quad (64)$$

На рисунках 1–3 приводятся N_1 -функция, эффективные податливости $D_{\alpha\alpha}^0$, функция напряжений $\psi(x_1, x_2)$ и напряжения $\sigma = \sqrt{\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2}$ (в нулевом приближении) для квадратного сечения с 1, 9, 25 квадратными включениями соответственно. Функции N_1 , N_2 симметричны друг другу при замене координат x_1 на x_2 и наоборот, т.е. горизонтальные сечения N_1 равны вертикальным сечениям N_2 и функции симметричны относительно нуля, поэтому приведены только функция N_1 .

Расчёты выполнены на суперкомпьютерном комплексе НИВЦ МГУ — кластере "Скиф". Адрес в сети Интернет:
<http://parallel.ru/cluster>.

В первом приложении дается подробное описание комплекса программного обеспечения, с помощью которого вычисляются N -функции и эффективные податливости.

В втором приложении даются технические характеристики подсчитанных областей.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю, д.ф.-м.н., проф. Горбачеву Владимиру Ивановичу за его постоянное внимание к работе, личное участие и поддержку моей уверенности и интереса, терявших в многочисленных трудностях.

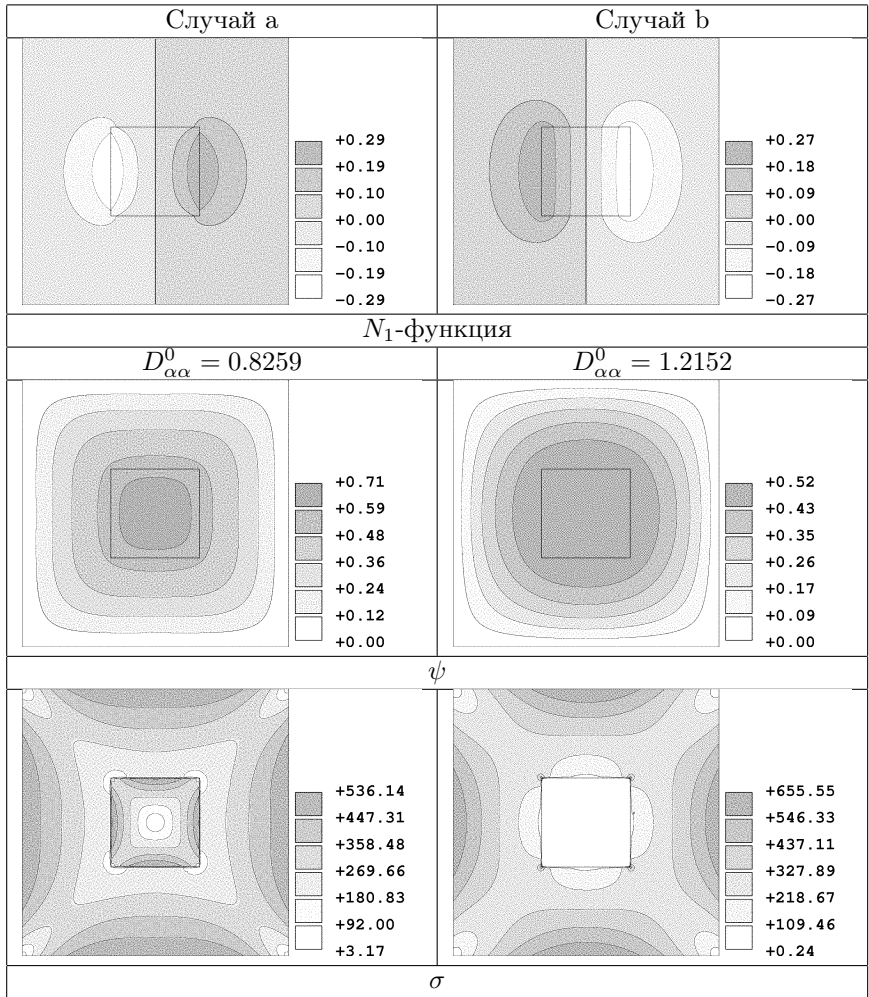


Рис. 1: Функция N_1 , эффективные податливости, функции ψ и σ для квадратного сечения с одним квадратным включением.

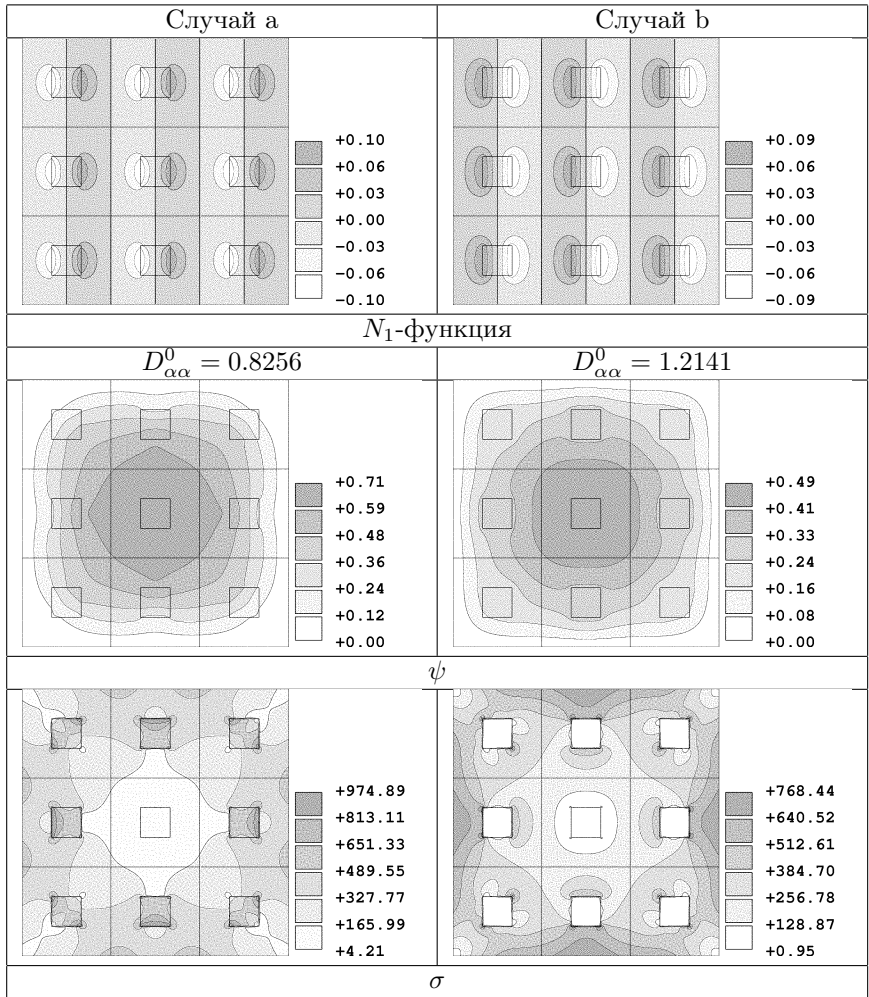


Рис. 2: Функция N_1 , эффективные податливости, функции ψ и σ для квадратного сечения с девятью квадратными включениями.

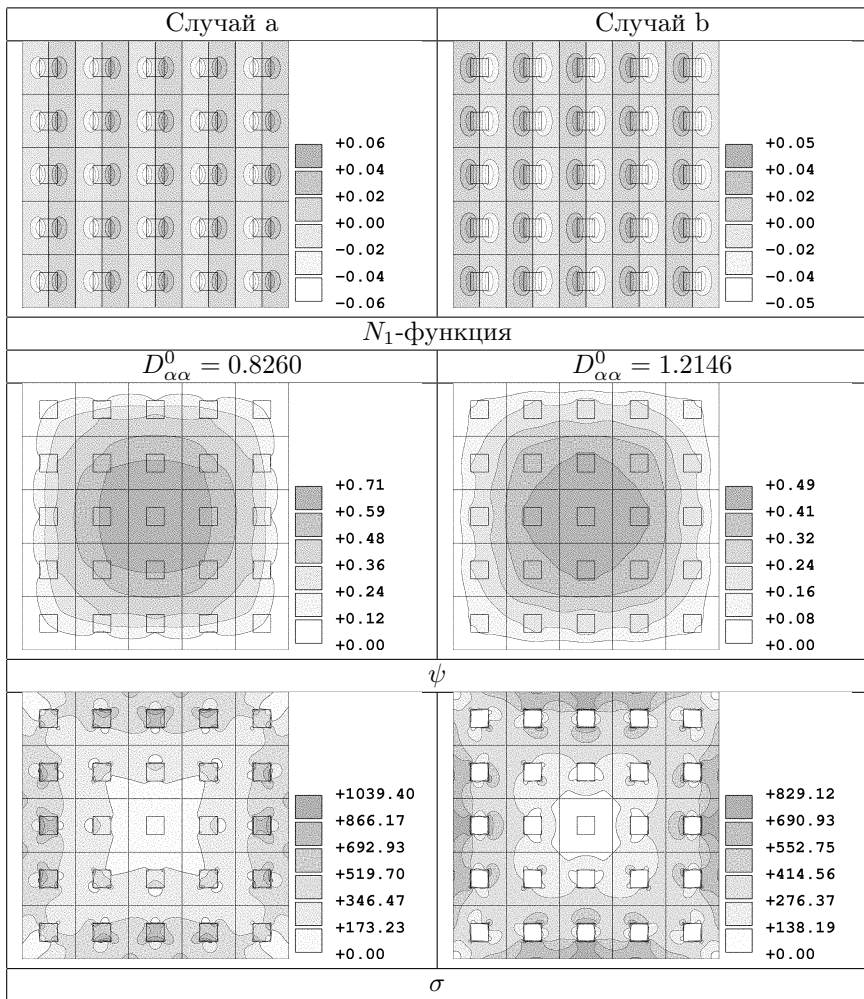


Рис. 3: Функция N_1 , эффективные податливости, функции ψ и σ для квадратного сечения с 25 квадратными включениями.

Основные результаты и выводы

1. Получена новая интегральная формула для представления решения задачи о кручении неоднородного стержня через решение задачи о кручении однородного стержня с таким же поперечным сечением. Из интегральной формулы найдено эквивалентное представление решения задачи о кручении неоднородного стержня в виде ряда по производным от решения задачи о кручении однородного стержня с таким же поперечным сечением. Для коэффициентов ряда (N -функций) выведена система вспомогательных рекуррентных краевых задач на поперечном сечении.
2. Получено выражение для эффективных характеристик при кручении через функцию Грина. Показана их симметрия и положительная определённость.
3. Программно реализован метод конечных элементов для нахождения N -функций с одним индексом, необходимых для расчёта эффективных податливостей и решения задачи о кручении в нулевом приближении. Численно решено несколько конкретных задач, а именно: задача о кручении длинной полосы, задача о кручении стержня, когда поперечное сечение — слоистый круг и когда поперечное сечение — квадрат с различным количеством (1, 9, 25) квадратных включений. Проведено сравнение численного решения с точным решением для случая длинной полосы. Проанализированы полученные результаты.
4. Исследованы периодические структуры. Показано, что при кручении стержня с периодической структурой в окрестности контура поперечного сечения имеется пограничный слой, в котором N -функции не являются периодическими функциями координат на ячейке периодичности. При удалении от границы вглубь тела N -функции стремятся к своим периодическим значениям на ячейке периодичности. Показано, что эффективные характеристики, найденные через периодическое решение вспомогательной задачи на ячейке, практически не отличаются от эффективных характеристик, определяемых через решение краевой вспомогательной задачи на ячейке.

По теме диссертации опубликованы следующие работы

1. Горбачев В.И., Зуйкова Л.В. Кручение неоднородного стержня// Тезисы докладов. Научная конференция "Ломоносовские чтения". Секция механики. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2002.
2. Горбачев В.И., Олехова Л.В. Расчёт эффективных свойств при кручении неоднородного стержня// Тезисы докладов. Научная конференция "Ломоносовские чтения". Секция механики. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2004.
3. Горбачев В.И., Олехова Л.В. Расчёт напряжений при кручении стержня из композиционного материала. // Тезисы докладов. Научная конференция "Ломоносовские чтения". Секция механики. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2005.
4. Горбачев В.И., Олехова Л.В. Эффективные свойства неоднородного стержня при кручении// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 2007. № 5. С. 41–48.
5. Горбачев В.И., Олехова Л.В. Численное моделирование эффективных свойств при кручении стержня из волокнистого композита// Тезисы докладов. Научная конференция "Ломоносовские чтения". Секция механики. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2007.
6. Олехова Л.В. Эффективные свойства при кручении стержня из композиционного материала// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 2009.(Принята к публикации)