

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи

Могилевский Евгений Ильич

**Исследование волновых  
режимов течения пленки жидкости  
при внешних воздействиях**

01.02.05 – Механика жидкости, газа и плазмы

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Москва

2008

Работа выполнена на кафедре аэромеханики и газовой динамики механико - математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова.

**Научный руководитель:** д-р физ.-мат. наук, профессор  
В.Я. Шкадов

**Официальные оппоненты:** д-р физ.-мат. наук, профессор  
Н.Н. Смирнов  
д-р физ.-мат. наук, профессор  
В.Н. Варапаев

**Ведущая организация:** Московский государственный университет  
инженерной экологии

Защита состоится 20 февраля 2009 года в 15 часов на заседании диссертационного совета Д 501.001.89 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, Воробьевы горы, Главное здание МГУ, механико - математический факультет, ауд. 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ.

Автореферат разослан «\_\_\_\_\_» января 2009 года.

Ученый секретарь  
диссертационного совета,  
д-р. физ.-мат. наук

А.Н. Осипцов

## Общая характеристика работы

**Актуальность работы.** Пленочные течения жидкости широко применяются в различных технологиях, например, при организации процессов испарения, конденсации, тепло- и массообмена. В таких случаях, как правило, жидкость течет по твердой поверхности под действием массовой силы, например, стекает по стенке под действием силы тяжести. Многочисленные эксперименты показали, что при этом свободная поверхность пленки редко оказывается плоской: обычно она покрыта теми или иными волновыми структурами. Наличие таких волн может сказываться на проводимых технических процессах как положительно (приводить к интенсификации массообмена), так и отрицательно (создавать области локального перегрева при использовании пленки как хладагента). С этой точки зрения представляется важным построение математических моделей нелинейной волновой динамики жидких пленок, а также разработка механизмов управления режимами пленочного течения с помощью создания неоднородного поля массовой силы, использования реологически сложных жидкостей или внесения внешних возмущений через твердую поверхность.

**Цель диссертационной работы** — изучение возможности управления параметрами течения жидкой пленки с помощью внешних воздействий. Для достижения указанной цели решались следующие **задачи**:

1. Изучить стационарное течение пленки вязкой жидкости по криволинейной вращающейся поверхности, выяснить влияние формы твердой поверхности на характеристики стационарного течения, развитие неустойчивости в линейной постановке и на эволюцию структуры нелинейных волн.
2. Выяснить влияние реологических свойств среды на неустойчивость

стационарного стекания пленки неньютоновской жидкости по вертикальной плоскости. Исследовать зависимость параметров волновых режимов течения от выбранной реологической модели.

3. Исследовать стекание пленки по поверхности с микрорельефом, проследить влияние структуры твердой поверхности на стационарное течение и характеристики нелинейных волн.

**Научная новизна работы.** Все основные результаты, полученные в работе, являются новыми.

Впервые изучена эволюция структуры нелинейных волн на криволинейных вращающихся поверхностях. Определены формы твердых поверхностей, на которых растекающаяся под действием центробежных сил пленка имеет постоянную толщину; найдены значения безразмерных управляющих параметров, при которых течение этой пленки наиболее устойчиво.

Выведена нелинейная система уравнений, описывающая течение пленки конечной толщины произвольной обобщенно - ньютоновской жидкости. Впервые исследовано влияние реологической модели на параметры волн.

Обнаружены качественно различные типы волн в пленке неньютоновской жидкости, стекающей по наклонной плоскости с микрорельефом. Получено объяснение стабилизации течения при конечной величине неровностей.

**Достоверность результатов.** Все результаты диссертационной работы обоснованы. Достоверность результатов диссертации обусловлена точностью численных и аналитических методов, применявшихся при постановке и расчете соответствующих задач, и совпадением результатов с опубликованными в ранее изученных частных случаях. Полученные ре-

зультаты качественно и количественно согласуются с опубликованными в литературе экспериментальными данными.

**Практическая ценность работы** определяется возможностью использования исследуемых в работе механизмов управления течением пленки. Выводы о способах стабилизации потока и интенсификации волнообразования, сделанные в работе, могут быть использованы при проектировании технологических устройств, использующих пленочные течения, и при планировании экспериментов.

**Апробация работы.** Результаты, представленные в диссертации, докладывались автором и обсуждались на следующих научных семинарах и конференциях:

- Семинар кафедры аэромеханики и газовой динамики механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством акад. Г.Г. Черного, 2007, 2008 г.
- IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике, г. Нижний Новгород, 2006 г.
- XXXIV Международная летняя школа - семинар “Advanced problems in mechanics”, г. Санкт-Петербург, 2006 г.
- Научная конференция “Ломоносовские чтения” МГУ им. М.В. Ломоносова, 2006 г. – 2008 г.
- XV школа - семинар “Современные проблемы гидроаэромеханики”, г. Сочи, 2007 г.
- III Всероссийская конференция “Задачи со свободными границами: теория, эксперимент, приложения”, г. Бийск, 2008 г.

**Публикации.** Основные результаты диссертационной работы изложены в девяти печатных работах, две из которых опубликованы в журналах, входящих в перечень ВАК. Список работ приведен в конце автореферата.

**Структура работы.** Диссертационная работа состоит из введения, обзора литературы, трех глав, заключения и списка литературы из 87 наименований. Общий объем диссертации — 116 страниц.

## Содержание работы

**Во введении** описана предметная область, сформулирована цель настоящей диссертации, подтверждена актуальность работы, дана информация о публикациях автора и апробации работы.

**Обзор литературы** содержит анализ основных достижений в изучаемой области. Прослеживаются основные этапы развития исследований пленочных течений, начиная с работ П.Л. Капицы (1948) и П.Л. Капицы и С.П. Капицы (1949), в которых изучаемая задача была впервые поставлена. Также приводятся ссылки на основные современные работы в области микрогидродинамики.

**В первой главе** рассматривается течение пленки вязкой жидкости по криволинейной вращающейся осесимметричной поверхности. Несжимаемая жидкость подается с постоянным во времени расходом  $Q'$  на конечном расстоянии  $R_{\min}$  от оси вращения. Жидкость растекается по поверхности тонким слоем и вовлекается во вращательное движение. Из описанных в литературе экспериментов известно, что такое течение на плоском диске может быть неустойчиво и сопровождаться волнами. Возможно влиять на эти процессы подбором формы твердой поверхности.

В диссертационной работе форма твердой поверхности предполагает-

ся достаточно произвольной, необходимо, чтобы толщина пленки была много меньше локального радиуса кривизны поверхности.

Выписаны полная система уравнений Навье-Стокса в криволинейной ортогональной системе координат, связанной с поверхностью, и граничные условия на свободной поверхности жидкости. Предполагается, что толщина пленки мала, и влияние силы тяжести несущественно. При этом сделан переход к уравнениям типа пограничного слоя. Полученная упрощенная система уравнений содержит геометрический параметр  $R_\xi$  — синус локального угла наклона твердой поверхности к оси вращения и два физических безразмерных параметра: число Экмана  $E = \nu/H_*^2\omega$  и обобщенное число Вебера  $\gamma = \sigma/(\rho\omega^2 H_* R_0^2)$ , где  $H_* = (\nu Q'/(2\pi R_0^2 \omega^2))^{1/3}$  — характерное значение толщины пленки,  $R_0$  — характерное расстояние до оси вращения,  $\omega_0 = F\omega$  — угловая скорость вращения поверхности,  $F = \sqrt{3}/R_\xi(x_{\min})$ , остальные обозначения стандартные.

При малых значениях обратного числа Экмана (большое влияние вязкости) конвективными членами можно пренебречь, и стационарное аналитическое решение выписывается в конечном виде:

$$\begin{aligned} U &= F^2 R_\xi \left( yH - \frac{y^2}{2} \right), \quad V = F^3 R_\xi^2 \left( -\frac{2}{3} h^3 y + \frac{1}{3} y^3 h - \frac{1}{12} y^4 \right), \\ W &= -F^2 R_\xi \left\{ \frac{y^2}{2} [R_\xi H_x + 2R_\xi H + RR_{\xi\xi} H] - \frac{y^3}{3} (RR_{\xi\xi} + 2R_\xi) \right\}, \\ P &= -F^2 Z_\xi (H - y) - \gamma(\chi + Z_\xi), \\ H &= \left( \frac{R_{\xi 0}}{R_\xi} \right)^{1/3} \exp \left( -\frac{2}{3} (x - x_{\min}) \right), \quad q = \exp(-2(x - x_{\min})). \end{aligned} \quad (1.1)$$

В этих формулах  $H$  — безразмерная толщина пленки,  $q$  — безразмерный расход в продольном направлении,  $U$ ,  $V$ ,  $W$  — безразмерные продольная, азимутальная и поперечная компоненты скорости, связанные с размерными величинами соотношениями:

$$V_{\text{long}} = \omega R(\xi) E^{-1} U, \quad V_{\text{azim}} = \omega R(\xi) (F + V), \quad V_{\text{trans}} = \omega H_* E^{-1} W,$$

где  $R$  — расстояние до оси вращения,  $x = \ln\left(\frac{R}{R_0}\right)$ ,  $y = \frac{\eta}{H_*}$ .

Найдена форма твердой поверхности, по которой пленка будет растекаться слоем конечной толщины. Образующая этой поверхности в цилиндрических координатах  $(R, \varphi, Z)$  задается уравнением:

$$Z(R) = Z_0 + \frac{1}{aR_{\min}^2} \int_{R_{\min}}^R \sqrt{r^4 - a^2 R_{\min}^4} dr, \quad a < 1, \quad (1.2)$$

Изучено стационарное течение пленки в случае, когда конвективные члены не могут быть отброшены. Уравнения движения записываются в проекциях на линии тока, в результате чего начально - краевая задача для системы уравнений в частных производных параболического типа в заранее неизвестной области сводится к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Исследованы течения при различных значениях числа Экмана. Показано, что длина участка формирования асимптотического течения пропорциональна  $E^{-1/2}$ . Такие же результаты были получены с помощью асимптотических и численных методов ранее для течения на плоском диске.

Исследована возможность получения пленки постоянной толщины путем “перенесения” участка формирования асимптотического течения за пределы криволинейной поверхности. Для этого рассматривается составная поверхность представляющая собой плоский диск вблизи оси вращения, и поверхность, определяемую (1.2), на периферии. При  $x_{\min} = -1$  отличие толщины пленки от постоянной величины над неплоским участком поверхности не превышает 2%.

**В разделах 1.3 - 1.4** рассматривается линейная устойчивость асимптотического течения (1.1) к малым осесимметричным возмущениям и нелинейные волны, которые развиваются из этих возмущений.

Для применения метода Шкадова к задаче о пленке на вращающемся

диске проводится локальная аналогия между пленками, растекающейся по диску и стекающей по стенке. Предполагается, что профили продольной и азимутальной скоростей подобны определяемым уравнением (1.1) с нестационарными, зависящими от  $x$  параметрами:

$$u(t, x, y) = \frac{3q(t, x)}{h^3(t, x)} \left( yh(t, x) - \frac{y^2}{2} \right);$$

$$v(t, x, y) = \frac{b(t, x)}{4h^5(t, x)} \left( 2yh^3(t, x) - y^3h(t, x) + \frac{1}{4}y^4 \right).$$

Для расходов в продольном и азимутальном направлениях и толщины пленки получены эволюционные уравнения:

$$\bar{h}_t + \bar{q}_x R_\xi = 0;$$

$$\bar{q}_t + \frac{6}{5} \left( \frac{\bar{q}^2}{\bar{h}} \right)_x R_\xi - \frac{1}{5\delta} \left( \frac{R_\xi}{R_{\xi 0}} \bar{h} - \frac{\bar{q}}{\bar{h}^2} + R_\xi^2 \bar{h} h_{xxx} \right) = 0;$$

$$b_t + \frac{117}{224} \left( \frac{b\bar{q}}{\bar{h}} \right)_x R_\xi + \frac{1}{6\delta} \left( \frac{b}{\bar{h}^2} + \frac{4}{5} \sqrt{3} \frac{\bar{q}}{R_{\xi 0}^{1/2}} \right) = 0,$$

$$\bar{h} = h \exp(2\Delta x), \quad \bar{q} = q \exp(2\Delta x),$$

где  $R_\xi$ ,  $\delta$  — слабо меняющиеся на длине волны параметры.

Локальные параметры  $R_\xi$ ,  $\Delta$ ,  $R_0$  могут быть выражены через два глобальных ( $p_1$ ,  $p_2$ ) и один локальный параметр подобия ( $\delta$ ) следующим образом:

$$p_1 = \frac{Q'\omega\rho}{\sigma}, \quad p_2 = Q' \sqrt{\frac{\omega}{\nu^3}}$$

$$\Delta = 348.3(p_1 p_2)^{-0.8} \delta^{1.4}, \quad R_0 \frac{\sigma}{\rho\nu^2} = 0.01609 p_1^{-0.7} p_2^{1.8} \delta^{-0.9};$$

Для периодических по пространству и растущих со временем малых осесимметричных возмущений получено следующее дисперсионное уравнение:

$$\alpha^4 (R_\xi^5 R_{\xi 0})^{1/3} - 6\delta \left( \frac{R_\xi^5}{R_{\xi 0}^2} \right)^{1/3} \alpha^2 + \left[ 3i (R_\xi R_{\xi 0}) + 12\delta\Omega \left( \frac{R_\xi}{R_{\xi 0}} \right)^{1/3} \right] \alpha -$$

$$-\frac{\Omega}{R_\xi} \left[ i \left( \frac{R_\xi}{R_{\xi 0}} \right)^{2/3} + 5\delta\Omega \right] = 0.$$

При этом частота волны  $\Omega$  является действительным числом, а волновое число — комплексным  $\alpha = \alpha_r + i\alpha_i$ . Указано, что амплитуда волн будет нарастать по времени, если мнимая часть волнового числа удовлетворяет неравенству

$$\alpha_i + 2\Delta \leq 0.$$

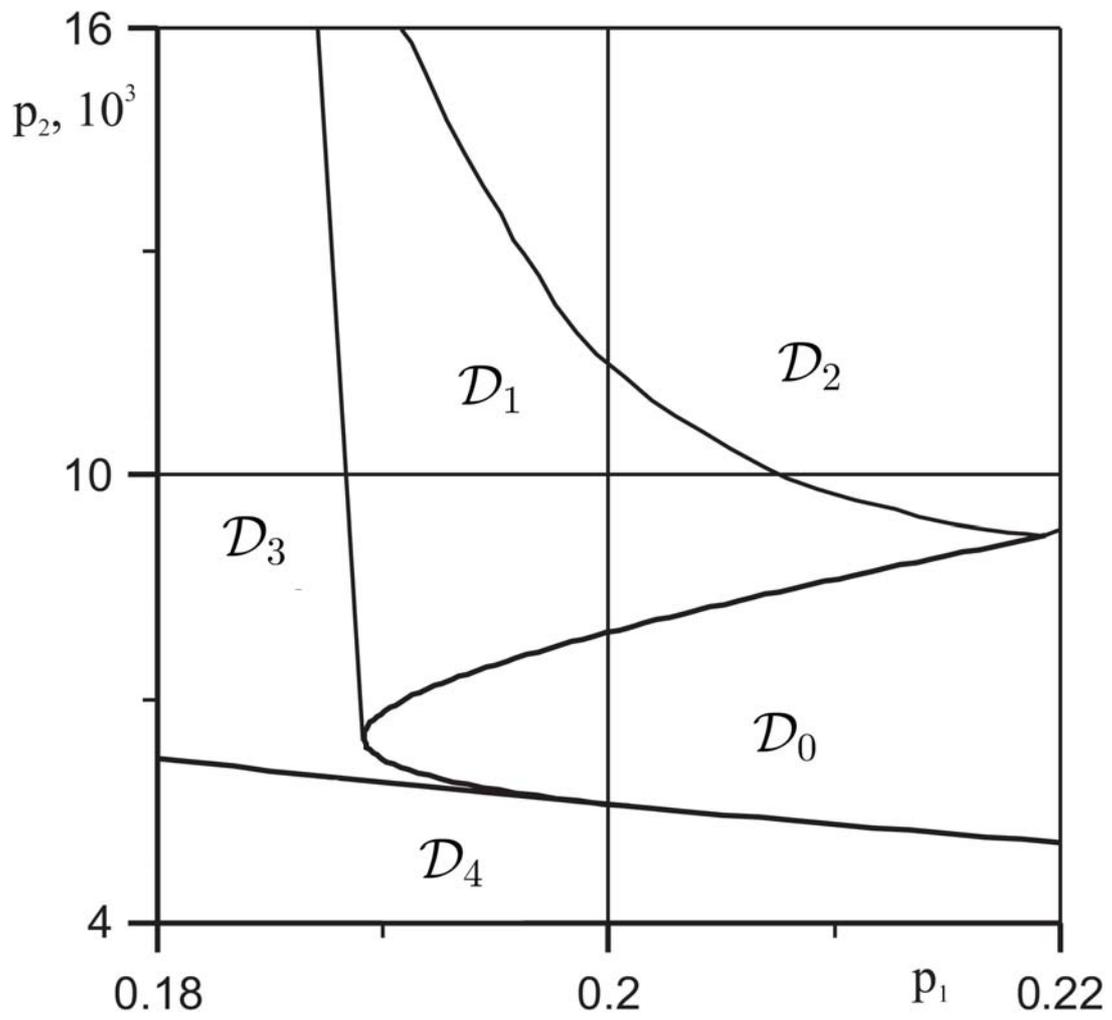
Решения, полученные в разных точках диска, объединяются, исходя из предположения о постоянстве размерной частоты волны — волнового инварианта

$$f = sc\delta^{0.3},$$

где  $s = \alpha_r/\sqrt{15\delta}$  — нормированное волновое число,  $c = \alpha_r\Omega$  — фазовая скорость волны.

На основе анализа дисперсионного уравнения построен алгоритм нахождения точки потери устойчивости для пленки на произвольной поверхности. На плоскости параметров  $(p_1, p_2)$  найдены области, которые соответствуют различному качественному поведению течения на плоском и составной криволинейной поверхности, описанной в разделе 1.2 (рис. 1). Выяснено, что возможны следующие ситуации: течение по криволинейной поверхности устойчиво, а на плоском диске нет ( $\mathcal{D}_3$ ); на плоском диске неустойчивость начинается ближе к оси вращения, чем на криволинейном ( $\mathcal{D}_2$ ); на криволинейном диске ближе, чем на плоском ( $\mathcal{D}_1$ ); на обеих поверхностях в одной точке ( $\mathcal{D}_0$ ); на обеих поверхностях течение устойчиво ( $\mathcal{D}_4$ ).

Изучена эволюция нелинейных волн на плоском диске и на криволинейной поверхности. Получено, что в случаях, когда течение по криволинейной поверхности теряет устойчивость дальше от оси вращения, нелинейные волны обладают меньшей амплитудой и более простым спек-



**Рис. 1.** Области качественно различного соотношения характеристик устойчивости течений на диске и на криволинейной поверхности.

тральным составом.

**Во второй главе** изучается течение пленки неньютоновской жидкости по вертикальной плоскости под действием силы тяжести. Исследуется стационарное течение, его устойчивость в линейной постановке, а также нелинейная волновая динамика.

**В разделах 2.1 - 2.4** рассматривается течение обобщенно - ньютоновской жидкости, то есть такой, в которой связь между тензорами вязких напряжений и скоростей деформаций задается соотношением

$$\tau_{ij} = \varphi(I_2)e_{ij},$$

где  $I_2$  — второй инвариант тензора скоростей деформаций. В настоящее время в литературе в основном используется степенной закон вязкости:

$$\varphi(I_2) = \mu_n(2I_2)^{(n-1)/2}.$$

При  $n > 1$  среды демонстрируют дилатантное поведение, а при  $n < 1$  — псевдопластическое. Однако эта модель показывает неограниченный рост вязкости при бесконечно больших (или бесконечно малых) скоростях сдвига. Этому недостатка лишена, например, модель Эйринга (Eyring), в которой

$$\varphi(I_2) = \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty) \frac{\operatorname{arcsinh} \sqrt{\lambda I_2}}{\sqrt{\lambda I_2}}.$$

Отметим, что модель Эйринга обоснована с молекулярно-кинетической точки зрения. Часто при описании течений псевдопластических жидкостей полагается  $\mu_\infty = 0$ . Мерой неньютоновского поведения для модели Эйринга принято выбирать число Деборы  $De = \sqrt{\lambda U_* / 2H}$ . В работе для описания течений дилатантных жидкостей использовалась модель степенной жидкости, а для псевдопластических — степенной жидкости и модель Эйринга.

Для описания линейной устойчивости стационарного плоскопараллельного течения жидкости с произвольным реологическим законом выведено обобщенное уравнение Орра - Зоммерфельда:

$$\begin{aligned} \eta_+ v^{IV} - 2\alpha^2 \eta_- v'' + \eta_+ \alpha^4 v + 2\eta'_+ v''' - 2\eta'_- \alpha^2 v' + \eta''_+ (v'' + \alpha^2 v) = \\ = i\alpha \text{Re} [(u_0 - c)(v'' - \alpha^2 v) - u''_0 v] \\ \eta_+ = \eta + \frac{d\eta(I_2)}{dI_2} u_0'^2, \\ \eta_- = \eta - \frac{d\eta(I_2)}{dI_2} u_0'^2, \end{aligned} \quad (2.1)$$

штрихи означают производную по поперечной координате. Профиль невозмущенного течения задается функцией  $u_0(y)$ ,  $\eta = \varphi/\varphi_c$  — безразмерный эффективный коэффициент вязкости, число Рейнольдса вычисляется по характерной скорости, толщине пленки и  $\varphi_c$  — характерному значению коэффициента вязкости.

При изучении пленочных течений для (2.1) ставятся следующие граничные условия на твердой поверхности  $y = 0$

$$v = v' = 0 \quad (2.2)$$

и на свободной поверхности  $y = 1$ :

$$\begin{aligned} (u_0 - c)(v'' + \alpha^2 v) - u''_0 v = 0, \\ \eta_+ v''' + \eta'_+ v'' - [\alpha^2(\eta_- + 2\eta) + i\alpha(u_0 - c)] v' + \\ + \left( \alpha^2 \eta'_+ + \frac{i\alpha^3 \text{Re}}{\text{We}(u_0 - c)} \right) v = 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

что соответствует условию прилипания на твердой поверхности и описывает действие поверхностного натяжения с коэффициентом  $\sigma$ ,  $\text{We} = \rho U_*^2 H / \sigma$ .

Для указанных двух соотношений решена спектральная задача линейной устойчивости. Выяснено, что при любых значениях реологических параметров для каждого числа Рейнольдса имеется нейтральное волновое число  $\alpha_n$ , такое, что возмущения с волновыми числами меньшими нейтрального нарастают, а больше нейтрального затухают со вре-

менем. При малых и умеренных числах Рейнольдса нормированное нейтральное волновое число  $\alpha_n \sqrt{\text{We}^{-1}}$  остается постоянным при фиксированном значении числа Капицы (обобщенного числа Капицы для степенной жидкости)  $\text{Ka} = \sigma \rho^{1/3} / (g^{1/3} \varphi_c^{4/3})$  ( $\text{Ka} = \sigma (\rho^{(n-2)} g^{-(3n-2)} \mu^{-4})^{1/(n+2)}$ ).

В предположении  $\alpha \text{Re} \ll 1$  в модели степенной жидкости найдено приближенное аналитическое решение задачи на собственные значения для уравнения (2.1) с соответствующими граничными условиями. Получено следующее дисперсионное соотношение:

$$c = \frac{2n+1}{n} + \frac{i\alpha \text{Re} n^{n-2}}{(2n+1)^{n-1}} \left[ \frac{2(2n+1)}{(3n+2)n^2} - \frac{\alpha^2}{\text{We}} \frac{1}{2n+1} \right]$$

Для нейтрального волнового числа получено соотношение

$$\alpha_n^2 = \text{We} \frac{2(2n+1)^2}{(3n+2)n^2}.$$

Эти выражения использовались при тестировании численных методов.

Для построения нелинейной системы уравнений был использован прямой метод. Предполагалось, что в каждом сечении профиль скорости подобен таковому при безволновом стационарном течении. Тогда поле скоростей можно задать двумя функциями  $q$ ,  $h$  двух переменных:

$$u(t, x, y) = \frac{q(t, x)}{h(t, x)} \cdot u_0 \left( \frac{y}{h(t, x)} \right),$$

где  $u_0(y)$  — профиль скорости стационарного течения.

В этом случае эволюцию волновой структуры пленки описывает система из двух уравнений

$$q_t + \beta \left( \frac{q^2}{h} \right)_x = \frac{1}{5\delta} \left[ h h_{xxx} - \frac{q}{h^2} \frac{\eta(q^2 u_0'^2(0)/(2h^4))}{\eta(u_0'^2(0)/2)} + h \right], \quad (2.4)$$

$$h_t + q_x = 0,$$

где  $\beta = \int_0^1 u_0^2(y) dy$ ,  $\delta$  — параметр подобия. Данная система уравнений сводится к ранее известным для ньютоновской и степенной жидкости.

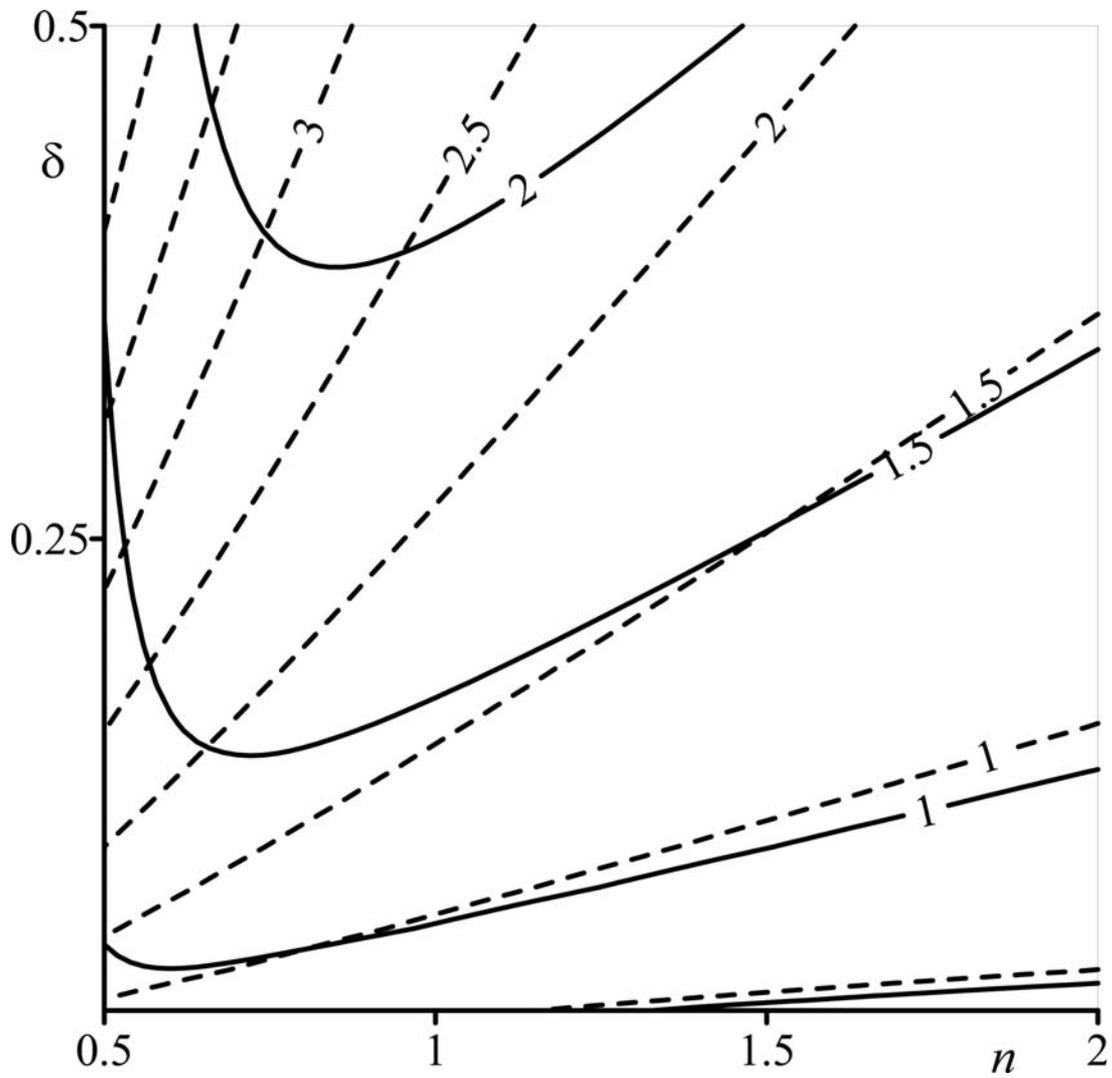
В разделе 2.3 изучается линейная устойчивость тривиального решения системы (2.4)  $h = 1$ ,  $q = 1$ . Результаты сравниваются с решением спектральной задачи для обобщенного уравнения Орра - Зоммерфельда.

Вид зависимостей коэффициентов усиления и фазовых скоростей возмущений от волнового числа качественно совпадает, а при малых значениях волнового числа интегральный подход дает весьма близкие к решению полной задачи результаты.

В рамках обоих подходов получается, что с ростом  $n$  рост возмущений происходит в более узком диапазоне волновых чисел. С другой стороны, при малых  $n$  при анализе решений полной задачи обнаружен еще один эффект, обратный указанному: при больших значениях  $\delta$  происходит стабилизация течения (рис. 2). Значение  $\delta$ , при котором этот эффект проявляется, зависит от значения  $Ka$ : чем больше  $Ka$ , тем шире диапазон  $\delta$ , где длинноволновое приближение хорошо работает. Отметим, что интегральные уравнения выведены в предположении больших значений  $Ka$  и не показывают этого эффекта.

Стабилизация или дестабилизация течения одновременно проявляется в изменении области неустойчивости и максимального коэффициента усиления. В рамках интегрального подхода с уменьшением  $n$  при фиксированном  $\delta$  максимальный коэффициент усиления монотонно растет, тогда как решение полной задачи предсказывает спад этой величины, начиная с некоторого значения  $n(\delta)$ . Таким образом, требуется специальное рассмотрение интервала значений  $n$  в окрестности  $n = 0.5$  при выводе математической модели (2.4), применяемой для исследования нелинейных волн. При этом результаты, полученные в рамках интегрального подхода, убеждают в правомерности этого метода при  $n > 0.7$ .

Такие же расчеты были проведены и для реологической модели Эйринга. Определяющие безразмерные параметры подбирались так, чтобы



**Рис. 2.** Линии уровня зависимости нейтрального числа  $\alpha_n$  от  $n$  и  $\delta$  для степенной жидкости. Сплошные линии — решение уравнения Орра - Зоммерфельда, штриховые — интегральный подход.

кривые течения  $\eta(I_2)$  были бы максимально близки: значения указанной функции и ее производной совпадали при  $I_2 = 1$ .

Анализ решений задачи на собственные значения для указанных реологических моделей показал следующее. Результаты применения интегрального подхода слабо зависят от принятой реологической модели, причем это проявляется и в размере области неустойчивых волновых чисел, и в величинах коэффициентов усиления. Решения полной линеаризованной задачи в рассматриваемых случаях отличаются существенно. При одинаковых значениях внешних безразмерных параметров в модели Эйринга практически не наблюдается эффекта стабилизации при больших  $\delta$  и малых  $n$ . Кроме того, абсолютные значения коэффициентов усиления в модели Эйринга оказываются существенно больше, чем для степенной жидкости. Различия между этими моделями увеличиваются при увеличении влияния неньютоновских свойств среды. Такие результаты можно объяснить тем, что при одинаковых параметрах в модели Эйринга средняя вязкость оказывается меньше, чем для степенной.

**В разделе 2.4** изучено влияние неньютоновских свойств среды на характеристики нелинейных волн. Рассмотрены уединенные волны, а также периодические по пространству волны с различными волновыми числами. Получено, что в рамках модели Эйринга уединенные волны имеют большую амплитуду и фазовую скорость, чем для степенной жидкости. Для нелинейных периодических по пространству волн одной длины были получены подобные результаты. Это согласуется с выводами анализа линейной устойчивости.

**Раздел 2.5** посвящен изучению линейной устойчивости течения пленки псевдопластической жидкости Шведова - Бингама. Для этой модели характерно наличие конечного предела текучести. В течениях таких жидкостей часто наблюдается квазитвердое ядро, в котором тензор де-

формации равен нулю. В условиях слабой пластичности, когда толщина этого ядра мала по сравнению с толщиной пленки, также выведена система уравнений, аналогичная (2.4) и проведен анализ линейной устойчивости тривиального решения. Получено, что в модели Шведова - Бингама интервал неустойчивых волновых чисел оказывается наименьшим, а также нейтральные возмущения являются самыми медленными среди всех изученных моделей.

**В третьей главе** рассматривается стекание пленки степенной жидкости по плоскости с микрорельефом под действием силы тяжести. Величина неровностей имеет порядок толщины пленки, а характерный продольный размер рельефа много больше этой толщины. В этом случае эволюционная система уравнений приобретает вид:

$$\begin{aligned}
 h_t + q_x &= 0, \\
 q_t + \frac{2(2n+1)}{3n+2} \left(\frac{q^2}{h}\right)_x &= \frac{1}{5\delta} \left( hh_{xxx} - \beta hh_x - \left(\frac{q}{h^2}\right)^n + h \right) + \\
 &+ \frac{h}{5\delta} (h_{0xxx} - Bh_{0x}).
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

где  $B$  — параметр, характеризующий наклон твердой поверхности к горизонту,  $h_0$  — форма твердой поверхности.

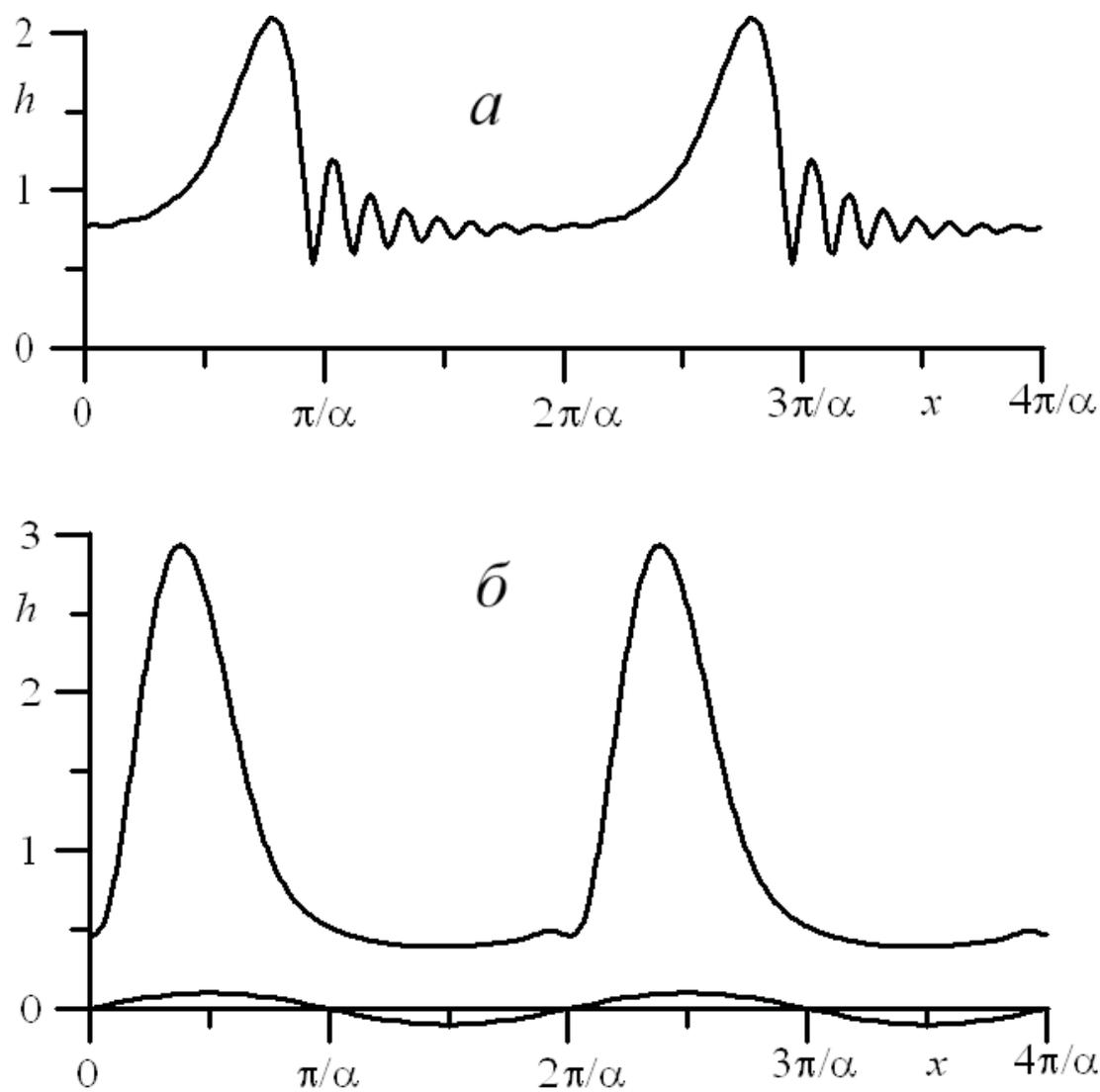
Рассмотрены два вида микрорельефов: локализованные (ступеньки и препятствия) и периодические синусоидальные. В каждом случае было найдено стационарное решение. Для локализованных неровностей изучена зависимость максимальной и минимальной толщины пленки от реологического параметра, числа Рейнольдса, угла наклона поверхности к горизонту. Во всех изученных случаях перед неровностью наблюдаются осцилляции толщины пленки и формы свободной поверхности, а за ней толщина пленки монотонно выходит на асимптотический уровень. При этом перепад толщин (разность между максимальным и минимальным значением) растет с ростом числа Рейнольдса и увеличением угла накло-

на поверхности к горизонту. При изменении реологического параметра  $n$  на ступеньке наблюдается монотонное убывание перепада толщин, а на препятствии в форме горки в указанной зависимости имеется локальный минимум при  $n \approx 1$ . Этот эффект объясняется тем, что в первом случае имеется только одна область утоньшения пленки, в которой резко возрастает вязкость, что вызывает рост толщины перед ступенькой. Во втором случае есть как область торможения пленки перед препятствием, так и разгона после него, что и приводит к некоторой “симметрии” зависимости относительно  $n = 1$ .

Для стенки с синусоидальными неровностями исследовалась зависимость амплитуды свободной поверхности и сдвига фаз между свободной и твердой поверхностью от пространственного периода неровностей, наклона поверхности к горизонту и реологического параметра. В случае малой амплитуды синусоидальных неровностей получено приближенное аналитическое выражение для формы свободной поверхности, которое удовлетворительно совпадает с численными расчетами. Показано, при достаточно коротковолновых неровностях свободная поверхность пленки будет близка к плоской. Значение волнового числа при котором происходит выравнивание свободной поверхности тем меньше, чем больше значение параметра  $\delta$ .

Неньютоновские свойства сильнее проявляются при больших значениях  $\delta$ , причем амплитуда свободной поверхности монотонно возрастает с ростом  $n$ .

**В разделе 3.4** рассмотрены нелинейные волны в пленке ньютоновской жидкости над поверхностью с синусоидальным рельефом. Обнаружено, что при малой амплитуде неровностей профиль волн близок к профилю волны на гладкой стенке, однако наблюдаются периодические изменения со временем. Период этих изменений совпадает со временем,



**Рис. 3.** Профили нелинейных волн на гладкой стенке (а) и на стенке с рельефом  $h_0 = 0.1 \sin \alpha x$  (б).

за которое волна проходит один пространственный период. Они тем существеннее, чем больше амплитуда неровностей. При определенном значении амплитуды (около 0.1 толщины невозмущенной пленки) устанавливается другой режим течения, при котором форма свободной поверхности мало меняется со временем, однако сильно отличается от стационарного решения (рис. 3). Наличие такого рода решений качественно объясняет сильное увеличение критического числа Рейнольдса над неровной поверхностью, которое было зафиксировано в ряде экспериментов.

**В Заключение** приведены основные результаты и выводы:

- Изучено стационарное течение пленки вязкой жидкости по криволинейной вращающейся поверхности. Найдена форма поверхности, по которой пленка растекается, сохраняя постоянную толщину. Определен набор безразмерных параметров, управляющих течением. Найдены значения параметров, при которых отклонение поверхности от плоскости приводит к стабилизации течения. Проиллюстрирована эволюция нелинейных волн.
- Поставлена задача о линейной устойчивости плоскопараллельного течения произвольной обобщенно - ньютоновской жидкости. Решена спектральная задача неустойчивости течения пленки жидкости по вертикальной плоскости для степенной жидкости и модели Эйринга. Получено, что для псевдопластических жидкостей область волновых чисел, соответствующих растущим возмущениям, шире, чем для дилатантных. С другой стороны, обнаружен эффект стабилизации пленки степенной жидкости при малых значениях показателя вязкости.
- Выведена система эволюционных уравнений для интегральных характеристик, описывающая развитие нелинейных волн в пленке

обобщенно - ньютоновской жидкости. Показано, что при слабом проявлении неньютоновских свойств степенная модель вязкости и модель Эйринга дают близкие результаты. Изучено влияние неньютоновских свойств среды на характеристики нелинейных волн.

- Исследовано течение пленки неньютоновской жидкости по плоскости с микрорельефом. Изучено влияние рельефа на стационарное течение и нелинейные волны. Обнаружено, что наличие рельефа может привести к возникновению слабо меняющегося со временем течения, которое существенно отличается от стационарного с плоской границей раздела.

**По теме диссертации опубликованы следующие работы:**

1. Могилевский Е.И., Шкадов В.Я. Влияние рельефа подложки на течение пленки неньютоновской жидкости по наклонной плоскости// Вест. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2007. №3. С. 49 — 56.
2. Могилевский Е.И., Шкадов В.Я. Течения тонких пленок вязкой жидкости по криволинейным вращающимся поверхностям// Изв. РАН. МЖГ. 2009. №2. С. 18 — 32.
3. E.I. Mogilevskiy, V.Ya. Shkadov Nonlinear Waves in Liquid Films on a Spinning Disk// XXXIV Summer School- Conference “Advanced Problems in Mechanics”. Book of Abstracts. SPb: IPME RAS. 2005. P. 63.
4. Могилевский Е.И., Шкадов В.Я. Пленки вязкой жидкости на вращающихся профилированных поверхностях// Научная конференция “Ломоносовские чтения”. Секция Механика. Тезисы докладов 2006. С. 116 — 117.

5. Могилевский Е.И., Шкадов В.Я. Механизмы отбора волн на профилированных удерживающих поверхностях// IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. Тезисы докладов. Т.2 , Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского. 2006. С. 135.
6. Могилевский Е.И. Волны в пленке жидкости со сложной реологией// Научная конференция “Ломоносовские чтения”. Секция Механика. Тезисы докладов 2007. С. 158.
7. Могилевский Е.И., Шкадов В.Я. Течение тонкой пленки вязкой жидкости по плоскости с микрорельефом// XV школа - семинар “Современные проблемы аэрогидродинамики”, МГУ им. М.В. Ломоносова, 2007. С. 79.
8. Могилевский Е.И. Спектральная задача неустойчивости пленок обобщенно - ньютоновских жидкостей// Научная конференция “Ломоносовские чтения”. Секция Механика. Тезисы докладов. 2008. С. 130 — 131.
9. Могилевский Е.И., Шкадов В.Я. Волны в пленке обобщенно - ньютоновской жидкости// III Всероссийская конференция “Задачи со свободными границами: теория, эксперимент, приложения”. Тезисы докладов. Новосибирск, 2008. С. 75 — 76.