МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М. В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 517.57+517.956

Покровский Андрей Владимирович

УСТРАНИМЫЕ ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

01.01.01 — математический анализ
01.01.02 — дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва – 2008

Работа выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

Научный консультант:
доктор физико-математических наук, профессор Е. П. Долженко,
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор В. А. Кондратьев,
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова;

доктор физико-математических наук, профессор В. М. Миклюков,
Волгоградский государственный университет;

доктор физико-математических наук, профессор А. Г. Сергеев,
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН.

Ведущая организация:
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Защита состоится 27 марта 2009 г. в 16 час. 45 мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.85 в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (14 этаж).

Автореферат разослан 25 февраля 2009 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д.501.001.85 при МГУ
профессор **И. Н. Сергеев**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Задачи о продолжении решений дифференциальных уравнений с частными производными традиционно привлекают внимание большого числа исследователей. Центральное место среди них занимают задачи об устранимых особенностях решений дифференциального уравнения в заданном классе функций. Классическим примером такой задачи является знаменитая проблема Пенлеве[1] об описании компактов, устранимых для ограниченных голоморфных функций, т.е. таких компактов на комплексной плоскости, для которых любая ограниченная голоморфная функция, определенная в дополнении данного компакта до какой-либо его окрестности, может быть голоморфно продолжена на этот компакт. Проблема Пенлеве приковывала внимание аналитиков на протяжении всего XX века (Д. Помпейю, А. Данжуа, В. В. Голубев, А. Безикович, А. Берлинг, Л. Альфорс, А. Г. Витушкин, П. Маттила, Г. Давид, М. С. Мельников и др.), но получила окончательное решение только в 2001 г.[2] Решение этой проблемы оказалось весьма сложным и формулируется в терминах, учитывающих метрические и геометрические свойства множеств. Не приводя его в общем виде, отметим следующий результат Г. Давида[3], непосредственно предшествовавший завершающей теореме Х. Толсы[2] и сформулированный в качестве гипотезы А. Г. Витушкиным еще в начале 1960-х гг.: плоский компакт с конечной длиной по Хаусдорфу устраним для ограниченных голоморфных функций в том и только том случае, когда почти на всякую прямую он проецируется во множество меры нуль.

Другую постановку задачи об устранимых особенностях голоморфных функций предложил в докладе на IV Всесоюзном математическом съезде в Ленинграде (1961) Е. П. Долженко[4]. Он показал, что для голоморфных функций, удовлетворяющих условию Гельдера с заданным показателем $\alpha \in (0,\ 1)$, устранимые компакты характеризуются условием равенства нулю их хаусдорфовой меры порядка $1+\alpha$. Это был первый результат, в котором устранимые особенности решений диффе-

[1] *Painlevé P.* Sur les lignes singulières des fonctions analytiques // Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse. 1888

[2] *Tolsa X.* Painlevé's problem and the semiadditivity of analytic capacity // Acta Math. 2003. V. 190. P. 105-149.

[3] *David G.* Unrectifiable 1-sets have vanishing analytic capacity // Rev. Mat. Iberoamer. 2000. V. 14. P. 369-479.

[4] *Долженко Е.П.* О "стирании"особенностей аналитических функций // Успехи матем. наук. 1963. Т. 18, вып. 4 (112). С. 135-142.

ренциального уравнения с частными производными в заданном классе функций (в данном случае — решений уравнения Коши–Римана в классе Гельдера) полностью описывались в терминах хаусдорфовых мер, и в дальнейшем он получил развитие в работах многих авторов. Так, Л. Карлесон[5] установил, что компактные подмножества евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, устранимые для гармонических функций, удовлетворяющих условию Гельдера с показателем $\alpha \in (0,\ 1)$, полностью описываются условием равенства нулю их хаусдорфовой меры порядка $n-2+\alpha$. Это же условие, как показал Е. П. Долженко[6,7], характеризует и устранимые особенности гармонических функций в классах Гельдера с показателем гладкости $\alpha \in (1,\ 2)$.

Дальнейшее продвижение в направлении дополнения сформулированных выше результатов Е. П. Долженко и Л. Карлесона и их обобщения на более широкие классы линейных дифференциальных уравнений с частными производными связано с работами Р. Харви и Дж. Полкинга[8,9], Й. Крала[10]. Н. Х. Уи[11], Б. Ж. Ищанова[12], Х. Вердеры[13], Х. Матеу и Х. Оробича[14], Д. Ульриха[15] и других авторов. В частности, в работах Б. Ж. Ищанова продуктивной оказалась идея классификации суммируемых функций по скорости их локальных приближений в среднем решениями рассматриваемого дифференциального

---

[5] *Carleson L.* Removable singularities for continuous harmonic functions in $\mathbb{R}^n$ // Math. Scand. 1963. V. 12. P. 15-18.

[6] *Долженко Е.П.* О представлении непрерывных гармонических функций в виде потенциалов // Изв. АН СССР. 1964. Т. 28, № 5. С. 1113-1130.

[7] *Долженко Е.П.* Об особых точках непрерывных гармонических функций // Изв. АН СССР. 1964. Т. 28, № 6. С. 1251-1270.

[8] *Harvey R., Polking J.C.* Removable singularities of solutions of linear partial differential equations // Acta math. 1970. V. 125, № 1/2. P. 39-56.

[9] *Polking J.C.* A survey of removable singularities // Sem. Nonlinear PDE. New York, 1984. P. 261-292.

[10] *Král J.* Removable singularities of solutions of semielliptic equations // Rendiconti de Matematica. 1973. V. 6. № 4. P. 763-783

[11] *Uy N.X.* Removable sets of analytic functions satisfying a Lipschitz condition // Ark. mat. 1979. V. 17. № 1. C. 19-27.

[12] *Ищанов Б.Ж.* Метрические условия для устранимости особых множеств в некоторых классах полигармонических и полианалитических функций // Депонировано в ВИНИТИ АН СССР 14 апреля 1987 г., № 2575-В87.

[13] *Verdera J.* C^m-approximations by solutions of elliptic equations and Calderon-Zygmund operators // Duke Math. J. 1987. V. 55. № 1. P. 157-187.

[14] *Mateu J., Orobitg J.* Lipschitz approximations by harmonic functions and some applications to spectral synthesis // Indiana Univ. Math. J. 1990. V. 39, № 3. P. 703-736.

[15] *Ullrich D.* Removable sets for harmonic functions // Mich. Math. J. 1991. V. 38, № 3. P. 467-473.

уравнения, восходящая к работам В. С. Федорова 1920-30 гг. об условиях моногенности функций комплексного переменного и представлению голоморфных функций интегралом типа Коши. На этом пути он[12] выделил классы локально суммируемых функций, в которых устранимые особенности полианалитических и полигармонических функций полностью описываются условием равенства нулю их хаусдорфовой меры относительно произвольно заданной измеряющей функции. Дальнейшие исследования[16] привели к обобщению результатов Б. Ж. Ищанова на однородные уравнения, левая часть которых является квазиоднородным полуэллиптическим оператором с постоянными коэффициентами. При этом выяснилось, что известные результаты о метрической характеризации устранимых множеств для решений таких уравнений в классах Гельдера (вообще говоря, анизотропных) являются следствиями результатов об устранимых особенностях в классах, построенных при помощи локальных приближений решениями рассматриваемого уравнения.

В упомянутых выше результатах гладкость коэффициентов эллиптического уравнения играла существенную роль. Она гарантировала совпадение его обобщенных решений с классическими и их принадлежность к рассматриваемому классу функций.

Для линейных равномерно эллиптических уравнений с негладкими, в частности, с разрывными коэффициентами, ситуация более сложная, и результаты об устранимых особенностях решений таких уравнений могут существенно отличаться от соответствующих результатов для уравнений с гладкими коэффициентами. Например, легко проверить, что любая не тождественная нулю линейная функция не является обобщенным решением в $\mathbb{R}^n$ уравнения $\operatorname{div}(a(x)\nabla f) = 0$, где $a(x) \equiv 1$ внутри единичного куба Q и $a(x) \equiv 2$ в $\mathbb{R}^n \setminus Q$. Это означает, что граница единичного куба не является устранимым множеством для обобщенных решений рассматриваемого уравнения в классе бесконечно дифференцируемых функций, в то время как для решений уравнения Лапласа (т.е. для гармонических функций) она устранима уже в классе непрерывно дифференцируемых функций. С другой стороны, Д. Гилбарг и Дж. Серрин[17] установили, что, в отличие от дивергентного случая,

---

[16] *Покровский А.В.* О неизолированных особых точках решений линейных дифференциальных уравнений с частными производными. Дисс. ...к.ф.-м.н. М.: МГУ, 1996.

[17] *Gilbarg D., Serrin J.* On isolated singularities of second order elliptic differential equations // J. d'Analyse Math. 1955-1956. V. 4. P. 309-340. (Пер. на рус. яз.: Сб. переводов "Математика". 1958. Т. 2. № 6. С. 63-86.)

решения однородных линейных равномерно эллиптических уравнений второго порядка в недивергентной форме с измеримыми и ограниченными действительными коэффициентами могут иметь изолированные особенности даже в классах Гельдера.

Эти результаты объясняют причину отсутствия метрических критериев устранимости особых множеств для решений линейных эллиптических уравнений второго порядка с измеримыми и ограниченными коэффициентами: их получение связано как с новыми постановками задач об устранимых особенностях, так и с новыми условиями устранимости.

Для квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка основную массу известных результатов об устранимых особенностях их решений можно условно разделить на две группы. В первой из них, которая восходит к работе Дж. Серрина[18], исследуется связь структурных условий, накладываемых на уравнение, со степенью суммируемости либо допустимым порядком роста его решений вблизи особого множества, достаточных для устранимости этого множества. При этом основное внимание уделялось случаям, когда особое множество является либо изолированной точкой, либо гладким многообразием[18,19,20]. Вторую группу образуют результаты, в которых исследуется эффект продолжаемости всех решений некоторых квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка из заданной области без условия их принадлежности к какому-либо функциональному классу[19,21−26]. Классическим примером такого результата является теорема Л. Берса[21] об отсутствии изолированных особенностей у решений уравнения минимальных по-

[18] *Serrin J.* Isolated singularities of solutions of quasilinear equations // Acta Math. 1964. V. 111. P. 247-302.

[19] *Veron L.* Singularities of solutions of second order quasilinear elliptic equations. Addison Wesley Longman Limited, 1996.

[20] *Скрыпник И.И.* Об устранимости особенностей решений нелинейных эллиптических уравнений на многообразиях // Матем. сборник. 2003. Т. 194. № 9. С. 91-112.

[21] *Bers L.* Isolated singularities of minimal surfaces // Ann. Math. 1951. V. 53. P. 364-386.

[22] *De Giorgi E., Stampacchia G.* Sulla singolarità eliminabili delle ipersuperficie minimali // Atti Accad. Naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. 1965. V. 38. P. 352-357.

[23] *Nitsche J.C.C.* On new results in the theory of minimal surfaces // Bull. Amer. Math. Soc. 1965. V. 71. P. 195-270.

[24] *Miranda M.* Sulla singolarità eliminabili delle soluzioni dell'equazione delle superfici minime // Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Ser. IV, 1977, V. 4, P. 129-132.

[25] *Anzellotti G.* Dirichlet problem and removable singularities for functional with linear growth // Boll. Un. Mat. Ital. C(5), 1981. V. 81. P. 141-159.

[26] *Brezis H., Nirenberg L.* Removable singularities for nonlinear elliptic equations // Topological Methods in Nonlinear Analysis. 1997. V. 9. P. 201-219.

верхностей.

Единственный результат о метрической характеризации устранимых множеств был получен для квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка в работе Т. Килпелайнена и Ч. Жонга[27]. В этой работе дано обобщение сформулированной выше теоремы Карлесона об устранимых особенностях гармонических функций в классах Гельдера на решения вырождающихся эллиптических уравнений с p-лапласианом.

Цель работы. Целью настоящей диссертационной работы является получение метрических критериев устранимости множеств особых точек (замкнутых относительно рассматриваемых евклидовых областей) для решений линейных равномерно эллиптических уравнений второго порядка с измеримыми и ограниченными действительными коэффициентами и для решений некоторых квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка.

Методика исследования. В диссертации используются методы теории функций нескольких действительных переменных, функционального анализа и качественной теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Научная новизна. Все приведенные в диссертации результаты являются новыми. Основные из них состоят в следующем:

- в классах непрерывных функций и функций с первыми обобщенными производными получены в терминах хаусдорфовых мер критерии устранимости множеств особых точек для обобщенных решений однородных линейных равномерно эллиптических уравнений второго порядка в дивергентной форме с измеримыми и ограниченными действительными коэффициентами;

- в классах непрерывных функций получен метрический критерий устранимости компактных множеств особых точек для слабых решений однородных линейных равномерно эллиптических уравнений второго порядка в недивергентной форме с измеримыми и ограниченными действительными коэффициентами;

- в классах функций с первыми обобщенными производными получен в терминах хаусдорфовых мер критерий устранимости мно-

[27] *Kilpeläinen T., Zhong X.* Removable sets for continuous solutions of quasilinear elliptic equations // Proc. Amer. Math. Soc. 2002. V. 130. №6. P. 1681-1688.

жеств особых точек для обобщенных решений квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка с p-лапласианом;

- в терминах хаусдорфовых мер получен критерий устранимости множеств особых точек для решений уравнения минимальных поверхностей в гельдеровых классах непрерывно дифференцируемых функций.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут найти применение в теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на заседании Московского математического общества и на следующих семинарах (в скобках указаны руководители семинара): на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова — по теории приближений и граничным свойствам функций (проф. Е. П. Долженко), теории функций действительного переменного (акад. РАН $\boxed{\text{П. Л. Ульянов}}$ и член-корр. РАН Б. С. Кашин), дифференциальным уравнениям с частными производными (проф. В. А. Кондратьев и проф. Е. В. Радкевич) и дифференциальным уравнениям и их приложениям (проф. М. И. Вишик); в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН — по теории функций нескольких действительных переменных и ее приложениям (акад. РАН С. М. Никольский, член-корр. РАН О. В. Бесов и член-корр. РАН Л. Д. Кудрявцев) и дифференциальным уравнениям в частных производных (проф. А. К. Гущин и проф. В. П. Михайлов); в Институте математики НАН Украины — по нелинейному анализу (акад. НАН Украины $\boxed{\text{И. В. Скрыпник}}$ и проф. $\boxed{\text{С. Д. Эйдельман}}$) и комплексному анализу и теории потенциала (член-корр. НАН Украины П. М. Тамразов); в Физико-техническом институте низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины — по математической физике (акад. НАН Украины Е. Я. Хруслов); в Институте прикладной математики и механики НАН Украины — по нелинейному анализу (проф. А. А. Ковалевский и проф. А. Е. Шишков); во Владимирском государственном педагогическом университете — по дифференциальным уравнениям (проф. В. В. Жиков и проф. Ю. А. Алхутов), в Финляндии — на семинарах по анализу в университетах Йоэнсу (проф. И. Лайне), Ювяскюля (проф. Т. Килпелайнен) и Хельсинки (проф. О. Мартио и проф. М. Вуоринен).

Результаты диссертации докладывались также на следующих международных конференциях: Функциональный анализ и его приложения, посвященная 110-летию С. Банаха (Львов, 2002); Дифференциальные уравнения и динамические системы (Суздаль, 2002, 2004, 2006, 2008); Комплексный анализ, дифференциальные уравнения и смежные вопросы (Ереван, 2002); Потенциальные течения и комплексный анализ (Киев, 2002); Функциональные пространства, нелинейный анализ, проблемы математического образования, посвященная 80-летию члена-корреспондента РАН Л. Д. Кудрявцева (Москва, 2003); Математический анализ и экономика (Сумы, 2003); Теория потенциала и течения со свободными границами (Киев, 2003); Геометрический анализ и его приложения (Волгоград, 2004); Анализ на метрических пространствах с мерой (Бедлево, Польша, 2004); Анализ и геометрия, посвященная 75-летию академика РАН Ю. Г. Решетняка (Новосибирск, 2004); Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ, посвященная 100-летию академика С. М. Никольского (Москва, 2005); Теория функций, ее приложения и смежные вопросы (Казань, 2005); Нелинейные дифференциальные уравнения с частными производными (Алушта, 2005); Течения со свободными границами и смежные вопросы анализа (Киев, 2005); Анализ и дифференциальные уравнения с частными производными, посвященная 75-летию профессора Б. Боярского (Бедлево, Польша, 2006); Комплексный анализ и теория потенциала (Гебзе, Турция, 2006, спутниковая конференция к Международному математическому конгрессу-2006); Дифференциальные уравнения и смежные вопросы, посвященная памяти И. Г. Петровского (Москва, 2007); Геометрический анализ и нелинейные дифференциальные уравнения с частными производными (Бедлево, Польша, 2007); Боголюбовские чтения-2007, посвященные 90-летию академика Ю. А. Митропольского (Житомир, 2007); Нелинейные дифференциальные уравнения с частными производными, посвященная памяти И. В. Скрыпника (Ялта, 2007); 18-я Крымская осенняя математическая школа (Ласпи-Батилиман, 2007).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы без соавторов в 9 работах, список которых приводится в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертация изложена на 178 страницах и состоит из введения, четырех глав и списка литературы из 119 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дан исторический обзор известных результатов по теме диссертационной работы и сформулированы ее главные результаты. Здесь также приводятся основные определения и обозначения, используемые в последующих главах. Напомним некоторые из них.

Под функциональным классом в области $G \subset \mathbb{R}^n$ в диссертации понимается произвольное непустое подмножество пространства $L(G)_{\mathrm{loc}}$ функций, локально суммируемых в G. Если в каждой области $G \subset \mathbb{R}^n$ определен некоторый функциональный класс $H(G)$ и при этом для произвольной пары областей $G_1 \subset G_2 \subset \mathbb{R}^n$ сужение на G_1 любой функции из $H(G_2)$ принадлежит классу $H(G_1)$, то $H(G)_{\mathrm{loc}}$ обозначает множество всех функций из $L(G)_{\mathrm{loc}}$, сужение которых на любую подобласть $G_0 \Subset G$ принадлежит классу $H(G_0)$.

Открытый евклидов шар с центром в точке $x \in \mathbb{R}^n$ и радиусом $r > 0$ обозначается через $B(x, r)$.

Пусть $t_0 > 0$, $g(t)$ — положительная непрерывная неубывающая функция, определенная при $0 < t < t_0$, и пусть E — множество в $\mathbb{R}^n$. Напомним, что (внешней) мерой Хаусдорфа $\mathrm{mes}_g\, E$ множества E относительно измеряющей функции g называется конечный или равный $+\infty$ предел при $t \to 0$ величины $\inf\left(\sum_i g(r_i)\right)$, где точная нижняя грань берется по всем не более чем счетным множествам открытых шаров $\{B(x_i, r_i)\}_i$ с $r_i \le t$, образующих покрытие множества E. Если $g(t) = t^\alpha$, $\alpha \ge 0$, то хаусдорфова мера множества E отосительно измеряющей функции g называется мерой Хаусдорфа порядка α множества E и обозначается $\mathrm{mes}^\alpha\, E$.

Предположим, что в области $G \subset \mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, задано множество E, замкнутое относительно этой области, функциональный класс $H(G)$ и класс $A_P(G)$, состоящий из всех решений дифференциального уравнения в частных производных $Pf = 0$, при этом $A_P(G) \cap H(G) \ne \varnothing$ (во всех конкретных случаях, которые будут рассматриваться ниже, мы будем уточнять требования на класс $H(G)$, дифференциальное уравнение $Pf = 0$ и то, в каком смысле понимаются решения этого уравнения).

Будем говорить, что множество E является устранимым для решений уравнения $Pf = 0$ в классе $H(G)$, если каждая функция из этого класса, являющаяся решением уравнения $Pf = 0$ на множестве $G \setminus E$, может быть продолжена с $G \setminus E$ на G до функции из класса $A_P(G) \cap H(G)$.

В главе 1 рассматриваются линейные равномерно эллиптические уравнения второго порядка в дивергентной форме.

Пусть G — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$,

$$Lf = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i (a_{ij}(x) \partial_j f) + \sum_{i=1}^{n} \partial_i (b_i(x) f) + \sum_{i=1}^{n} c_i(x) \partial_i f + d(x) f$$

$(\partial_i f = \partial f / \partial x_i)$ — линейный дифференциальный оператор с измеримыми ограниченными коэффициентами $a_{ij}(x) \equiv a_{ji}(x)$, $b_i(x)$, $c_i(x)$ и $d(x)$ в области G $(i, j = 1, \ldots, n)$, удовлетворяющий следующему условию равномерной эллиптичности: существует такое $\lambda \in (0,\ 1]$, что для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ и для почти всех $x \in G$ выполняется неравенство

$$\lambda |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \lambda^{-1} |\xi|^2. \tag{1}$$

Наибольшее такое λ называется, как обычно, постоянной эллиптичности оператора L и обозначается через λ_L.

Под обобщенным решением уравнения $Lf = 0$ в области G мы понимаем, как всегда, функцию из соболевского класса $W^{1,2}(G)_{\mathrm{loc}}$ $(= W_2^1(G)_{\mathrm{loc}})$, удовлетворяющую этому уравнению в смысле равенства обобщенных функций. По теореме Де Джорджи и Нэша каждая такая функция непрерывна и локально гельдерова в G с некоторым показателем γ, зависящем только от размерности n и постоянной эллиптичности λ_L. Множество всех обобщенных решений уравнения $Lf = 0$ в области G обозначим через $A_L(G)$.

Предположим, что для любой неотрицательной функции $\varphi \in C_0^\infty(G)$ справедливо неравенство $\int_G \big((d(x)\varphi(x) - \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \partial_i \varphi(x) \big) dx \leq 0$. Тогда[28] для каждого шара $B(x, r) \Subset G$ и для любой функции $f \in W^{1,2}(B(x, r))$ существует единственная функция $f_{L,x,r} \in W^{1,2}(B(x, r)) \cap A_L(B(x, r))$, удовлетворяющая условию $f - f_{L,x,r} \in W_0^{1,2}(B(x, r))$.

Пусть $h(t)$ — непрерывная положительная неубывающая функция, определенная при $t > 0$ и такая, что при некотором $\varepsilon > 0$ функция $t^{-(n/2-1+\varepsilon)} h(t)$ не убывает. Будем говорить, что функция f принадлежит классу $W(L, G, h)$, если $f \in W^{1,2}(G)_{\mathrm{loc}}$ и существует такая постоянная $C \geq 0$, что для любого шара $B(x, r) \Subset G$ выполняется неравенство

[28] *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989.

$$\Big(\int_{B(x,r)} |\nabla f - \nabla f_{L,x,r}|^2 dy\Big)^{1/2} \le Ch(r) \qquad (\nabla f = (\partial_1 f, \dots, \partial_n f)).$$

Пусть E — подмножество области G, замкнутое относительно нее, и пусть функция $g(t)$ определена при $t > 0$ равенством $g(t) := t^{n/2-1}h(t)$.

В принятых обозначениях и при сделанных выше предположениях имеет место следующая теорема.

Теорема 1.1. *Множество E устранимо для обобщенных решений уравнения $Lf = 0$ в классе $W(L, G, h)_{\mathrm{loc}}$ тогда и только тогда, когда выполнено условие* $\mathrm{mes}_g E = 0$.

Во всех последующих теоремах первой главы предполагается, что оператор L не содержит младших членов: $Lf = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \partial_i(a_{ij}(x)\partial_j f)$. Далее, как обычно, через $C^\alpha(G)$ и $C^{1,\alpha}(G)$ $(0 < \alpha < 1)$ обозначаются соответственно множество всех функций, удовлетворяющих в области G условию Гельдера с показателем α и множество всех непрерывно дифференцируемых функций в G, градиент которых принадлежит $C^\alpha(G)$. При $h(t) = t^{n/2+\alpha}$, $\alpha > -1$, вместо $W(L, G, h)$ мы будем писать $W_L^\alpha(G)$.

В теореме 1.2 показано, что при $0 < \alpha < \gamma < 1$ для оператора L с коэффициентами из $C^\gamma(G)_{\mathrm{loc}}$ имеет место совпадение функциональных классов $W_L^\alpha(G)_{\mathrm{loc}}$ и $C^{1,\alpha}(G)_{\mathrm{loc}}$. Отсюда и из теоремы 1.1 следует, что в этом случае условие $\mathrm{mes}^{n-1+\alpha}E = 0$ характеризует устранимость множества E для обобщенных решений уравнения $Lf = 0$ в классе $C^{1,\alpha}(G)_{\mathrm{loc}}$ (теорема 1.4). Для оператора Лапласа Δ теорема 1.4 дает упомянутый выше результат Е. П. Долженко[6,7].

В теореме 1.3 для оператора L с непрерывными коэффициентами в G показано, что при $-1 < \alpha < 0$ для произвольной подобласти $G_0 \Subset G$ и для любой функции $f \in W_L^\alpha(G)_{\mathrm{loc}}$ конечна величина $\sup\limits_{B(x,r)\Subset G_0} r^{-n-2\alpha} \int_{(B(x,r)} |\nabla f|^2 dy$. По теореме вложения Морри[29] это означает, что $f \in C^{1+\alpha}(G)_{\mathrm{loc}}$. Поэтому из теорем 1.1 и 1.3 вытекает, что при $0 < \alpha < 1$ и непрерывности коэффициентов оператора L в области G равенство $\mathrm{mes}^{n-2+\alpha}E = 0$ является необходимым условием устранимости множества E для обобщенных решений уравнения $Lf = 0$ в классе $C^\alpha(G)_{\mathrm{loc}}$. Это же условие, как показали Т. Килпелайнен и Ч. Жонг[27], обеспечивает устранимость множества E для обобщенных

[29] *Giaquinta M.* Multiple integrals in the calculus of variations and nonlinear elliptic systems. Princeton Univ. Press, Princeton, 1983.

решений уравнения $Lf = 0$ в классе $C^\alpha(G)_{\mathrm{loc}}$, $0 < \alpha < 1$, при этом непрерывность коэффициентов оператора L здесь не нужна. Значит, если $0 < \alpha < 1$ и коэффициенты оператора L непрерывны в области G, то условие $\mathrm{mes}^{n-2+\alpha} E = 0$ полностью описывает устранимые множества для обобщенных решений уравнения $Lf = 0$ в классе $C^\alpha(G)_{\mathrm{loc}}$ (теорема 1.5). Для оператора Лапласа Δ теорема 1.5 дает упомянутый выше результат Л. Карлесона[5].

В следующих теоремах первой главы предполагается, что L — оператор без младших членов с измеримыми ограниченными коэффициентами в области G.

Пусть f — непрерывная функция в G. Тогда[28] для каждого шара $B(x,r) \Subset G$ существует единственная функция $f_{L,x,r} \in A_L(B(x,r))$, которая непрерывно продолжается на границу этого шара и имеет там граничные значения, совпадающие со значениями функции f.

Пусть $\alpha > 0$. Будем говорить, что функция f принадлежит классу $U_L^\alpha(G)$, если она непрерывна в области G и существует такая постоянная $C \geq 0$, что для любого шара $B(x,r) \Subset G$ выполняется неравенство $\sup\limits_{B(x,r)} |f - f_{L,x,r}| \leq Cr^\alpha$.

В следующей теореме K — компакт в G.

Теорема 1.6. *Пусть* $0 < \alpha \leq 2$. *Компакт* K *устраним для обобщенных решений уравнения* $Lf = 0$ *в классе* $U_L^\alpha(G)$ *тогда и только тогда, когда выполняется условие* $\mathrm{mes}^{n-2+\alpha} K = 0$.

Для дальнейшего изложения напомним, что класс Зигмунда $Z(G)$ состоит, по определению, из всех непрерывных функций f в области G для которых конечна величина $\sup |h|^{-1}|f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)|$, где точная верхняя грань берется по всем $x \in G$ и $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ таким, что замкнутый отрезок с концами $x - h$ и $x + h$ целиком лежит в G; класс Гельдера–Зигмунда $\Lambda^\alpha(G)$, $0 < \alpha < 2$, определяется равенствами $\Lambda^\alpha(G) = C^\alpha(G)$ и $\Lambda^{1+\alpha}(G) = C^{1,\alpha}(G)$ при $0 < \alpha < 1$, $\Lambda^1(G) = Z(G)$. Отметим[16,30], что для оператора Лапласа Δ класс функций $U_\Delta^\alpha(G)_{\mathrm{loc}}$ совпадает при $0 < \alpha < 2$ с классом $\Lambda^\alpha(G)_{\mathrm{loc}}$, поэтому в теореме 1.6 содержатся известные критерии устранимости компактов для гармонических функций, установленные в работах Л. Карлесона[5] ($0 < \alpha < 1$), Е. П. Долженко[6,7] ($1 < \alpha < 2$), Д. Матеу и Д. Оробича[14] и Д. Ульриха[15]

[30] *Покровский А.В.* Классы функций, определяемые с помощью локальных приближений решениями гипоэллиптических уравнений // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 2. С. 394-413.

$(\alpha = 1)$.

Чтобы сформулировать следующий результат, введем обозначение: если функция f непрерывна на замыкании шара $B(x,r)$, то ее колебание на этом шаре определяется равенством $\operatorname{osc}_{B(x,r)} f := \sup\limits_{B(x,r)} f - \inf\limits_{B(x,r)} f$. Тогда упомянутая выше теорема Де Джорджи и Нэша может быть сформулирована таким образом[28]: для любой тройки концентрических шаров $B(x,r) \Subset B(x,R) \Subset B(x,R_0) \Subset G$ с $R \leq 1$ и для любой функции $f \in A_L(B(x,R_0))$ справедливо неравенство

$$\operatorname{osc}_{B(x,r)} f \leq C \left(\frac{r}{R}\right)^{\gamma} \operatorname{osc}_{B(x,R)} f, \tag{2}$$

где $C > 0$ и $\gamma \in (0,\ 1)$ зависят только от размерности n и постоянной эллиптичности λ_L.

Из принципа максимума для обобщенных решений рассматриваемого уравнения вытекает, что при всех $\alpha \in (0,\ 1)$ имеет место включение $C^\alpha(G)_{\mathrm{loc}} \subset U_L^\alpha(G)_{\mathrm{loc}}$. В теореме 1.7 показано, что при $0 < \alpha < \gamma$, где γ — гельдеров показатель в только что приведенной формулировке теоремы Де Джорджи и Нэша, это включение превращается в равенство функциональных классов $C^\alpha(G)_{\mathrm{loc}} = U_L^\alpha(G)_{\mathrm{loc}}$.

Теорема 1.6 дополняется теоремой 1.8, в которой получено обобщение на решения уравнения $Lf = 0$ известной теоремы И. И. Привалова[31] о достаточном условии гармоничности непрерывной функции в терминах введенных им верхнего и нижнего обобщенных параметров Лапласа. Из теоремы 1.8 следует, что при $\alpha > 2$ класс $U_L^\alpha(G)_{\mathrm{loc}}$ состоит только из обобщенных решений уравнения $Lf = 0$ в области G.

При сравнении теорем 1.1 и 1.6 естественно возникает вопрос о связи между классами функций $W_L^\alpha(G)_{\mathrm{loc}}$ и $U_L^{1+\alpha}(G)_{\mathrm{loc}}$. Ответ на него дает теорема 1.9, в которой при всех $\alpha > -1$ установлено включение $W_L^\alpha(G)_{\mathrm{loc}} \subset U_L^{1+\alpha}(G)_{\mathrm{loc}}$, становящееся при $\alpha > 0$ равенством функциональных классов $W_L^\alpha(G)_{\mathrm{loc}} = U_L^{1+\alpha}(G)_{\mathrm{loc}}$.

В **главе 2** рассматриваются линейные равномерно эллиптические уравнения второго порядка в недивергентной форме.

Пусть $\mathfrak{L} f = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \partial_{ij} f \ \left(\partial_{ij} f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)$ — линейный дифференциальный оператор второго порядка с измеримыми ограниченными действительными коэффициентами $a_{ij}(x) \equiv a_{ji}(x)$ в $\mathbb{R}^n$ $(i,j = 1,\ldots,n)$,

[31] *Привалов И.И.* Субгармонические функции. М.: ОНТИ, 1937.

такой, что при некотором $\lambda \in (0,\ 1]$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ и для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ выполняется условие равномерной эллиптичности (1). Наибольшее такое λ называется, как обычно, постоянной эллиптичности оператора $\mathfrak{L}$ и обозначается через $\lambda_{\mathfrak{L}}$.

Возьмем произвольным образом ограниченную область $G \subset \mathbb{R}^n$ с гладкой (бесконечно дифференцируемой) границей ∂G, непрерывную функцию g, определенную на ∂G, и последовательность дифференциальных операторов $\mathfrak{L}_k f = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(k)}(x)\partial_{ij} f$, $k \in \mathbb{N}$, такую, что все коэффициенты $a_{ij}^{(k)}(x)$ определены и бесконечно дифференцируемы в $\mathbb{R}^n$, операторы $\mathfrak{L}_k$ равномерно эллиптичны в $\mathbb{R}^n$ с постоянными эллиптичности $\lambda_{\mathfrak{L}_k} \geq \lambda_{\mathfrak{L}}$ ($k \in \mathbb{N}$), и для любых $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ последовательность функций $\{a_{ij}^{(k)}(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ сходится при $k \to \infty$ к функции $a_{ij}(x)$ почти всюду в G. Тогда[28] для каждого $k \in \mathbb{N}$ существует единственная функция f_k, которая непрерывна на замкнутой области $\overline{G}$, бесконечно дифференцируема внутри нее и такая, что $\mathfrak{L}_k f_k \equiv 0$ в G, $f_k \equiv g$ на ∂G. Н. В. Крылов и М. В. Сафонов[32] показали, что из последовательности функций $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся на $\overline{G}$. Следуя М. В. Сафонову[33], мы называем предел такой подпоследовательности слабым решением задачи Дирихле $\mathfrak{L}f = 0$ в G, $f = g$ на ∂G. Будем говорить, что оператор $\mathfrak{L}$ обладает свойством слабой единственности, если для любой области G с гладкой границей и для любой непрерывной функции g на ∂G эта задача Дирихле имеет единственное слабое решение.

Понятие слабой единственности было введено Н. В. Крыловым[34], который доказал, что если замыкание множества точек разрыва коэффициентов оператора $\mathfrak{L}$ не более чем счетно, то этот оператор обладает свойством слабой единственности. М. В. Сафонов[35] установил слабую единственность оператора $\mathfrak{L}$ в предположении, что множество точек разрыва его коэффициентов замкнуто и имеет достаточно малую

[32] *Крылов Н.В., Сафонов М.В.* Некоторое свойство решений параболических уравнений с измеримыми коэффициентами // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1980. Т. 44. № 1. С. 161-175.

[33] *Safonov M.V.* Nonuniqueness for second-order elliptic equations with measurable coefficients // SIAM J. Math. Anal. 1999. V. 30. № 4. P. 879-895.

[34] *Krylov N.V.* On one-point weak uniqueness for elliptic equations // Comm. in PDE. 1992. V. 17. № 11-12. P. 1759-1784.

[35] *Safonov M.V.* On a weak uniqueness for some elliptic equations // Comm. in PDE. 1994. V. 19. № 5-6. P. 943-957.

хаусдорфову размерность (зависящую от n и $\lambda_{\mathfrak{L}}$). С другой стороны, Н. С. Надирашвили[36] показал, что, в отличие от случая $n = 2$, слабая единственность для оператора $\mathfrak{L}$ может нарушаться при $n \geq 3$.

Для формулировки основной теоремы второй главы нам потребуется следующий результат Л. Эскуриазы[37]: оператор $\mathfrak{L}$ обладает свойством слабой единственности в том и только том случае, когда существует единственная неотрицательная функция $W_{\mathfrak{L}} \in L(\mathbb{R}^n)_{\text{loc}}$ такая, что

$$\int W_{\mathfrak{L}}(x)\mathfrak{L}\varphi(x)\,dx = 0 \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \qquad \int_{B(0,1)} W_{\mathfrak{L}}(x)dx = 1. \tag{3}$$

Всюду ниже мы считаем, что для оператора $\mathfrak{L}$ выполнено свойство слабой единственности в $\mathbb{R}^n$, а неотрицательная функция $W_{\mathfrak{L}} \in L(\mathbb{R}^n)_{\text{loc}}$ удовлетворяет условиям (3).

Пусть $\alpha > 0$, $W_{\mathfrak{L}}(B(x,r)) := \displaystyle\int_{B(x,r)} W_{\mathfrak{L}}(y)\,dy$ $(x \in \mathbb{R}^n,\ r > 0)$. Назовем (внешней) $\mathfrak{L}$-мерой порядка α множества $E \subset \mathbb{R}^n$ и обозначим через $\mathrm{mes}^\alpha_{\mathfrak{L}} E$ конечный или равный $+\infty$ предел при $t \to 0$ величины $\inf\Big(\sum_j r_j^{\alpha-n} W_{\mathfrak{L}}\big(B(x_j,r_j)\big)\Big)$, где точная нижняя грань берется по всем не более чем счетным системам шаров $\{B(x_j,r_j)\}_j$ с $r_j \leq t$, образующих покрытие множества E.

Под слабым решением уравнения $\mathfrak{L}f = 0$ в области G мы будем понимать непрерывную в этой области функцию g, которая внутри любой подобласти $G_0 \Subset G$ с гладкой границей совпадает со слабым решением задачи Дирихле $\mathfrak{L}f = 0$ в G_0, $f = g$ на ∂G_0. Множество всех таких функций мы обозначаем через $A_{\mathfrak{L}}(G)$.

Пусть G — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, K — компакт в G. Заменяя в определении класса $U^\alpha_L(G)$ из главы 1 обобщенные решения уравнения $Lf = 0$ на слабые решения уравнения $\mathfrak{L}f = 0$, мы получаем определение функционального класса $U^\alpha_{\mathfrak{L}}(G)$.

В принятых выше обозначениях сформулируем основной результат второй главы диссертации.

Теорема 2.1. *Пусть $0 < \alpha \leq 2$. Компакт K устраним для слабых решений уравнения $\mathfrak{L}f = 0$ в классе $U^\alpha_{\mathfrak{L}}(G)_{\text{loc}}$ тогда и только тогда,*

---

[36] *Nadirashvili N.S.* Nonuniqueness in the martingale problem and the Dirichlet problem for uniformly elliptic equations // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4). 1997. V. 24. № 3. P. 537-550.

[37] *Escauriaza L.* Bounds for the fundamental solutions of elliptic and parabolic equations in nondivergence form // Comm. in PDE. 2000. V. 25. № 5-6. P. 821-845.

когда выполнено условие $\mathrm{mes}_{\mathfrak{L}}^{n-2+\alpha} K = 0$.

Для оператора Лапласа Δ функция $W_\Delta(x)$ является, очевидно, неотрицательной и не тождественной нулю гармонической функцией в $\mathbb{R}^n$, и, по односторонней теореме Лиувилля, она есть положительная постоянная. Отсюда следует, что мера $\mathrm{mes}_\Delta^\alpha E$ совпадает с точностью до постоянного множителя, не зависящего от множества $E \subset \mathbb{R}^n$, с мерой $\mathrm{mes}^\alpha E$. Поэтому (см. комментарий после формулировки теоремы 1.6) в теореме 2.1 содержатся известные критерии устранимости компактов для гармонических функций[5−7,14,15].

Прежде чем излагать дальнейшие результаты работы, проиллюстрируем применение теоремы 2.1 на упомянутом выше примере Д. Гилбарга и Дж. Серрина[17].

Пример 2.1. Пусть $n \geq 2$, $\beta > n-2$, $\alpha = \frac{\beta-n+2}{1+\beta}$, и пусть коэффициенты оператора $\mathfrak{L}f = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\partial_{ij} f$ заданы в $\mathbb{R}^n \setminus \{O\}$ (O — начало координат в $\mathbb{R}^n$) равенствами $a_{ij}(x) := \delta_{ij} + \beta x_i x_j |x|^{-2}$, где δ_{ij} — символ Кронекера: $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$ $(i, j = 1, \ldots, n)$. Тогда $0 < \alpha < 1$, оператор $\mathfrak{L}$ равномерно эллиптичен и удовлетворяет условию слабой единственности в $\mathbb{R}^n$, и непосредственная проверка показывает, что функция $1 - |x|^\alpha$ является классическим (и, следовательно, слабым) решением уравнения $\mathfrak{L}f = 0$ в $\mathbb{R}^n \setminus \{O\}$, а ее сужение на единичный шар $B := B(0,1)$ принадлежит классам $C^\alpha(B)$ и $U_{\mathfrak{L}}^\alpha(B)$ (поскольку $C^\alpha(B) \subset U_{\mathfrak{L}}^\alpha(B)$ при $0 < \alpha < 1$).

С другой стороны, как показал Л. Эскуриаза[37], функция $W_{\mathfrak{L}}(x)$ с точностью до постоянного положительного множителя, зависящего лишь от n и β, совпадает в $\mathbb{R}^n$ с функцией $|x|^{\frac{-(n-1)\beta}{1+\beta}}$. Отсюда следует, что функция $W_{\mathfrak{L}}(B(0,r))$ $(r > 0)$ совпадает с функцией $cr^{\frac{-(n-1)\beta}{1+\beta}+n}$, где c — постоянный положительный множитель, зависящий только от n и β. Поэтому для любого $r > 0$ справедливы равенства

$$r^{(n-2+\alpha)-n} W_{\mathfrak{L}}(B(0,r)) = cr^{\frac{\beta-n+2}{1+\beta}-2+n-\frac{(n-1)\beta}{1+\beta}} = cr^0 = c. \tag{4}$$

Воспользуемся теперь результатом П. Бауман[38] о том, что функция $W_{\mathfrak{L}}(B(x,r))$ удовлетворяет при всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $r \in (0,\ 1]$ условию удвоения $W_{\mathfrak{L}}(B(x,2r)) \leq C \cdot W_{\mathfrak{L}}(B(x,r))$, где положительная постоянная C

[38] *Bauman P.* A Wiener test for nondivergence structure, second-order elliptic equations // Indiana Univ. Math. J. 1985. V. 34. № 4. P. 825-844.

зависит только от n и $\lambda_{\mathfrak{L}}$. Отсюда вытекает, что при проверке условия $\mathrm{mes}_{\mathfrak{L}}^{n-2+\alpha} K > 0$ можно без уменьшения общности предполагать, что центры всех шаров покрытий в определении $\mathfrak{L}$-меры принадлежат множеству K. Следовательно, цепочка равенств (4) означает, что для множества $K = \{O\}$ выполняется условие $\mathrm{mes}_{\mathfrak{L}}^{n-2+\alpha} K > 0$, и, по теореме 2.1, это множество не является устранимым для слабых решений уравнения $\mathfrak{L}f = 0$ в классе $U_{\mathfrak{L}}^{\alpha}(B)$.

Проведенные вычисления показывают также, что для всех $\gamma > \alpha$ справедливо равенство $\mathrm{mes}_{\mathfrak{L}}^{n-2+\gamma} K = 0$. Поэтому при $\gamma > \alpha$ компакт $K = \{O\}$ является устранимым для слабых решений уравнения $\mathfrak{L}f = 0$ в классе $U_{\mathfrak{L}}^{\alpha}(B)$.

В упомянутой работе П. Бауман[38] было также показано, что функция $W_{\mathfrak{L}}(x)$ не может обращаться в нуль на множестве положительной лебеговой меры в $\mathbb{R}^n$. Это означает, что условия $\mathrm{mes}_{\mathfrak{L}}^{n} K = 0$ и $\mathrm{mes}^{n} K = 0$ эквивалентны, поэтому устранимость компакта K для слабых решений уравнения $\mathfrak{L}f = 0$ в классе $U_{\mathfrak{L}}^{2}(G)$ характеризуется условием равенства нулю его меры Лебега.

Для дальнейшего изложения нам потребуется следующая теорема Н. В. Крылова и М. В. Сафонова[32] о локальной гельдеровости слабых решений уравнения $\mathfrak{L}f = 0$: для произвольной тройки концентрических шаров $B(x,r) \Subset B(x,R) \Subset B(x,R_0)$ с $R \leq 1$ и для любой функции $f \in A_{\mathfrak{L}}(B(x,R_0))$ справедливо неравенство (2), где $C > 0$ и $\gamma \in (0,\ 1]$ зависят только от n и $\lambda_{\mathfrak{L}}$.

Из хорошо известного описания классов Гельдера–Зигмунда $\Lambda^{\alpha}(G)_{\mathrm{loc}}$ при $0 < \alpha < 2$ в терминах локальных приближений линейными функциями[39] и из принципа максимума для слабых решений уравнения $\mathfrak{L}f = 0$ вытекает включение $\Lambda^{\alpha}(G)_{\mathrm{loc}} \subset U_{\mathfrak{L}}^{\alpha}(G)_{\mathrm{loc}}$ $(0 < \alpha < 2)$. В теореме 2.2 показано, что при $0 < \alpha < \gamma$, где γ — гельдеров показатель в приведенной выше формулировке теоремы Крылова и Сафонова, это включение становится равенством функциональных классов $\Lambda^{\alpha}(G)_{\mathrm{loc}} = U_{\mathfrak{L}}^{\alpha}(G)_{\mathrm{loc}}$. Из теорем 2.1 и 2.2 вытекает теорема 2.3, дающая критерий устранимости компактов для слабых решений уравнения $\mathfrak{L}f = 0$ в классах Гельдера с малым показателем гладкости.

Теорему 2.1 дополняет теорема 2.4, в которой получено обобщение на слабые решения уравнения $\mathfrak{L}f = 0$ упомянутой выше теоремы И. И. Привалова[31] о достаточном условии гармоничности непрерывной

[39] *Крылов Н.В.* Лекции по эллиптическим и параболическим уравнениям в пространствах Гельдера. Новосибирск: Научная книга, 1998.

функции. Из теоремы 2.4 следует, что при $\alpha > 2$ класс $U_{\mathfrak{L}}^{\alpha}(G)_{\rm loc}$ содержит только слабые решения уравнения $\mathfrak{L}f = 0$ в области G.

В теореме 2.5 показано, что при $n \geq 3$ и $0 < \alpha \leq 2$ выполнение равенства $\mathrm{mes}^{n-2+\alpha}K = 0$ является достаточным условием устранимости компакта K для классических решений уравнения $\mathfrak{L}f = 0$ в классе $U_{\mathfrak{L}}^{\alpha}(G)_{\rm loc}$, если только коэффициенты оператора $\mathfrak{L}$ непрерывны по Дини в области G (в этом случае множества слабых и классических решений этого уравнения совпадают[40]).

В главе 3 рассматриваются квазилинейные эллиптические уравнения второго порядка.

В первой ее части изучаются устранимые множества для решений уравнения $\mathrm{div}(|\nabla f|^{p-2}\nabla f) = 0$, $1 < p < \infty$. Под решением этого уравнения в области G мы понимаем, как обычно, функцию из соболевского класса $W^{1,p}(G)_{\rm loc}$ $(= W_p^1(G)_{\rm loc})$, удовлетворяющую этому уравнению в смысле равенства обобщенных функций. Множество всех таких функций обозначим через $A_p(G)$, а его элементы будем называть, как обычно, p-гармоническими функциями. Хорошо известно[41,42,43], что каждая p-гармоническая функция принадлежит классу $C^{1,\gamma}(G)_{\rm loc}$, где $\gamma \in (0,\ 1)$ зависит только от n и p.

Если $f \in W^{1,p}(G)_{\rm loc}$, то[44] для каждого шара $B(x,r) \Subset G$ существует единственная функция $f_{x,r} \in W^{1,p}(B(x,r)) \cap A_p(B(x,r))$, удовлетворяющая условию $f - f_{L,x,r} \in W_0^{1,p}(B(x,r))$.

Пусть $\alpha > 0$. Будем говорить, что функция f принадлежит классу $A_p^{\alpha}(G)$, если $f \in W^{1,\max\{2,p\}}(G)_{\rm loc}$ и существует такая постоянная $C \geq 0$, что для каждого шара $B(x,r) \Subset G$ выполняется неравенство

$$\int_{B(x,r/2)} |\nabla f - \nabla f_{x,r}|^2 dy \leq C r^{n+2\alpha}.$$

В главе 3 всюду предполагается, что G — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, а E — множество, замкнутое относительно G.

---

[40] *Иванович М.Д.* О характере непрерывности решений линейных эллиптических уравнений второго порядка // Вестник МГУ. Сер. Матем. Мех. 1966. Вып. 3. С. 37-47.

[41] *Уральцева Н.Н.* Вырождающиеся квазилниейные эллиптические системы // Зап. научн. семинаров ЛОМИ. 1968. Т. 7. С. 184-222.

[42] *DiBenedetto E.* $C^{1+\alpha}$ local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations // Nonlinear Analysis. 1983. V. 7. № 8. P. 827-850.

[43] *Tolksdorf P.* Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations // Journ. of Diff. Equations. – 1984. V. 51. P. 126-150.

[44] *Heinonen J., Kilpeläinen T., Martio O.* Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations. Oxford: Oxford University Press, 1993.

В принятых обозначениях справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1. *Пусть* $1 < p < \infty$ *и* $0 < \alpha \le 1$. *Множество* E *устранимо для* p*-гармонических функций в классе* $A_p^\alpha(G)_{\mathrm{loc}}$ *тогда и только тогда, когда выполнено условие* $\mathrm{mes}^{n-1+\alpha} E = 0$.

Отметим, что из доказательства теоремы 3.1 вытекает, что при $\alpha > 1$ класс $A_p^\alpha(G)_{\mathrm{loc}}$ совпадает с множеством всех p-гармонических функций в области G.

Для изложения дальнейших результатов введем обозначение: если $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ и $f \in L_2(B(x,r))$, то

$$\mathrm{osc}_2(f,x,r) := \Big(\frac{1}{\sigma_n r^n}\int_{B(x,r)} |f(y) - f_{B(x,r)}|^2 dy\Big)^{1/2}, \qquad \sigma_n := \int_{B(0,1)} dy,$$

где $f_{B(x,r)}$ — среднее значение функции f по шару $B(x,r)$. Тогда теорема о гельдеровости градиента p-гармонической функции может быть сформулирована в следующей форме, предложенной в работе Э. ДиБенедетто и Х. Манфреди[45]: существуют $\gamma \in (0,\ 1]$ и $\nu > 0$, зависящие только от n и p, такие, что для произвольной тройки концентрических шаров $B(x,r) \Subset B(x,R) \Subset B(x,R_0)$ и для любой функции $f \in A_p(B(x,R_0))$ выполняется неравенство

$$\mathrm{osc}_2(\nabla f, x, r) \le \nu \left(\frac{r}{R}\right)^{\gamma} \mathrm{osc}_2(\nabla f, x, R). \tag{5}$$

В последующих результатах третьей главы $\gamma = \gamma(n,p)$ является гельдеровым показателем p-гармонической функции в представленной формулировке.

В теореме 3.2 показано, что при всех при $p \ge 2$ и $\alpha \in (0,\ 1)$ справедливо включение $C^{1,\alpha}(G)_{\mathrm{loc}} \subset A_p^\alpha(G)_{\mathrm{loc}}$, которое остается в силе и при $1 < p < 2$, если в нем заменить класс $C^{1,\alpha}(G)_{\mathrm{loc}}$ его подклассом, состоящем из функций, имеющих ненулевой градиент всюду в области G. В обратном направлении эта теорема устанавливает, что при всех $p \in (1,\ \infty)$ и $\alpha \in (0,\ \gamma(n,p))$ имеет место включение $A_p^\alpha(G)_{\mathrm{loc}} \subset C^{1,\alpha}(G)_{\mathrm{loc}}$.

С другой стороны, П. Линдквист и П. Ютинен[46] показали, что каждая непрерывно дифференцируемая функция f в области G, p-гармо-

[45] *DiBenedetto E., Manfredi J.* On the higher integrability of the gradient of weak solutions of certain degenerate elliptic systems // Amer. Journ. of Math. 1993. V. 115. P. 1107-1134.

[46] *Juutinen P., Lindqvist P.* A theorem of Radó's type for the solutions of a quasi-linear equation // Math. Research Letters. 2004. V. 11. P. 31-34.

ническая на множестве $G \setminus \{\nabla f = 0\}$, является p-гармонической и в G. Сравнивая этот результат с теоремами 3.1 и 3.2, заключаем, что при всех $p \in (1,\ \infty)$ и $\alpha \in (0,\ 1)$ условие $\operatorname{mes}^{n-1+\alpha} E = 0$ достаточно, а при $\alpha < \gamma(n,p)$ — необходимо и достаточно для устранимости множества E для p-гармонических функций в классе $C^{1,\alpha}(G)_{\mathrm{loc}}$ (теорема 3.3).

При $p = 2$ неравенство (5) выполняется с $\gamma = 1$, поэтому теорема 3.3 содержит в себе результат Е. П. Долженко[6,7] об устранимых особенностях гармонических функций. Теорему 3.3 интересно сравнить с упоминавшейся выше теоремой Т. Килпелайнена и Ч. Жонга[27], которая утверждает, что при всех $p \in (1,\ \infty)$ и $\alpha \in (0,\ 1)$ таких, что $n - p + \alpha(p-1) \geq 0$, множество E устранимо для p-гармонических функций в классе $C^{\alpha}(G)_{\mathrm{loc}}$ тогда и только тогда, когда выполняется условие $\operatorname{mes}^{n-p+\alpha(p-1)} E = 0$. Совершенно очевидно, что при $p \neq 2$ зависимость критической размерности Хаусдорфа от α и p имеет в этих теоремах разный характер: у Т. Килпелайнена и Ч. Жонга она зависит от p, а в теореме 3.3 — нет.

Во второй части главы 3 рассматривается уравнение минимальных поверхностей $\operatorname{div}\big((1+|\nabla f|^2)^{-1/2}\nabla f\big) = 0$. Под решением этого уравнения понимается, как обычно, дважды непрерывно дифференцируемая функция, подстановка которой в уравнение обращает его в тождество.

Следующая теорема является основным результатом третьей главы диссертации.

Теорема 3.4. *Пусть* $0 < \alpha < 1$. *Множество E устранимо для решений уравнения минимальных поверхностей в классе $C^{1,\alpha}(G)_{\mathrm{loc}}$ тогда и только тогда, когда выполнено условие* $\operatorname{mes}^{n-1+\alpha} E = 0$.

В связи с формулировкой этой теоремы напомним, что условие $\operatorname{mes}^{n-1} E = 0$ является достаточным для того, чтобы всякое решение уравнения минимальных поверхностей, определенное в $G \setminus E$, продолжалась (как решение этого уравнения) на G (подчеркнем, что здесь не требуется никаких условий на поведение решений вблизи E). Для случая, когда множество E состоит только из изолированных точек этот результат был установлен Л. Берсом[21], при $n = 2$ — Й. Ниче[23], для компактных множеств E — Э. Де Джорджи и Г. Стампаккья[22], в общем случае — М. Мирандой[24].

Отметим, что основную сложность в доказательстве теоремы 3.4 представляет проверка необходимости условия $\operatorname{mes}^{n-1+\alpha} E = 0$ для устранимости множества E. В диссертации она преодолевается при помощи применения теоремы Шаудера о неподвижной точке.

В теореме 3.5 дано обобщение теоремы 3.4 на более широкий класс квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка. Не приводя определения этого класса, укажем, что к нему принадлежат уравнение капиллярности $\operatorname{div}\big((1+|\nabla f|^2)^{-1/2}\nabla f\big)+cf=0$ ($c=\mathrm{const}\le 0$), уравнение Эмдена–Фаулера $\Delta f-|f|^{p-1}f=0$ при $p\ge 2$ и уравнение $\Delta f-f|\nabla f|^2=0$.

В главе 4 рассматриваются линейные дифференциальные уравнения (не обязательно эллиптические) с гладкими коэффициентами.

Пусть P — линейный дифференциальный оператор порядка m, коэффициенты которого являются m раз непрерывно дифференцируемыми функциями в области $G\subset\mathbb{R}^n$ (принимающими, вообще говоря, комплексные значения). Под слабым решением уравнения $Pf=0$ понимаем, как обычно, локально суммируемую функцию, удовлетворяющую этому уравнению в смысле распределений по Л. Шварцу.

Пусть $1<p<\infty$, $s>0$, $f\in L(G)_{\mathrm{loc}}$. Для шара $B(x,r)\Subset G$ обозначим $E_{[s]}(f,x,r):=\inf\Big\{r^{-n}\displaystyle\int_{B(x,r)}|f(y)-g(y)|dy : g\in\mathcal{P}_{[s]}\Big\}$, где $[s]$ — целая часть s, $\mathcal{P}_{[s]}$ — множество всех алгебраических полиномов степени не выше $[s]$ (по совокупности переменных). Определим в области G максимальную функцию $M_sf(x):=\sup\limits_{B(x,r)\Subset G} r^{-s}E_{[s]}(f,x,r)$. По определению, функция f принадлежит классу $C^s_p(G)_{\mathrm{loc}}$, если $M_sf\in L_p(G)_{\mathrm{loc}}$ (отметим, что последнее условие обеспечивает принадлежность f к $L_p(G)_{\mathrm{loc}}$). В случае натурального s можно определить в области G еще одну максимальную функцию: $M^*_sf(x):=\sup\limits_{B(x,r)\Subset G} r^{-s}E^*_s(f,x,r)$, где $E^*_s(f,x,r)$ обозначает усредненную по мере Лебега величину наилучшего приближения в среднем функции f на шаре $B(x,r)$ пространством алгебраических полиномов степени не выше $s-1$. По теореме А. Кальдерона[47] функция f принадлежит классу Соболева $W^s_p(G)_{\mathrm{loc}}$ тогда и только тогда, когда $M^*_sf\in L_p(G)_{\mathrm{loc}}$, откуда вытекает включение $W^s_p(G)_{\mathrm{loc}}\subset C^s_p(G)_{\mathrm{loc}}$.

Классы функций $C^s_p(G)_{\mathrm{loc}}$ были введены Р. Шарпли и Р. ДеВором[48],

[47] *Kalderón A.P.* Estimates for singular integral operators in terms of maximal functions // Studia Math. 1972. V. 44. P. 167-186.

[48] *Sharpley R., DeVoor R.* Maximal functions measuring smothness // Mem. Amer. Math. Soc. 1984. V. 47. № 293. P. 1-113.

и независимо, Б. Боярским[49]. Позднее Х. Трибель[50] показал, что эти классы содержатся в шкале пространств Лизоркина–Трибеля $L^s_{p,q}(G)_{\mathrm{loc}}$ при $q = \infty$: $C^s_p(G)_{\mathrm{loc}} = L^s_{p,\infty}(G)_{\mathrm{loc}}$.

Основным результатом главы 4 является следующая теорема.

Теорема 4.1. *Пусть $1 < p < \infty$, $s > 0$, $q = p/(p-1)$, $0 \leq n - q(m-s) < n$, и пусть E — множество, замкнутое относительно области G, с $\mathrm{mes}^{n-q(m-s)} E < \infty$. Тогда E устранимо для слабых решений уравнения $Pf = 0$ в классе $C^s_p(G)_{\mathrm{loc}}$.*

Эта теорема обобщает и распространяет на нецелые показатели гладкости известный результат Р. Харви и Дж. Полкинга[8], которые при целом s в условиях теоремы 4.1 установили устранимость множества E для слабых решений уравнения $Pf = 0$ в классе Соболева $W^s_p(G)_{\mathrm{loc}}$.

В заключение, автор хотел бы выразить глубокую благодарность своему учителю и научному консультанту профессору Евгению Прокофьевичу Долженко за многочисленные обсуждения представленных в диссертации результатов и постоянную поддержку в работе.

[49] *Bojarski B.* Sharp maximal operator of fractional order and Sobolev imbedding inequalities // Bull. Polish Acad. Sci. Math. 1985. V. 33. № 1-2. P. 7-16.

[50] *Triebel H.* Local approximation spaces // Ztschr. Anal. und Anwend. 1989. Bd. 8. H. 3. S. 261-288.

Основные публикации автора по теме диссертации (из официального перечня ВАК)

1. *Покровский А.В.* Устранимые особенности решений дивергентных эллиптических уравнений второго порядка // Мат. заметки. 2005. Т. 77. Вып. 3. С. 424-433.
2. *Покровский А.В.* Устранимые особенности слабых решений линейных дифференциальных уравнений с частными производными // Мат. заметки. 2005. Т. 77. Вып. 4. С. 584-591.
3. *Покровский А.В.* Устранимые особенности решений квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка // Доклады РАН. 2005. Т. 401. вып. 1. С. 27-29.
4. *Покровский А.В.* Устранимые особенности p-гармонических функций // Дифф. уравнения. 2005. Т. 41. № 7. С. 897-907.
5. *Покровский А.В.* Устранимые особенности решений уравнения минимальных поверхностей // Функц. анализ и его приложения. 2005. Т. 39. Вып. 4. С. 62-68.
6. *Покровский А.В.* Устранимые особенности решений нелинейных эллиптических уравнений // Успехи мат. наук. 2007. Т. 62. Вып. 3 (375). С. 215-216.
7. *Покровский А.В.* Локальные аппроксимации решениями эллиптических уравнений второго порядка и устранимые особенности // Доклады РАН. 2007. Т. 417. № 5, С. 597-600.
8. *Покровский А.В.* Устранимые особенности решений линейных равномерно эллиптических уравнений второго порядка // Функц. анализ и его приложения. 2008. Т. 42. Вып. 2. С. 44-55.
9. *Покровский А.В.* Устранимые особенности решений линейных равномерно эллиптических уравнений второго порядка в недивергентной форме // Мат. сборник. 2008. Т. 199. № 6. С. 136-159.

Публикации, примыкающие к основным

1. *Покровский А.В.* Теоремы о среднем для решений линейных дифференциальных уравнений с частными производными // Мат. заметки. 1998. Т. 64. № 2. С. 260-272.

2. *Покровский А.В.* Локальные аппроксимации решениями гипоэллиптических уравнений и устранимые особенности // Доклады РАН. 1999. Т. 367. № 1, С. 15-17.

3. *Покровский А.В.* Об устранимых особенностях решений однородных эллиптических уравнений в классах Никольского–Бесова // Доклады РАН. 2001. Т. 380. № 2. С. 168-171.

4. *Покровский А.В.* Устранимые особенности решений эллиптических уравнений второго порядка // Доповіді НАН України. 2004. № 11. С. 38-42.

5. *Покровский А.В.* Устранимые особенности решений эллиптических уравнений // Труды Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. 2005. Т 30. (Теория функций, ее приложения и смежные вопросы. Материалы Седьмой международной Казанской летней школы-конференции.) С. 128-132.

6. *Покровский А.В.* Классы функций, определяемые с помощью локальных приближений решениями гипоэллиптических уравнений // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 2. С. 394-413.

7. *Покровский А.В.* Обобщение теоремы И. И. Привалова об эквивалентном определении гармонической функции // Збірник праць Інституту математики НАН України. 2006. Т. 3, № 4. С. 411-415.

8. *Покровский А.В.* Устранимые особенности решений эллиптических уравнений // Современная математика и ее приложения. 2007. Т. 57. (Труды международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Суздаль, 2006.) С. 54-72.

9. *Покровский А.В.* Устранимые особенности решений полуэллиптических уравнений // Дифф. уравнения. 2009. Т. 45. № 2. С. 203-210.