Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 519.2

Шапошников Станислав Валерьевич

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ МЕР

01.01.01 — математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2009

Работа выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор В.И. Богачев.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор В.А. Кондратьев, МГУ имени М.В. Ломоносова, доктор физико-математических наук А.В. Колесников, МГУПеч

Ведущая организация: Математический институт РАН им. В.А. Стеклова

Защита диссертации состоится "27 февраля" 2009 года в 16 часов 40 минут на заседании диссертационного совета Д.501.001.85 при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16–24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан "23 января" 2009 г.

Ученый секретарь диссертационного совета Д.501.001.85 при МГУ, доктор физико-математических наук, профессор

И.Н. Сергеев

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Хорошо известно, что инвариантная вероятностная мера μ диффузионного процесса с генератором

$$\mathbb{L} := \sum_{i,j=1}^{d} a^{ij}(x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} + \sum_{i=1}^{d} b^i(x)\partial_{x_i}$$

при широких условиях на коэффициенты a^{ij} и b^i удовлетворяет стационарному уравнению А.Н. Колмогорова

$$\mathbb{L}^*\mu = 0, \tag{1}$$

которое понимается в смысле интегрального тождества

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{L}u\, d\mu = 0 \ \text{ для всех } u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d). \tag{2}$$

Здесь функции b^i являются компонентами борелевского векторного поля $b = (b^i)$, a^{ij} – борелевские функции. Далее предполагается, что матрица $A(x) = (a^{ij}(x))_{i,j\le d}$ симметрична и положительна. Впервые это уравнение для инвариантных мер появилось в работе А.Н. Колмогорова[1], который рассматривал диффузионные процессы в компактном многообразии (современное изложение см. в книге[2]). В компактном случае всегда существует инвариантная вероятностная мера. В случае всего пространства $\mathbb{R}^d$ требуются дополнительные условия. Просто формулируемые достаточные условия весьма общего вида были предложены Р.З. Хасьминским[3]. В теории эллиптических уравнений решения уравнения (1) для функций (т.е. фактически для плотностей мер μ) изучались

[1] Колмогоров А.Н. *Об аналитических методах в теории вероятностей.* Успехи мат. наук, 1938, т. V, с. 5-41.

[2] Ватанабэ С., Икэда Н. *Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы.* Мир, М., 1986.

[3] Хасьминский Р.З. *Эргодические свойства рекуррентных диффузионных процессов и стабилизация решения задачи Коши для параболических уравнений.* Теория вероятн. и ее примен., 1960, т. 5, с. 179-196.

под названием „сопряженных решений”, см. работы[4,5]. Такие решения существенно отличаются по своим свойствам от решений обычных дивергентных или недивергентных эллиптических уравнений. Например, даже в одномерном случае с гельдеровыми коэффициентами решение может быть лишь гельдеровым и не иметь первой производной. В последние 15 лет уравнения $\mathbb{L}^*\mu = 0$ активно исследовались В.И. Богачевым, Н.В. Крыловым, М. Рёкнером, В. Штаннатом, G. Metafune, D. Pallara, A. Rhandi (см. работы[6,7,8,9,10,11,12,13,14,15]).

Уравнение (1) позволяет исследовать диффузионные процессы с сингулярными коэффициентами. Как было установлено В. Штаннатом[13,14], изучение этого уравнения без каких-либо предположений о существовании диффузионного процесса с производящим оператором $\mathbb{L}$ оказывается полезным для построения такого процесса. Таким образом, вероятностные решения уравнения $\mathbb{L}^*\mu = 0$ являются исходным пунктом построения и исследования диффузионного процесса, особенно в случаях сингулярных коэффициентов. Кроме того, такие уравнения появляются при

[4]Sjögren P. *On the adjoint of an elliptic linear differential operator and its potential theory.* Ark. Mat., 1973, v. 11, p. 153–165.

[5]Escauriaza E., Kenig C.E. *Area integral estimates for solutions and normalized adjoint solutions to nondivergence form elliptic equations.* Ark. Mat., 1993, v. 31, p. 275–296.

[6]Bogachev V.I., Röckner M. *Regularity of invariant measures on finite and infinite dimensional spaces and applications.* J. Funct. Anal., 1995, v. 133, p. 168–223.

[7]Bogachev V.I., Krylov N.V., Röckner M. *Regularity of invariant measures: the case of non-constant diffusion part.* J. Funct. Anal., 1996, v. 138, p. 223–242.

[8]Богачев В.И., Рёкнер М. *Обобщение теоремы Хасьминского об инвариантных мерах.* Теория вероятн. и ее примен., 2000, т. 45, n 3, с. 363–378.

[9]Bogachev V.I., Krylov N.V., Röckner M. *On regularity of transition probabilities and invariant measures of singular diffusions under minimal conditions.* Comm. Partial Diff. Equations, 2001, v. 26, n 11–12, p. 2037–2080.

[10]Bogachev V.I., Röckner M. *Elliptic equations for measures on infinite-dimensional spaces and applications.* Probab. Theory Relat. Fields, 2001, v. 120, n 4, p. 445–496.

[11]Богачев В.И., Рекнер М., Штаннат В. *Единственность решений эллиптических уравнений и единственность инвариантных мер диффузий.* Матем. сб., 2002, т. 197, n 7, с. 3–36.

[12]Bogachev V.I., Krylov N.V., Röckner M. *Elliptic equations for measures: regularity and global bounds of densities.* J. Math. Pures Appl., 2006, v. 85, n 6, 743–757.

[13]Stannat W. *(Nonsymmetric) Dirichlet operators on L^1: existence, uniqueness and associated Markov processes.* Annali Scuola Normale Super. di Pisa Cl. Sci. (4), 1999, v. 28, n 1, p. 99–140.

[14]Stannat W. *Time-dependent diffusion operators on L^1.* J. Evol. Equat., 2004, v. 4, p. 463–495.

[15]Metafune G., Pallara D., Rhandi A. *Global regularity of invariant measures.* J. Funct. Anal., 2005, v. 223, p. 396–424.

исследовании бесконечномерных диффузий как уравнения на конечномерные проекции инвариантных мер (см.[6,10]). При этом коэффициент b оказывается очень сингулярным, и единственное, что можно утверждать о нем – интегрируемость относительно решения. Сингулярность коэффициентов делает неприменимыми классические результаты из теории эллиптических уравнений в частных производных.

Достаточные условия существования решения уравнения $\mathbb{L}^*\mu = 0$ получены в работах Р.З. Хасьминского, В.И. Богачева и М. Рёкнера (см.[3,8]). При построении решения существенную роль играет априорная оценка $W^{1,q}$-нормы решения эллиптического уравнения второго порядка на внутренней области $\Omega' \subset \Omega$ через правую часть уравнения и L^1-норму решения на большей области Ω. Такая оценка доказывается в первой главе диссертации.

Единственность решения исследовалась В.И. Богачевым, М. Рёкнером, В. Штаннатом[11]. Ими были получены достаточные условия единственности, изучена взаимосвязь единственности решения уравнения и единственности инвариантной меры у соответствующей полугруппы, построен пример уравнения с единичной матрицей A и гладким коэффициентом b, которое имеет по крайней мере два вероятностных решения. Однако оставалось неясным, при каких условиях появляется неединственность в случае гладких коэффициентов и какова может быть размерность симплекса вероятностных решений. Отметим также, что единственность и неединственность решений задач, связанных с эллиптическими уравнениями, исследовались О.А. Ладыженской[16], Н.С. Надирашвили[17], М.В. Сафоновым[18], В.В. Жиковым[19,20].

Важные результаты о регулярности решения получены В.И. Бо-

[16] Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.* Наука, М., 1973.

[17] Nadirashvili N. S.*Nonuniqueness in the martingale problem and Dirichlet problem for uniformly elliptic operators.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), 1997, v. 24, p. 537-550.

[18] Safonov M. *Nonuniqueness for second order elliptic equations with measurable coefficients.* SIAM J. Math. Anal., 1999, v. 30, p. 879–895.

[19] Жиков В.В. *Замечания о единственности решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка с младшими членами.* Функц. анализ и его прил., 2004, т. 38, вып. 3, с. 15–28.

[20] Жиков В.В. *О весовых соболевских пространствах.* Матем. сб., 1998, т. 189, n 8, с. 27–58.

гачевым, М. Рёкнером и Н.В. Крыловым[9]. В частности, ими было установлено, что если отображения A и A^{-1} равномерно ограничены, $a^{ij} \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^d)$ и $b^i \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^d)$ или $b^i \in L^p_{loc}(\mu)$ для некоторого $p > d$, то решение μ задается плотностью $\varrho \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^d)$ относительно меры Лебега. Более того, если $b^i \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^d)$, то непрерывная версия ϱ является строго положительной функцией, что немедленно следует из неравенства Харнака (см.[21,22]) для слабых решений эллиптических уравнений. В последнем утверждении даже при единичной матрице A нельзя заменить условие $b^i \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^d)$ на условие $b^i \in L^p_{loc}(\mu)$ или даже на более сильное условие $b^i \in L^r_{loc}(\mu)$ для всех $r \geq 1$. Необходимость иметь условия строгой положительности в терминах интегрируемости сноса b относительно меры μ, а не меры Лебега, появляется при исследовании уравнений вида (1) как уравнений на конечномерные проекции решений слабых эллиптических уравнений для мер в бесконечномерных пространствах (см.[6,10]).

Глобальные свойства решений исследовались в работах[6,7,15,12]. В частности, было доказано, что если отображения A и A^{-1} равномерно ограниченны, отображение A равномерно липшицево и при некотором $p > d$ имеет место включение $|b| \in L^p(\mu)$, то $\mu = \varrho\, dx$, $\varrho \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ и потому $\varrho \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Более того, если задана положительная функция $\Phi \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^d)$ такая, что имеют место включения $\Phi, |\nabla\Phi|^p \in L^1(\mu)$, то выполняется оценка

$$\varrho(x) \leq C\Phi(x)^{-1}.$$

Отметим, что при получении этих результатов применялась техника Мозера. В работе[15] были получены экспоненциальные оценки снизу

$$\varrho(x) \geq C_1 \exp\bigl(-C_2|x|^{\beta+1}\bigr)$$

в предположении, что $a^{ij} \in C^3_b(\mathbb{R}^d)$, $b^i \in C^2(\mathbb{R}^d)$

$$|b^i(x)| + |\partial_{x_k} b^i(x)| + |\partial_{x_k}\partial_{x_l} b^i(x)| \leq C(1 + |x|^\beta).$$

---

[21] Moser J. *On Harnack's theorem for elliptic differential equations.* Comm. Pure and Appl. Math., 1961, v. 14, p. 577-591.

[22] Trudinger N. S. *On Harnack type inequalities and their application to quasilinear elliptic equations.* Comm. Pure and Appl. Math., 1967, v. 20, 721-748.

Кроме того, при таких же требованиях на коэффициенты были получены достаточные условия наличия у меры μ плотности ϱ, для которой $\ln \varrho$ входит в класс $W^{1,p}(\mu)$. Исследовано также включение $\ln \varrho \in W^{2,p}(\mu)$. Естественным является вопрос о том, можно ли отказаться в этих утверждениях от столь высокой гладкости коэффициентов.

Цель работы. Получить достаточные условия неединственности вероятностных решений эллиптических уравнений для мер с единичной матрицей диффузии и гладким сносом. Исследовать размерность симплекса вероятностных решений. Найти достаточные условия для строгой положительности непрерывной версии плотности решения в терминах интегрируемости сноса относительно решения. Получить оценки снизу на плотность решения без предположений о дифференцируемости сноса. Исследовать интегрируемость логарифмического градиента решения.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Для плотности ϱ решения уравнения $\mathbb{L}^*\mu = 0$ получена оценка

$$\varrho(x) \geq C_1 \exp\bigl(-C_2|x|^{\beta+1}\bigr)$$

в предположении, что коэффициент диффузии A равномерно ограничен вместе с A^{-1}, отображение A равномерно липшицево и функция $|b(x)|$ имеет мажоранту $C(1+|x|^\beta)$. В качестве применения найдены эффективные достаточные условия для включения $|\nabla\varrho/\varrho|$ в класс $L^p(\mu)$.

2. Получены достаточные условия существования двух и более линейно независимых вероятностных решений уравнения $\mathbb{L}^*\mu = 0$ с единичной матрицей диффузии и гладким сносом b в предположении, что одно вероятностное решение уже известно. Кроме того, построен пример такого уравнения для мер, симплекс вероятностных решений которого бесконечномерен.

3. Доказано, что если A и A^{-1} равномерно ограничены, A равномерно липшицево, то экспоненциальная интегрируемость сноса b^i относительно решения μ уравнения $\mathbb{L}^*\mu = 0$ влечет существование у меры μ непрерывной строго положительной плотности относительно меры Лебега.

Методы исследования. В работе используются методы теории дифференциальных уравнений с частными производными, в том числе метод априорных оценок и итерационная техника Мозера, методы теории меры и функционального анализа.

Теоретическая и практическая ценность. Работа имеет теоретический характер. Ее результаты и методы могут быть использованы в теории эллиптических уравнений, теории случайных процессов, теории меры и функциональном анализе.

Апробация диссертации. Результаты диссертации неоднократно докладывались на семинаре „Бесконечномерный анализ и стохастика" под руководством В.И. Богачева и Н.А. Толмачева (2005–2008); на научно-исследовательском семинаре по теории функций под руководством член-корр. РАН Б.С. Кашина (2007), на семинаре „Стохастический анализ" в университете Билефельда (Германия, 2005–2008); на семинаре в Пекинском Нормальном Университете (Китай, 2007); на семинаре в институте Миттаг-Леффлера (Швеция, 2007). Кроме того, результаты диссертации докладывались на международной конференции им. И.Г. Петровского „Дифференциальные уравнения и смежные вопросы" (Москва, МГУ, 2007), российско-японской конференции по теории вероятностей (МИАН, 2007) и на международных конференциях „Stochastic Analysis of the Advanced Statistical Models" и „Recent Developments in Statistics and Econometrics" (Япония, 2008).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 5 статьях автора в ведущих научных журналах, рекомендованных ВАК, и тезисах международной конференции им. И.Г. Петровского „Дифференциальные уравнения и смежные вопросы", список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, каждая из которых включает три параграфа, и списка литературы из 48 наименований. Общий объем диссертации составляет 75 страниц.

Краткое содержание диссертации

Глава 1.

Первая глава диссертации посвящена априорным оценкам решений эллиптических уравнений второго порядка и их применению к эллиптическим уравнениям для мер.

1. В первом параграфе изучаются решения $u \in W^{1,q}(\Omega)$ эллиптического уравнения

$$\partial_{x_i}(a^{ij}\partial_{x_j}u + b^i u) - c^i\partial_{x_i}u - gu = f - \partial_{x_i}e^i \tag{3}$$

на ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, причем $q \geq 2$. Уравнение (3) понимается в смысле интегрального тождества

$$\int_\Omega \partial_{x_i}\varphi(a^{ij}\partial_{x_j}u + b^i u + e^i) + \varphi(c^i\partial_{x_i}u + gu + f)\,dx = 0$$

для каждой функции $\varphi \in C_0^1(\Omega)$, где ведется суммирование по повторяющимся индексам. Для коэффициентов $A = (a^{ij}), b, c$ и g уравнения (3) выполняются следующие условия H(q):

(a) $A \in C^{0,\delta}(\Omega)$, $a^{ij} = a^{j\,i}$ и существуют такая константа $\alpha > 0$, что $A(x) \geq \alpha I$ для всякого $x \in \Omega$,

(b) $b, c \in L^d(\Omega)$ и $g \in L^{d/2}(\Omega)$ при $2 \leq q < d$,

(c) $b, c \in L^s(\Omega)$ и $g \in L^{s/2}(\Omega)$ для некоторого $s > d$ при $2 \leq q = d$,

(d) $b, c \in L^q(\Omega)$, $g \in L^{dq/(d+q)}(\Omega)$ при $q > d$.

Наша цель – получить оценку $W^{1,q}$-нормы решения уравнения (3) на внутренней области $\Omega' \subset \Omega$ через нормы функций e, f и L^1-норму решения на большей области Ω. Эта оценка является уточнением результата, который был сформулирован Морри[23].

Через $W^{1,q}(\Omega)$ обозначим соболевское пространство функций, которые принадлежат $L^q(\Omega)$ вместе с их обобщенными частными производными первого порядка. Это пространство наделяется стандартной нор-

[23] Morrey C.B. *Multiple integrals in the calculus of variations.* Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 1966.

мой

$$\|f\|_{W^{q,1}(\Omega)} := \|f\|_{q,1} := \|f\|_{L^q(\Omega)} + \|\nabla f\|_{L^q(\Omega)},$$

где $\|\cdot\|_{L^q(\Omega)} = \|\cdot\|_q$ обозначает $L^q(\Omega)$-норму скалярных или векторных функций. Пусть $C^{0,\delta}(\Omega)$ – пространство всех функций (возможно, векторных или матричных) на Ω, являющихся гёльдеровыми порядка δ. Для матричнозначного отображения A на Ω положим

$$\|A(x)\| = \sup_{|y|\le 1} |A(x)y|,$$

$$\|A\|_{C^{0,\delta}} := \sup_{x\in\Omega} \|A(x)\| + \sup_{x,y\in\Omega} \|A(x) - A(y)\|/|x-y|^\delta.$$

Положим $\Theta_{\tau,v}(r) = \sup\limits_{x\in\Omega}\Bigl(\int\limits_{U(x,r)\cap\Omega} |v(y)|^\tau\, dy\Bigr)^{1/\tau}$, $\tau \ge 1$, $r > 0$, $v \in L^\tau(\Omega)$. Через $U(x,r)$ обозначим шар с центром x и радиусом r, а через $|U(x,r)|$ его объем.

Теорема 1. *Предположим, что $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ – ограниченная область и для коэффициентов A, b, c и g уравнения* (3) *выполняются условия* H(q), *причем $q \ge 2$. Пусть $e \in L^q(\Omega)$ и $f \in L^p(\Omega)$, где $p = dq/(d+q)$ при $q \ne d$ и $p > d/2$ при $q = d$. Тогда, если функция $u \in W^{1,q}(\Omega)$ является решением уравнения* (3) *на Ω, то для всякой области Ω' с замыканием в Ω выполняется оценка*

$$\|u\|_{W^{1,q}(\Omega')} \le C\bigl(\|u\|_{L^1(\Omega)} + \|e\|_{L^q(\Omega)} + \|f\|_{L^p(\Omega)}\bigr),$$

где константа C зависит от $\Omega, \Omega', d, \alpha, q$, $\|A\|_{C^{0,\delta}}$ и от величин $\Theta_{d,b}$, $\Theta_{d,c}$, $\Theta_{d/2,g}$ при $2 \le q < d$, от числа s и норм $\|b\|_{L^s}$, $\|c\|_{L^s}$, $\|g\|_{L^{s/2}}$ при $q = d$ и норм $\|b\|_{L^q}$, $\|c\|_{L_q}$, $\|g\|_{L^{dq/(d+q)}}$ при $q > d$.

2. Во втором параграфе уточняется зависимость константы в неравенстве Харнака[21,22] от коэффициентов эллиптического уравнения.

Предположим, что неотрицательная функция $u \in W^{1,2}(\Omega)$ удовлетворяет уравнению $\partial_{x_i}(a^{ij}\partial_{x_j}u - b^i u) = 0$, т.е. для всякой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ выполняется равенство

$$\int_\Omega \partial_{x_i}\varphi(a^{ij}\partial_{x_j}u - b^i u)\, dx = 0.$$

Будем предполагать, что существуют постоянные $\gamma \geq 0$ и $\alpha > 0$ такие, что $\sum\limits_{i,j} |a^{i,j}(x)|^2 \leq \gamma^2$ и $A(x) \geq \alpha \cdot I$ для всех $x \in \Omega$. Пусть, кроме того, отображение $b\colon\ \Omega \to \mathbb{R}^d$ измеримо и

$$\sup_{x\in\Omega} |b(x)| \leq B < \infty.$$

При указанных условиях функция u имеет локально гельдерову версию, в частности, эта версия локально ограничена на Ω.

Теорема 2. *Предположим, что $\theta = 1 + 4\delta$, где $0 < \delta \leq 3$. Если $U(y, \theta R) \subset \Omega$, то выполнено следующее неравенство для непрерывной версии функции u:*

$$\sup_{x\in U(y,R)} u(x) \leq C \inf_{x\in U(y,R)} u(x), \tag{4}$$

где

$$C = \exp\bigl\{c(d)\delta^{-1}\bigl(\gamma\alpha^{-1} + B\alpha^{-1}R\bigr)\bigr\},$$

причем число $c(d)$ зависит лишь от d.

3. С использованием неравенства Харнака здесь выведены нижние оценки для плотности ϱ решения эллиптического уравнения для мер. С помощью этих оценок получены достаточные условия для включения $|\nabla\varrho/\varrho| \in L^p(\mu)$ для всех $p > 1$. Рассмотрим уравнение

$$\mathbb{L}^*\mu = 0, \tag{5}$$

где $\mathbb{L} = \partial_{x_i}(a^{ij}\partial_{x_j}) + b^i\partial_{x_i}$, $A = (a^{ij})_{i,j\leq d}$ – борелевское отображение со значениями в пространстве положительных симметричных матриц, $a^{ij} \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^d)$, $b = (b^i)$ – борелевское векторное поле. По определению, локально конечная борелевская мера μ на $\mathbb{R}^d$ является решением уравнения (5), если функции a^{ij}, $\partial_{x_i}a^{ij}$ и b^i интегрируемы на каждом компактном множестве относительно меры μ и выполняется равенство

$$\int_{\mathbb{R}^d} \bigl[a^{ij}\partial_{x_i}\partial x_j\varphi + \partial_{x_i}a^{ij}\partial_{x_j}\varphi + b^j\partial_{x_j}\varphi\bigr]\, d\mu = 0$$

для всякого $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Если $a^{ij} \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^d)$, то уравнение (1) с оператором $\mathbb{L} = a^{ij}\partial_{x_i}\partial_{x_j} + b^i\partial_{x_i}$ сводится к уравнению (5) с оператором $\mathbb{L} = \partial_{x_i}(a^{ij}\partial_{x_j}) + b^i\partial_{x_i}$ заменой коэффициента b^j на $b^j + \partial_{x_i}a^{ij}$.

Пусть неотрицательная локально конечная борелевская мера μ удовлетворяет уравнению (5), причем, функции $\|A(x)\|$ и $\|A(x)^{-1}\|$ локально ограничены, $a^{ij} \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^d)$, для некоторого $p > d$, коэффициент $b = (b^i)$ – локально ограниченное векторное поле.

Согласно доказанному в работе[9], при указанных условиях на коэффициенты A и b мера μ задается плотностью $\varrho \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^d)$ относительно меры Лебега. В частности, функция ϱ обладает непрерывной версией. Поэтому уравнение (5) в точности означает, что плотность ϱ является слабым решением в классическом смысле уравнения

$$\partial_{x_i}(a^{ij}\partial_{x_j}\varrho - b^i\varrho) = 0.$$

Пусть W – непрерывная положительная возрастающая функция на полуоси $[0, \infty)$.

Следующий результат дает нижнюю оценку решений.

Теорема 3. *Пусть $|b(x)| \leq W(|x|/\theta)$, где $\theta > 1$, и пусть*

$$\alpha(r) = \sup_{|x|\leq r} \|A(x)^{-1}\|, \quad \gamma(r) = \sup_{|x|\leq r} \|A(x)\|.$$

Тогда существует такое положительное число $K = K(d)$, зависящее только от d, что непрерывная версия функции ϱ удовлетворяет неравенству

$$\varrho(x) \geq \varrho(0)\exp\bigl\{-K(d)(\theta-1)^{-1}\alpha(\theta|x|)^{-1}\bigl(\gamma(\theta|x|) + V(|x|)|x|\bigr)\bigr\}.$$

В частности, если $\|A(x)\| \leq \gamma$ и $\|A(x)^{-1}\| \leq \alpha$, то существует такое положительное число $K = K(d, \alpha, \gamma, \theta)$, что непрерывная версия функции ϱ удовлетворяет неравенству

$$\varrho(x) \geq \varrho(0)\exp\bigl\{-K\bigl(1 + V(|x|)|x|\bigr)\bigr\}.$$

С помощью полученных оценок можно указать эффективно проверяемые условия принадлежности к $L^p(\mu)$ логарифмического градиента

$\nabla\varrho/\varrho$ меры μ. В случае $p=2$ простые достаточные условия получены в работе[6]. Первый общий результат для $p>2$ недавно установлен в работе[15]. Найденное ниже условие усиливает этот результат, поскольку мы не требуем дифференцируемости коэффициента сноса и используем меньшую регулярность коэффициента диффузии (в работе[15] предполагается, что $a^{ij}\in C^3(\mathbb{R}^d)$ и $b\in C^2(\mathbb{R}^d)$). Пусть $L^p(\mu)$ – пространство всех измеримых функций, которые интегрируемы в степени p относительно меры μ с непрерывной положительной плотностью на $\mathbb{R}^d$. Обозначим через $W^{p,1}(\mu)$ соболевское пространство функций, которые принадлежат пространству $L^p(\mu)$ вместе с их обобщенными частными производными первого порядка.

В следующей теореме мы предполагаем, что μ – вероятностная мера на $\mathbb{R}^d$, удовлетворяющая уравнению (5).

Теорема 4. *Пусть* $a^{ij}\in C^{0,\delta}(\mathbb{R}^d)\cap W^{p_0,1}_{loc}(\mathbb{R}^d)$, $\alpha\cdot I\le A\le\Lambda\cdot I$, *где* $p_0>d$ *и* $\alpha,\Lambda,\delta>0$, *причем* $\lim\limits_{r\to0}\sup_x\|\partial_{x_i}a^{ij}\|_{L^d(U(x,r))}=0$ *(последнее условие выполнено, если* A *липшицево). Пусть также положительная функция* $\Phi\in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^1)$ *возрастает на* $[0,+\infty)$, $\Phi(N+1)\le C\Phi(N)^{1+\varepsilon}$ *при некоторых* $C,\varepsilon>0$ *и функции* $\Phi(|x|)$ *и* $\Phi'(|x|)^{p_1}$ *с некоторым* $p_1>d$ *интегрируемы по мере* μ *на* $\mathbb{R}^d$. *Предположим, что даны числа* $C_0>0$, $\theta>1$, $p>1$ *и* $\gamma\in[0,1/d)$, *для которых*

$$|b(x)|\le C_0\Phi(|x|-\theta)^\gamma,\quad |\nabla a^{ij}(x)|^d\le C_0\Phi(|x|),$$

$$\sum_{N=1}^{\infty}N^{d-1}\Phi(N)^{-q}<\infty,\quad \text{где } q:=1-\gamma(p+\varepsilon d)>0.$$

Тогда μ *имеет плотность* ϱ, *для которой* $\ln\varrho\in W^{p,1}(\mu)$.

Глава 2.

Вторая глава посвящена вопросам единственности и неединственности решений эллиптического уравнения

$$\mathbb{L}^*\mu=0 \tag{6}$$

с оператором $\mathbb{L}$ вида $\mathbb{L}u(x)=\Delta u(x)+(b(x),\nabla u(x))$, где $b=(b^i)$ – борелевское векторное поле на $\mathbb{R}^d$, причем $b^i\in C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Так же, как и выше, уравнение понимается в смысле интегрального тождества

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{L}u\, d\mu = 0 \quad \text{для всякой функции} \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d).$$

1. В первом параграфе дается краткий обзор ранее полученных в этом направлении результатов и приводятся некоторые результаты о гладкости решений, полученные в работе[9].

2. Во втором параграфе приводятся достаточные условия существования двух и более линейно независимых вероятностных решений уравнения (6) в предположении, что одно вероятностное решение уже известно. Пусть уравнение (6) имеет вероятностное решение $\mu = \varrho\, dx$. Тогда $\varrho \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ и для всякого шара $U \subset \mathbb{R}^d$ существует такая константа $C(U) > 0$, что $\varrho(x) \geq C(U)$ для всякого $x \in U$. Более того, существует такое векторное поле $a \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, что $\operatorname{div} a = 0$ и коэффициент b представляется в следующем виде:

$$b = \frac{\nabla \varrho}{\varrho} + \frac{a}{\varrho}. \tag{7}$$

Будем искать еще одно решение уравнения (6) в виде $\nu = v\mu$. Заметим, что мера $\nu = v\mu$ удовлетворяет уравнению (6) тогда и только тогда, когда функция v удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{L}_\mu v := \operatorname{div}\bigl(\varrho \nabla v - av\bigr) = 0. \tag{8}$$

Определим на $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ билинейную кососимметрическую форму

$$[f, g] := \int_{\mathbb{R}^d} (a, \nabla f) g\, dx.$$

Обозначим через $C_b^2(\Omega)$ пространство всех ограниченных непрерывных функций на Ω, имеющих ограниченные и непрерывные производные первого и второго порядков.

Следующая теорема дает достаточные условия для существования отличного от константы ограниченного положительного решения уравнения (8).

Теорема 2. *Предположим, что существует функция* $\varphi \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$ *такая, что* $(a, \nabla\varphi) \in L^1(\mathbb{R}^d)$,

$$[\varphi, 1] = 0 \quad \text{и} \quad [\varphi, \varphi] < 0.$$

Тогда существует ограниченное положительное решение уравнения (8), *отличное от константы.*

Для того, чтобы привести пример уравнения (6), имеющего по крайней мере два различных вероятностных решения, достаточно указать векторное поле a и функцию φ, удовлетворяющие условиям теоремы 2. При этом для получения коэффициента b надо задать плотность ϱ одного из решений и применить формулу (7).

3. Третий параграф посвящен линейной зависимости решений. Зафиксируем a и для различных функций φ_1 и φ_2, удовлетворяющих условиям теоремы 2, построим согласно этой теореме решения v_1 и v_2. Теорема 2 гарантирует, что $1, v_1$ и $1, v_2$ – пары линейно независимых функции. При каком условии на φ_1 и φ_2 можно утверждать, что функции 1, v_1 и v_2 линейно независимы? Следующая теорема, в частности, отвечает и на этот вопрос.

Теорема 3. *Пусть* $n \geq 1$. *Предположим, что существуют такие функции* φ_1, φ_2, $\ldots$, φ_{n+1} *класса* $C_b^2(\mathbb{R}^d)$, *что для каждой из них выполнены условия теоремы* 2, *и* v_1, v_2, $\ldots$, v_{n+1} – *решения уравнения* (8), *построенные при помощи этих функций согласно теореме* 2. *Предположим также, что функции* 1, v_1, $\ldots$, v_n *линейно независимы и для всех* $\alpha = (\alpha_k)_{1\leq k\leq n}$ *имеет место неравенство*

$$[\varphi_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\varphi_k, \varphi_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\varphi_k] < 0. \tag{9}$$

Тогда функции $1, v_1, \ldots, v_n$ *и* v_{n+1} *линейно независимы.*

С помощью этой теоремы строятся примеры, в которых симплекс вероятностных решений бесконечномерен. Однако остается открытым вопрос о существовании уравнений с конечномерным симплексом вероятностных решений размерности более 1.

Глава 3.

В третьей главе получено достаточное условие строгой положительности плотности решения эллиптического уравнения $\mathbb{L}^*\mu = 0$ с оператором

$$\mathbb{L}u = \partial_{x_i}\big(a^{ij}\partial_{x_j}u\big) + b^i\partial_{x_i}u.$$

Здесь уравнение $\mathbb{L}^*\mu = 0$ понимается в том же смысле, что и уравнение (5) в главе 2.

Предположим, что матрица $A(x) = (a^{ij}(x))_{1\le i,j\le d}$ удовлетворяет следующим условиям:

(C1) при некотором $p > d$ функции a^{ij} входят в класс $W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^d)$,

(C2) существуют такие постоянные $m, M > 0$, что для всех $x \in \mathbb{R}^d$ имеем $mI \le A(x) \le MI$, где I – единичная матрица.

Известно[9], что если выполнены условия (C1), (C2) и $b^i \in L^p_{loc}(\mu)$, то мера μ имеет вид $\mu = \varrho\, dx$, где $\varrho \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^d)$. В частности, плотность ϱ имеет непрерывную версию. Известно также (см.[9], следствие 2.10), что при выполнении условий (C1), (C2) и включении $b^i \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^d)$ с некоторым $p > d$ непрерывная версия плотности ϱ строго положительна. В последнем утверждении условие интегрируемости b^i в степени $p > d$ относительно меры Лебега нельзя заменить на интегрируемость b^i в какой-либо степени относительно меры μ. Оказывается, интегрируемость b в степени $p > d$ относительно меры Лебега можно заменить условием

(C3) $\quad \exp(\delta|b|) \in L^1_{loc}(\mu)$, где δ – некоторое положительное число.

В этом и состоит основной результат третьей главы.

1. В первом параграфе этой главы доказываются вспомогательные априорные оценки.

2. Второй параграф посвящен доказательству основной теоремы. Здесь доказывается, что для каждого шара $U \subset \mathbb{R}^d$ существует такая постоянная $C > 0$, что $\varrho(x) \ge C$ для почти всех $x \in U$. Идея состоит в том, чтобы с помощью полученной выше априорной оценки установить локальную интегрируемость $|\ln \varrho|^\alpha$ при некотором $\alpha > 0$, а затем применить итерационную технику Мозера аналогично тому, как это делается

при доказательстве неравенства Харнака для решений эллиптических уравнений (см.[21,22]). Пусть $U(x_0, R)$ – шар радиуса R с центром в x_0.

Теорема 1. *Пусть* $\mu = \varrho\, dx$ *– решение уравнения* (5)*, где коэффициенты* a^{ij}, b^i *удовлетворяют условиям* (C1)*,* (C2) *и* (C3)*. Пусть также*

$$\operatorname{esssup}_{x\in U(x_0,R)}\varrho(x) > 0.$$

Тогда $|\ln\varrho| \in L^\infty(U(x_0, R))$.

Следствие 1. *Пусть* $\mu = \varrho\, dx$ *– решение уравнения* (5)*, где коэффициенты* a^{ij}, b^i *удовлетворяют условиям* (C1)*,* (C2) *и* (C3)*. Пусть* $\operatorname{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^d} \varrho > 0$*. Тогда существует строго положительная непрерывная версия плотности* ϱ*.*

В случае $d = 1$, $A = I$, $b = \varrho'/\varrho$ и $\mu = \varrho\, dx$ задача о существовании непрерывной строго положительной версии ϱ изучалась в работах[24,25].

3. В заключительном параграфе третьей главы приводятся примеры применения теоремы 1 и следствия 1 к исследованию уравнений для мер в бесконечномерных пространствах. Полученные результаты позволяют устанавливать наличие строго положительных непрерывных плотностей конечномерных проекций стационарных распределений и переходных вероятностей бесконечномерных диффузий. Отметим, что аналогичная задача для проекций инвариантных мер стохастических уравнений изучалась в работах[26,27].

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору В.И. Богачеву за постановку задач и постоянное внимание к работе.

---

[24] Scheutzow M., Weizsäcker H. von. *Which moments of a logarithmic derivative imply quasiinvariance?* Doc. Math., 1998, v. 3, p. 261–272.

[25] Nualart E. *Exponential divergence estimates and heat kernal tail.* C. R. Acad. Sci. Paris, 2004, ser. I, v. 338, p. 77-80.

[26] Agrachev A., Kuksin S., Sarychev A., Shirikyan A. *On finite-dimensional projections of distributions for solutions of randomly forced PDE's.* Ann. Inst. H. Poincaré, 2007, v. 43, p. 399–415.

[27] Shirikyan A. *Qualitative properties of stationary measures of three-dimensional Navier-Stokes equations.* J. Funct. Anal., 2007, v. 249, p. 284–306.

Работы автора по теме диссертации

[1] Шапошников С.В. Положительность инвариантных мер диффузионных процессов. Докл. РАН, 2007, т. 415, n 2, с. 174–179.

[2] Шапошников С.В. О неединственности решений эллиптических уравнений для вероятностных мер. Докл. РАН, 2008, т. 420, n 3, с. 320–323.

[3] Shaposhnikov S.V. On nonuniqueness of solutions to elliptic equations for probability measures. J. Funct. Anal., 2008, v. 254, p. 2690–2705.

[4] Шапошников С.В. О внутренних оценках соболевских норм решений эллиптических уравнений. Матем. заметки, 2008, т. 83, n 2, с. 316–320.

[5] Богачев В.И., Рёкнер М., Шапошников С.В. Оценки плотностей стационарных распределений и переходных вероятностей диффузионных процессов. Теория вероятн. и ее примен., 2007, т. 52, n 2, с. 1–29. (С.В. Шапошникову принадлежат следствия 2.1, 3.1, 3.2, теоремы 2.1, 2.2, 2.5, 3.1, 3.2; В.И. Богачеву принадлежат общая постановка задач и следствие 2.1, пример 3.1, пример 3.2, предложение 3.1; М. Рёкнеру принадлежат теорема 3.3, следствие 3.3, следствие 3.4, пример 3.3, пример 3.4).

[6] Шапошников С.В. Оценки плотностей решений параболических уравнений для борелевских мер. Сборник тезисов международной конференции „Дифференциальные уравнения и смежные вопросы”, посвященной памяти И.Г. Петровского, Москва, МГУ, 2007, с. 287–288.