МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 517.956

НГУЕН МИНЬ ЧИ

ПОЛУЛИНЕЙНЫЕ ВЫРОЖДАЮЩИЕСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

01.01.02 Дифференциальные уравнения

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Москва 2008

Работа выполнена в Ханойском математическом институте Вьетнамской академии наук и технологии, Ханой, Вьетнам

Официальные оппоненты:	Академик РАН доктор физико-математических наук профессор Маслов Виктор Павлович Институт проблем механики им. А.Ю.Ишлинского РАН
	доктор физико-математических наук профессор Агранович Михаил Семенович Московский институт электроники и механики
	доктор физико-математических наук профессор Радкевич Евгений Владимирович МГУ имени М.В.Ломоносова
Ведущая организация:	Математический институт им. В.А.Стеклова РАН

Защита диссертации состоится 24 апреля 2009 года в 16ч. 40мин. на заседании диссертационного совета Д. 501.001.85 при Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, РФ, Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В.Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 20 марта 2009 года

Ученый секретарь диссертационного
совета Д. 501.001.85 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор И.Н.Сергеев

I. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации. С ранних исследований дифференциальных уравнений с частными производными, теория эллиптических уравнений играла важную роль. В первой половине прошлого века крупные результаты в теории линейных и нелинейных эллиптических уравнений были достигнуты в великолепных работах (см. обзорную статью [1]). Центральными задачами в теории эллиптических уравнений и эллиптических систем были качественные проблемы решений (в том числе, свойство дифференцируемости и аналитичности решений) и теория краевых задач. Многими свойствами эллиптических операторов обладают и широкие классы линейных вырождающихся эллиптических операторов, которые изучаются интенсивно с середины 50-60 годов до настоящего дня. Гладкость решений общих линейных уравнений хорошо описана в классах гипоэллиптических операторов. Хорошо известны необходимые и достаточные условия гипоэллиптичности операторов с постоянными коэффициентами. Для операторов с переменными коэффициентами известны только отдельные достаточные условия, позволяющие устанавливать гипоэллиптичность различных классов операторов. В работах Егорова [2] и Хёрмандера [3] был обнаружен очень важный подкласс гипоэллиптических операторов, а именно класс субэллиптических операторов, которые охватывают почти все гипоэллиптические операторы с простыми характеристиками. Важную роль в исследовании операторов с кратными характеристиками играют работы Хёрмандера [4], Грушина [5], Хелффера и Нурига [6], Джилиоли и Трева [7].

---

[1] H. Brezis, F. Browder, Adv. Math. **135** (1998), 76-144.

[2] Ю. В. Егоров, УМН, **2** (1975), 57-114, 57-104.

[3] L. Hörmander, Ann. Math. Studies, **91** (1979), 127-207.

[4] L. Hörmander, Acta Math., **119** (1967), 147-171.

Свойство аналитичности решений общих нелинейных эллиптических уравнений изучалось с начала двадцатого века. Эта проблема является одной из 23 знаменитых гипотез Гильберта. Она была решена Бернштейном для одного эллиптического уравнения второго порядка с двумя переменными. Затем к концу 50 годов многие математики, в том числе, Жеврей, Жиро, Радо, Леви, Петровский, Моррей, Фридман, развили этот результат до полной общности. Установлено, что решение эллиптической системы любого порядка с любым числом переменных аналитично, если правая часть аналитична. В последующих годах исследование в этом направлении сосредоточено на общие линейные уравнения. Обзор результатов по проблеме аналитичности содержится в статьях Волевича и Олейник [8], и Трева [9]. Общие краевые задачи для линейных эллиптических уравнений изучились в работах Бернштейна, Лебега, Шаудера, Вишика, Олейник, Шапиро, Лопатинского, Агмона, Дуглиса и Ниренберга, Браудера, Аграновича, Кальдерона, Лионса и Мадженеса. Краевые задачи для нелинейных эллиптических уравнений исследовались в работах Лерэ и Шаудера, Ниренберга, Гельфанда, Браудера, Похожаева, Лерэ и Лионса, Серрина, Ладыженской, Амбросетти и Рабиновича, Эванса, Брезиса и Ниренберга, Скрупника, Гильбарга и Трудингера. Однако, как видно из выше обзора, недостаточное внимание уделяется теории нелинейных вырождающихся эллиптических уравнений. Поэтому

---

[5] В. В. Грушин, Матем. сб., **84** (1971), 163-195.

[6] B. Helffer, J. Nourrigat, *Hypoellipticite Maximal pour des Operateurs Polynomes de Champ de Vecteur,* Birkhauser, (1985), 275 p.

[7] A. Gilioli, F. Treves, Amer. J. Math., **96** (1974), 367-385.

[8] Л. П. Волевич, О. А. Олейник, В кн. Избранные труды И. Г. Петровского, М.: Наука, 1986.

[9] F. Treves, В кн. Prog. Nonlinear Differential Equations Appl., **69**, Birkhauser Boston, 2006.

актуально продвинуть изучение в этом направлении.

Цель работы. Целью настоящей работы является построение теории полулинейных вырождающихся эллиптических уравнений. На основе имеющейся теории нелинейных эллиптических и линейных вырождающихся эллиптических уравнений, исследуются бесконечная дифференцируемость, аналитичность, регулярность по Жеврею решений, существование и несуществование решений краевых задач для этих уравнений, а также проблемы регулярности решений вплоть до границы.

Общие методы исследований. В диссертации используются методы априорных оценок, методы поднятия векторных полей на группу Ли, теория псевдодифференциальных операторов, метод построения параметрикса, методы последовательной оценки производных, основанные на интегральных представлениях, а также методы нелинейного функционального анализа.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми. Для широких классов полулинейных вырождающихся эллиптических операторов установлены достаточные условия гипоэллиптичности. Изучены необходимые условия гипоэллиптичности. Найден новый подход к доказательстве аналитичности нелинейных эллиптических уравнений. Впервые рассмотрен вопрос об аналитичности, регулярности по Жеврею решений полулинейных вырождающихся эллиптических уравнений. Разработан новый метод для изучения аналитичности решений, в результате чего получены теоремы об аналитической гипоэллиптичности, s-гипоэллиптичности многих классов полулинейных операторов. Установлены теоремы об существовании и несуществовании решений краевых задач для полулинейных уравнений. Впервые найдены критические показатели рассматриваемых задач. Изучена гладкость решений вплоть до границы. Многие результаты являются новыми и для линейных вырождающихся эллиптических уравнений.

Практическая и теоретическая ценность. Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты могут найти применение в теории дифференциальных уравнений с частными производными, дифференциальной геометрии, математической биологии.

Апробация работы. Установленные в диссертации результаты, по мере их получения, докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах:

1. Семинар на механико-математическом факультете Московского Государственного Университета по спектральной теории под руководством профессоров Ю.В.Егорова и В.А.Кондратьева, 1990, Москва, Россия.

2. Семинар в институте математики имени Стеклова по теории функций под руководством профессора С.И.Похожаева, 1994, Москва, Россия.

3. Конференция “Две недели по нелинейному анализу”, 1997, Торино, Италия.

4. Конференция по теории уравнений в частных производных, 1998, Гумма, Япония.

5. Международная конференция по микролокальной теории и системам дифференциальных уравнений в комплексной области, 1998, Киото, Япония.

6. Семинар на математическом факультете университета Токио по анализу под руководством профессора К. Катаоки, 1999, Токио, Япония.

7. Международная конференция по теории уравнений в частных производных и их применения, 2000, Ханой, Вьетнам.

8. Международная конференция по теории уравнений в частных производных и спектральной теории, 2000, Клаушал, Германия.

9. Международная конференция по микролокальной теории и системам дифференциальных уравнений в комплексной области, 2001, Киото, Япония.

10. Первая международная конференция по абстрактному и прикладному анализу, 2002, Ханой, Вьетнам.

11. Вторая международная конференция по абстрактному и прикладному анализу, 2005, Кюньон, Вьетнам.

12. Международная конференция по прикладной математике, 2005, Даежон, Ю. Корея.

Публикация. Основные результаты диссертации опубликованы в 28 работах, список которых приводится в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация изложена на 324 страницах и состоит из введения, восьми глав. Список литературы содержит 228 наименований.

II. КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении работы дан краткий обзор главных результатов и исторического развития в теории эллиптических и линейных вырождающихся эллиптических уравнений, которые имеют близкое отношение к теме диссертации. Здесь введено общее содержание каждого параграфа диссертации.

В первой части работы исследуется бесконечная дифференцируемость решений вырождающихся эллиптических уравнений. Она состоит из двух глав.

В главе 1 изучаются необходимые условия гипоэллиптичности вырождающихся эллиптических операторов методом построения негладких (неограниченных) решений соответствующих однородных уравнений. Она состоит из трёх параграфов. В параграфе 1.1 вводятся основные определения и приводятся короткие необходимые сведения об гипергеометричеких функциях Гаусса и Аппеля. Ниже номера определений и теорем взяты из диссертационной работы.

Определение 1.1.5. Линейный оператор $P(x,D)$ называется гипоэллиптическим в области Ω, если из $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ и $P(x,D)f \in C^\infty(\Omega)$ вытекает, что $f \in C^\infty(\Omega)$.

Наряду с определением 1.1.5 можно рассматривать и более широкое понятие гипоэллиптичности:

Определение 1.1.6. Оператор $P(x,D)$ называется слабо гипоэллиптическим в области Ω, если можно найти такое целое положительное число M, что из $f \in C^M(\Omega)$ и $P(x,D)f \in C^\infty(\Omega)$ следует, что $f \in C^\infty(\Omega)$.

Определение 1.1.7. Пусть $\varepsilon \geq 0$. Оператор $P(x,D)$ порядка m называется гипоэллиптическим с потерей ε производных в области Ω, если для любого вещественного числа s из $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ и $P(x,D)f \in H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ вытекает, что $f \in H^{s+m-\varepsilon}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Определение 1.1.8. Оператор $P(x,D)$ с коэффициентами из $A(\Omega), (G^s(\Omega))$ называется аналитически гипоэллиптическим (s-гипоэллиптическим) в области Ω, если из $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ и $P(x,D)f \in A(\Omega), (G^s(\Omega))$ вытекает, что $f \in A(\Omega), (G^s(\Omega))$, соответственно.

Определение 1.1.10. Оператор $P(x,D)$ называется расширенно аналитически гипоэллиптическим (расширенно s-гипоэллиптическим) в области Ω, если из $f \in C^\infty(\Omega)$ и $P(x,D)f \in A(\Omega)$ $(P(x,D)f \in G^s(\Omega))$ следует, что $f \in A(\Omega)$ $(f \in G^s(\Omega))$.

С развитием теории дифференциальных уравнений в частных производных мощная теория псевдодифференциальных операторов была введена в работах Маслова [10], и Кона, Ниренберга [11]. Понятие гипоэллиптичности можно естественно обобщить для них.

---

[10] В. П. Маслов, *Теория Возмущений и Асимптотические Методы,* М., МГУ, 1965.

[11] J. J. Kohn, L. Nirenberg, Comm. Pure Appl. Math., **18** (1965), 269-305.

Наконец, введём понятие, обобщающее определение пространства функций по Жеврею $G^s(\Omega)$. Говорят, что последовательность $\{L_k\}_{k=1}^{\infty}$, состоящая из положительных чисел, удовлетворяет условию монотонности если для некоторой константы C справедлива оценка

$$\binom{k}{i} L_i L_{k-i} \leqslant C L_k \quad (i = 1, 2..., k = 1, 2, ...).$$

В дальнейшем изложении мы всегда налагаем условие монотонности на последовательность $\{L_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Определение 1.1.11. Пусть заданы две последовательности L_k и $\tilde{L}_k$, состоящих из положительных чисел. Говорят, что функция $F(x, y)$, определённая на $\Omega_1 \times \Omega_2$, принадлежит пространству $C(L_k; \Omega_1 | \tilde{L}_k; \Omega_2)$, если $F(x, y) \in C^{\infty}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ и для любого компакта K в $\Omega_1 \times \Omega_2$ существуют такие константы C_1, C_2, что

$$\max_{(x,y)\in K} \left| \frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|} F(x, y)}{\partial x^{\alpha} \partial y^{\beta}} \right| \leqslant C_1 C_2^{|\alpha|+|\beta|} L_{|\alpha|} \tilde{L}_{|\beta|}$$

для всех мульти-индексов α и β.

Передём к нелинейным операторам. Пусть $(x, \tau_{\alpha})_{|\alpha| \leqslant m} \in \Omega \times \tilde{\Omega}$ и $\Phi(x, \partial^{\alpha})_{|\alpha| \leqslant m}$ - нелинейный дифференциальный оператор в Ω порядка m, действующий по правилу

$$\Phi(x, \partial^{\alpha})_{|\alpha| \leqslant m} : f(x) \longrightarrow \Phi(x, \partial^{\alpha} f(x))_{|\alpha| \leqslant m},$$

где $\Phi(x, \tau_{\alpha})_{|\alpha| \leqslant m} \in C^{\infty}(\Omega \times \tilde{\Omega})$.

Определение 1.1.12. Нелинейный оператор $\Phi(x, \partial^{\alpha})_{|\alpha| \leqslant m}$ называется гипоэллиптическим (аналитически гипоэллиптическим, s-гипоэллиптическим) в области Ω, если можно найти такое число $M \in \bar{\mathbb{Z}}_+$, что из $f \in C^M(\Omega)$ и $\Phi(x, \partial^{\alpha} f)_{|\alpha| \leqslant m} \in C^{\infty}(\Omega)(A(\Omega), G^s(\Omega))$ следует, что $f \in C^{\infty}(\Omega)(A(\Omega), G^s(\Omega))$, соответственно.

Как правило, вместо линейного оператора или уравнения будем просто писать оператор или уравнение. Определения расширенно аналитической гипоэллиптичности и расширенно s-гипоэллиптичности для нелинейных операторов повторяются дословно, как и в линейном случае.

В параграфе 1.2 построены неограниченные решения однородного уравнения с конечным вырождением. Рассматривается оператор Джилиоли - Трева на плоскости

$$G_{k,c}^{a,b} = \mathfrak{X}_2\mathfrak{X}_1 + \mathrm{i}cx^{k-1}\frac{\partial}{\partial y},$$

где $a, b, c \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} a \cdot \operatorname{Re} b \neq 0; k$ - положительное число и $\mathfrak{X}_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \mathrm{i}bx^k\frac{\partial}{\partial y}, \mathfrak{X}_2 = \frac{\partial}{\partial x} - \mathrm{i}ax^k\frac{\partial}{\partial y}$. Получены следующие главные результаты:

Теорема 1.2.1. *Пусть k - нечётное. Если $\operatorname{Re} a < 0$ и $\operatorname{Re} b > 0$, то*

i) $G_{k,c}^{a,b}F_{k,a,b}^{\alpha_1,\beta_1,0}(x,y) = -\frac{4(b-a)^{\frac{1}{k+1}}\pi\Gamma\left(\frac{k}{k+1}\right)}{\Gamma\left(\frac{k(b-a)-c}{(k+1)(b-a)}\right)\Gamma\left(\frac{c}{(k+1)(b-a)}\right)}\delta(x,y) := A_{k,c}^{a,b}\delta(x,y).$

ii) $G_{k,k(b-a)}^{a,b}F_{k,a,b}^{0,\beta,0}(x,y) = 0$ *если* $\operatorname{Re}\beta > -\frac{k}{k+1}$.

iii) $G_{k,0}^{a,b}F_{k,a,b}^{\alpha,0,0}(x,y) = 0$ *если* $\operatorname{Re}\alpha > -\frac{k}{k+1}$.

Если $\operatorname{Re} a < 0, \operatorname{Re} b < 0$ *и* $a \neq b$, *то*

iiii) $G_{k,c}^{a,b}E_{k,a,b}^{\alpha_1,\beta_1,0}(x,y) = 0.$

Если $\operatorname{Re} a < 0$, *то*

iiiii) $G_{k,c}^{a,a}R_{k,a}^{\mu_1,\eta_1,0}(x,y) = 0.$

Явные формулы функций $F_{k,a,b}^{\alpha_1,\beta_1,0}, F_{k,a,b}^{0,\beta,0}, F_{k,a,b}^{\alpha,0,0}, E_{k,a,b}^{\alpha_1,\beta_1,0}, R_{k,a}^{\mu_1,\eta_1,0}$ имеются в диссертации. Эти выражения не приводятся здесь ввиду их громозкости. Только отметим, что все они не ограничены в некоторой окрестности начала координат. Поэтому имеем:

Следствие 1.2.3. *Если либо $\operatorname{Re} a < 0, \operatorname{Re} b > 0, c = -(k+1)(b-a)N$, либо $\operatorname{Re} a < 0, \operatorname{Re} b > 0, c = ((k+1)N+k)(b-a)$, где N - целое неотрицательное число, либо $\operatorname{Re} a < 0, \operatorname{Re} b < 0$, то $G_{k,c}^{a,b}$ не гипоэллиптично (не аналитически гипоэллиптично, не s-гипоэллиптично).*

Теорема 1.2.2. *Пусть k - нечётное. Если $\operatorname{Re} a < 0$ и $\operatorname{Re} b > 0$, то*

i) $G_{k,c}^{a,b}F_{k,a,b}^{\alpha_2,\beta_2,1}(x,y) = \frac{4\pi\Gamma\left(\frac{k+2}{k+1}\right)\frac{\partial\delta(x,y)}{\partial x}}{(b-a)^{\frac{1}{k+1}}\Gamma\left(\frac{(k+1)(b-a)-c}{(k+1)(b-a)}\right)\Gamma\left(\frac{c+b-a}{(k+1)(b-a)}\right)} =: B_{k,c}^{a,b}\frac{\partial\delta(x,y)}{\partial x}.$

ii) $G_{k,(k+1)(b-a)}^{a,b}F_{k,a,b}^{0,\beta,1}(x,y) = 0$ *если* $\operatorname{Re}\beta > -\frac{k+2}{k+1}$.

iii) $G_{k,-(b-a)}^{a,b}F_{k,a,b}^{\alpha,0,1}(x,y) = 0$ *если* $\operatorname{Re}\alpha > -\frac{k+2}{k+1}$.

Если $\operatorname{Re} a < 0, \operatorname{Re} b < 0$ и $a \neq b$, то

iiii) $G^{a,b}_{k,c} E^{\alpha_2,\beta_2,1}_{k,a,b}(x,y) \qquad = 0.$

Если $\operatorname{Re} a < 0$, то

iiiii) $G^{a,a}_{k,c} R^{\mu_2,\eta_2,1}_{k,a}(x,y) \qquad = 0.$

Следствие 1.2.4. *Если либо* $\operatorname{Re} a < 0, \operatorname{Re} b > 0, c = -((k+1)N + 1)(b-a)$ *либо* $\operatorname{Re} a < 0, \operatorname{Re} b > 0, c = (k+1)(b-a)(N+1)$, *где* N *- целое неотрицательное число, либо* $\operatorname{Re} a < 0, \operatorname{Re} b < 0$, *то оператор* $G^{a,b}_{k,c}$ *не является гипоэллиптическим (аналитически гипоэллиптическим, s-гипоэллиптическим).*

Теорема 1.2.3. *Пусть* k *- чётное и* $\operatorname{Re} a < 0, \operatorname{Re} b > 0$.
Если $c = (k+1)(b-a)N + \frac{(2k+1)(b-a)}{2}$, *где* N *- целое число, то*
$G^{a,b}_{k,c} F^{\alpha_1,\beta_1,0}_{k,a,b}(x,y) = 0, G^{a,b}_{k,c} F^{\alpha_2,\beta_2,1}_{k,a,b}(x,y) = 0.$
Если $c = (k+1)(b-a)N + \frac{k(b-a)}{2}$, *где* N *- целое число, то*
$G^{a,b}_{k,c} F^{\alpha_1,\beta_1,0}_{k,a,b}(x,y) = A^{a,b}_{k,c}\delta(x,y), G^{a,b}_{k,c} F^{\alpha_2,\beta_2,1}_{k,a,b}(x,y) = B^{a,b}_{k,c}\frac{\partial\delta(x,y)}{\partial x}.$

Следствие 1.2.5. *Допустим, что* k *- чётное и* $\operatorname{Re} a < 0, \operatorname{Re} b > 0$. *Если* $c = (k+1)(b-a)N + \frac{(2k+1)(b-a)}{2}$, *где* N *- целое число, то оператор* $G^{a,b}_{k,c}$ *не является гипоэллиптическим (аналитически гипоэллиптическим, s-гипоэллиптическим).*

В параграфе 1.3 построены неограниченные решения сравнительно нового класса уравнений с бесконечным вырождением. Изучается дифференциальный оператор на плоскости, имеющий вид

$$G^{c}_{a,b} = \mathfrak{Y}_2\mathfrak{Y}_1 + \mathrm{i}\left(c(x)|x|^{-4} + (a(x)-b(x))|x|^{-3}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{|x|}}\frac{\partial}{\partial y}, \qquad (1.3.1)$$

где функция $\mathrm{e}^{-1/|x|}$ доопределена нулём при $x=0$, а коэффициенты $a(x), b(x), c(x)$ заданы следующим образом $a := a(x) = a_+ \in \mathbb{C}$ если $x > 0, a_- \in \mathbb{C}$ если $x < 0$; $b := b(x) = b_+ \in \mathbb{C}$ если $x > 0, b_- \in \mathbb{C}$ если $x < 0$; $c := c(x) = c_+ \in \mathbb{C}$ если $x > 0, c_- \in \mathbb{C}$ если $x < 0$ и

$$\mathfrak{Y}_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \mathrm{i}b(x)\operatorname{sign}(x)|x|^{-2}e^{-\frac{1}{|x|}}\frac{\partial}{\partial y}, \mathfrak{Y}_2 = \frac{\partial}{\partial x} - \mathrm{i}a(x)\operatorname{sign}(x)|x|^{-2}e^{-\frac{1}{|x|}}\frac{\partial}{\partial y}.$$

Предположим, что $\mathrm{Re}\, a_+ \cdot \mathrm{Re}\, a_+ \cdot \mathrm{Re}\, a_- \cdot \mathrm{Re}\, b_+ \cdot \mathrm{Re}\, b_- \neq 0$. Установлены следующие главные результаты:

A) *Случай* $\mathrm{Re}\, a_+ < 0, \mathrm{Re}\, a_- < 0, \mathrm{Re}\, b_+ > 0, \mathrm{Re}\, b_- > 0$.

Теорема 1.3.1. *Пусть* $Re\, a_+ < 0, Re\, a_- < 0, Re\, b_+ > 0, Re\, b_- > 0$. *Тогда оператор* $G^c_{a,b}$ *не является гипоэллиптическим при*

$$\frac{c_+}{a_+ - b_+} = k, \frac{c_-}{a_- - b_-} = l,$$

или при

$$\frac{c_+}{a_+ - b_+} = -k - 1, \frac{c_-}{a_- - b_-} = -l - 1,$$

где k *и* l *- целые неотрицательные числа. Более того,* $G^c_{a,b} F^c_{a,b} = 0$.

B) *Случай* $\mathrm{Re}\, a_+ < 0, \mathrm{Re}\, a_- < 0, \mathrm{Re}\, b_+ < 0, \mathrm{Re}\, b_- < 0$.

Теорема 1.3.2. *Пусть* $Re\, a_+ < 0, Re\, a_- < 0, Re\, b_+ < 0, Re\, b_- < 0$. *Тогда оператор* $G^c_{a,b}$ *не является гипоэллиптическим. Более того, имеют место* $G^c_{a,b} E^c_{a,b}(x,y) = 0$ *в случае отсутствия резонанса* ($a_+ \neq b_+, a_- \neq b_-$), $G^c_{a,b} H^c_{a,b} = 0$ *при* $a_+ = b_+, a_- \neq b_-$, $G^c_{a,b} K^c_{a,b} = 0$ *при* $a_+ \neq b_+, a_- = b_-$, *и* $G^c_{a,a} R^c_a(x,y) = 0$ *при наличии резонанса* $a_+ = b_+, a_- = b_-$.

C) *Случай* $\mathrm{Re}\, a_+ < 0, \mathrm{Re}\, a_- < 0, \mathrm{Re}\, b_+ > 0, \mathrm{Re}\, b_- < 0$.

Теорема 1.3.3. *Пусть* $Re\, a_+ < 0, Re\, a_- < 0, Re\, b_+ > 0, Re\, b_- < 0$, *и* $\frac{c_+}{a_+ - b_+}$ *целое отрицательное число. Тогда оператор* $G^c_{a,b}$ *не является гипоэллиптическим. Более того,* $G^c_{a,b} D^c_{a,b}(x,y) = 0$ *в случае отсутствия резонанса* ($a_- \neq b_-$), *и* $G^c_{a,b} Y^c_{a,b}(x,y) = 0$ *при наличии резонанса* ($a_- = b_-$).

Отметим, что как и в теореме 1.2.1 все функции в теоремах 1.2.2 - 1.3.3 явно выписываются в диссертации.

Глава 2 посвящена изучению достаточных условий гипоэллиптичности вырождающихся эллиптических уравнений. Она состоит из пяти параграфов.

В параграфе 2.1 вводятся определения, обозначения, сведения, необходимые в будущем изучении. Через $\{X_j\}_{j=1}^k$ будем обозначать систему вещественных полей в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Пусть ι - мульти-порядок, т. е. последовательность $(\iota_1, \ldots, \iota_r)$ с $1 \leqslant \iota_s \leqslant k, 1 \leqslant s \leqslant r$. Будем писать

$$X_\iota = [X_{\iota_1} \ldots [X_{\iota_{r-1}}, X_{\iota_r}] \ldots], X^\iota = X_{\iota_1} \cdots X_{\iota_r},$$

и $r = |\iota|$ (длина мульти-порядка ι). Введём следующие условия:

Условие $(\mathrm{H})_\mathrm{l}$: существует такое целое неотрицательное число l, что коммутаторы $\{X_\iota\}_{|\iota| \leqslant l}$ порождают все пространство $\mathbb{R}^n$ в каждой точке области Ω.

Условие $(\mathrm{K})_\mathrm{l}^\mathrm{d}$: для любого $i \leqslant d$ любого вещественного s и всякого компакта K в Ω существует такая постоянная $C = C(s, l, K)$, что

$$\|X_\iota f\|_s \leqslant C\Big(\sum_{j=1}^k \|X_j f\|_{s+\frac{i-1}{l}} + \|f\|_s\Big), \quad \forall |\iota| = i, f \in C_0^\infty(K).$$

Условие $(\mathrm{K})_\mathrm{l}$: Если векторные поля $\{X_j\}_{j=1}^k$ удовлетворяют условию $(\mathrm{K})_\mathrm{l}^\mathrm{d}$ для всех d, то говорим, что они удовлетворяют условию $(\mathrm{K})_\mathrm{l}$.

Условие $(\mathrm{K'})_\mathrm{l}^\mathrm{d}$: для любого $i \leqslant d$ и всякого компакта K в Ω существует такая постоянная $C = C(l, K)$, что

$$\|X_\iota f\|_s \leqslant C\Big(\sum_{j}^k \|X_j^{i-1} f\|_{s+\frac{1}{l}} + \|f\|_s\Big), \quad \forall |\iota| = i, f \in C_0^\infty(K).$$

По системе $\{X_j\}_{j=1}^k$ можно построить оператор вида

$$Q_m := Q_m(x, D) = \sum_{|\iota| \leqslant m} a_\iota(x) X^\iota$$

и его полулинейное возмущение

$$\Theta_m := \Theta_m(x, \partial^\alpha) : f \longrightarrow Q_m(x, D) f + \Phi(x, X^\iota f)_{|\iota| \leqslant m-1},$$

где $a_\iota(x), \Phi(x, \tau_\iota)_{|\iota| \leqslant m-1}$ - бесконечно дифференцируемые функции. Условимся, что X^ι есть единичный оператор при $\iota = 0$.

Определение 2.1.2 (Хелффер-Нуриг [6]). Пусть $\delta \in (0,1]$. Говорят, что $Q_m(x,D)$ является максимально δ-гипоэллиптическим оператором в области Ω, если для каждого компакта K в Ω существует такая константа C, что

$$\sum_{|\iota|\leqslant m} \|X^\iota f\|^2_{\delta(m-|\iota|)} \leqslant C(\|Q_m(x,D)f\|^2_{L^2} + \|f\|^2_{L^2})$$

для всех $f \in C_0^\infty(K)$.

Определение 2.1.4. Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Для каждого целого неотрицательного числа m обозначим через $S^{m,\{X_j\}_{j=1}^k}_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$ множество всех таких функций f, что для любого компакта K в Ω выполнено неравенство $\sum_{|\iota|\leqslant m} \|X^\iota f\|_{L^p(K)} < \infty$. Положим $S^{\infty,\{X_j\}_{j=1}^k}_{p,\mathrm{loc}}(\Omega) = \cap_{m=0}^\infty S^{m,\{X_j\}_{j=1}^k}_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$. Пространства $S^{m,\{X_j\}_{j=1}^k}_{2,\mathrm{loc}}(\Omega)$ и $S^{\infty,\{X_j\}_{j=1}^k}_{2,\mathrm{loc}}(\Omega)$ будут обозначены просто через $S^{m,\{X_j\}_{j=1}^k}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ и $S^{\infty,\{X_j\}_{j=1}^k}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Определение 2.1.6. Оператор $Q_m(x,D)$ называется расширенно максимально гипоэллиптическим по системе $\{X_j\}_{j=1}^k$ в области Ω, если для любого натурального числа $m_1 \in \bar{\mathbb{Z}}_+$, из $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $Q_m(x,D)f \in S^{m_1,\{X_j\}_{j=1}^k}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ следует, что $f \in S^{m_1+m,\{X_j\}_{j=1}^k}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Определение 2.1.7. Нелинейный оператор $\Theta_m(x,\partial^\alpha)$ называется расширенно максимально гипоэллиптическим по системе $\{X_j\}_{j=1}^k$ в Ω, если найдётся такое целое неотрицательное число M, что для любого натурального числа $m_1 \in \bar{\mathbb{Z}}_+$, из $f \in C^M(\Omega), \Theta_m f \in S^{m_1,\{X_j\}_{j=1}^k}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ следует, что $f \in S^{m_1+m,\{X_j\}_{j=1}^k}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

В параграфе 2.2 доказывается гипоэллиптичность полулинейного оператора второго порядка. Получена следующая теорема

Теорема 2.2.2. *Пусть система* $\{X_j\}_{j=1}^k$ *удовлетворяет условию* $(\mathrm{H})_1$ *в* Ω *и* $\Phi(x,\tau_0,\tau_1,\ldots,\tau_k)$ *- бесконечно дифференцируемая функция. Тогда нелинейный оператор*

$$\Psi_2(x,\partial^\alpha) : f \longrightarrow \sum_{j=1}^k X_j^2 f + \Phi(x,f,X_1f,\ldots,X_kf)$$

является расширенно максимально гипоэллиптическим по системе $\{X_j\}_{j=1}^k$. *В частности, он гипоэллиптичен.*

Для установления выше теоремы мы используем метод априорных оценок и наличие параметрикса линейной части оператора $\Psi_2(x, \partial^\alpha)$.

Замечание 2.2.1. В теореме 2.2.2 очень важно, что Ψ_2 является полулинейным. Иначе теорема может быть неверной. Например, рассмотрим оператор в $\mathbb{R}^2$

$$\tilde{\Psi} = X_1^2 + (X_2^2)^2,$$

где $X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}$. Легко видеть, что

$$\tilde{\Psi}(|x_2|^{2m+1}) = (2m+1)^2(2m)^2 x_2^{4m-2} \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$$

для всех $m \in \mathbb{Z}_+$. Однако $|x_2|^{2m+1} \in C^{2m}(\mathbb{R}^2) \backslash C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Следовательно, оператор $\tilde{\Psi}$ негипоэллиптичен в $\mathbb{R}^2$. По выше контрпримеру можно построить анологичные контрпримеры и в последующих главах.

В параграфе 2.3 рассматриваются линейный оператор

$$P_{2m} := P_{2m}(x, D) = (-1)^m \sum_{j=1}^{k} X_j^{2m} + \sum_{|\iota| \leqslant 2m-1} a_\iota(x) X^\iota,$$

где $a_\iota(x) \in C^\infty(\Omega)$; и его нелинейное возмущение

$$\Psi_{2m}(x, \partial^\alpha) : f \longrightarrow P_{2m}(x, D) f + \Phi(x, X^\iota f)_{|\iota| \leqslant 2m-1}.$$

Получены следующие главные результаты

Теорема 2.3.2. *Пусть система* $\{X_j\}_{j=1}^k$ *удовлетворяет условиям* $(\mathrm{H})_1$ *и* $(\mathrm{K})_1^{3m}$ *(или* $(\mathrm{K'})_1^{3m}$*) в* Ω. *Тогда для каждого компакта* K *в* Ω, *и каждого вещественного числа* s *найдётся такая постоянная* $C(s, K) = C$, *что*

$$\sum_{|\iota| \leqslant 2m} \|X^\iota f\|^2_{\frac{2m-|\iota|}{l}+s} \leqslant C(\|P_{2m} f\|_s^2 + \|f\|_s^2); \quad \forall\, f \in C_0^\infty(K).$$

Иными словами, P_{2m} - максимально $\frac{1}{l}$-гипоэллиптичен.

Отметим, что если $l = 2$, то требуется только условие $(\mathrm{H})_2$ так как в этом случае выполнение условия $(\mathrm{H})_2$ влечёт за собой условие $(\mathrm{K})_2$.

Теорема 2.3.3. *Пусть векторные поля $\{X_j\}_{j=1}^k$ удовлетворяют условиям $(\mathrm{H})_{\mathrm{l}}$ и $(\mathrm{K})_{\mathrm{l}}^{3m}$ (или $(\mathrm{K'})_{\mathrm{l}}^{3m}$) в Ω. Тогда P_{2m} является гипоэллиптическим оператором с потерей $\frac{2m(l-1)}{l}$ производных.*

Теорема 2.3.4. *Пусть векторные поля $\{X_j\}_{j=1}^k$ удовлетворяют условиям $(\mathrm{H})_{\mathrm{l}}$ и $(\mathrm{K})_{\mathrm{l}}$ в Ω. Тогда P_{2m} является расширенно максимально гипоэллиптическим оператором по системе $\{X_j\}_{j=1}^k$.*

Теорема 2.3.6. *Пусть система $\{X_j\}_{j=1}^k$ удовлетворяет условиям $(\mathrm{H})_{\mathrm{l}}$ и $(\mathrm{K})_{\mathrm{l}}$ (или $(\mathrm{K'})_{\mathrm{l}}$) в Ω. Если функция $\Phi(x,\tau_\iota)_{|\iota|\leqslant 2m-1}$ бесконечно дифференцируема, то нелинейный оператор Ψ_{2m} является гипоэллиптическим оператором. Более того, он расширенно максимально гипоэллиптичен по системе $\{X_j\}_{j=1}^k$.*

Далее, изучаем гипоэллиптичность операторов P_4, Ψ_4 без требования выполнения условия $(\mathrm{K})_{\mathrm{l}}$.

Теорема 2.3.12. *Пусть векторные поля $\{X_j\}_{j=1}^k$ удовлетворяют условию $(\mathrm{H})_3$ в Ω, и заданы такие функции $a, b, c \in C_0^\infty(\Omega)$, что $a \lesssim b \lesssim c$. Тогда для каждого целого числа r существуют такие операторы T_r и S_r, что*

$$T_r b P_4 = aI + S_r \cdot c,$$

где T_r, S_r - сглаживающие операторы порядков $4, r$, соответственно.

Теорема 2.3.13. *Пусть система $\{X_j\}_{j=1}^k$ удовлетворяет условию $(\mathrm{H})_3$ в Ω. Допустим, что $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $p \in (1,\infty)$ и $P_4 f = g$. Тогда*

a) *Если $g \in L^p_{\alpha,\mathrm{loc}}(\Omega)$, $\alpha \geq 0$, то $f \in L^p_{\alpha+\frac{4}{3},\mathrm{loc}}(\Omega)$.*

b) *Если $g \in \Lambda_{\alpha,\mathrm{loc}}(\Omega)$, $\alpha > 0$, то $f \in \Lambda_{\alpha+\frac{4}{3},\mathrm{loc}}(\Omega)$.*

c) *Если $g \in L^\infty(\Omega)$, то $f \in \Lambda_{\frac{4}{3},\mathrm{loc}}(\Omega)$.*

d) *Если* $g \in S^{m,\{X_j\}_{j=1}^k}_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$, $p \in (1,\infty), k = 0,1,\dots,$ *то* $f \in S^{m+4,\{X_j\}_{j=1}^k}_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Теорема 2.3.14. *Пусть система* $\{X_j\}_{j=1}^k$ *удовлетворяет условию* $(\mathrm{H})_3$ *в* Ω. *Если функция* $\Phi(x,\tau_\iota)_{|\iota|\leqslant 3}$ *бесконечно дифференцируема, то* Ψ_4 *является нелинейным гипоэллиптическим оператором. Более того, он расширенно максимально гипоэллиптичен по системе* $\{X_j\}_{j=1}^k$ *в* Ω.

Заметим, что в линейном случае результаты этого параграфа можно обобщить и для псевдодифференциальных операторов.

В параграфе 2.4 изучается уравнение

$$\Psi^{a,b}_{k,c}(f) := G^{a,b}_{k,c}f + \Phi\Big(x,y,f,\frac{\partial f}{\partial x}, x^k\frac{\partial f}{\partial y}\Big) = 0, \qquad (2.4.8)$$

где $G^{a,b}_{k,c}$ - оператор, рассмотренный в параграфе 1.2. Построим фундаментальные решения оператора $G^{a,b}_{k,c}$. Рассмотрим отдельно случай, когда k - чётное и k - нечётное.

A) *Случай* k *- нечётное.*

Определение 2.4.1. Назовём параметры a,b,c,k допустимыми, если $c \neq \pm[N(k+1)(b-a)], c \neq \pm[N(k+1)+k](b-a)$, где N – целое число.

Теорема 2.4.1. *Пусть* a,b,c,k *допустимые параметры. Тогда*

$$G^{a,b}_{k,c}E^{a,b}_{k,c}(x,y,u,v) = \delta(x-u,y-v).$$

На основе теоремы 2.4.1 доказаны следующие теоремы:

Теорема 2.4.2. $G^{a,b}_{k,c}$ *является слабо гипоэллиптическим оператором тогда и только тогда, когда параметры* a,b,c,k *допустимы.*

Отметим, что доказательство в диссертации выше теоремы отличается от доказательства предложенного Джилиоли и Тревом в [7].

Теорема 2.4.5. *Пусть* $m \geq 2k+3$, *параметры* a, b, c, k *допустимы и* Φ *- бесконечно дифференцируемая функция. Тогда каждое* $C^m(\Omega)$*-решение уравнения* (2.4.8) *принадлежит* $C^\infty(\Omega)$. *В частности, нелинейный оператор* $\Psi^{a,b}_{k,c}$ *гипоэллиптичен.*

B) *Случай* k *- чётное.*

Теорема 2.4.3. *Следующая формула имеет место*

$G^{-1,1}_{k,2N(k+1)+k}E^{-1,1}_{k,2N(k+1)+k}(x, y, u, v) = \delta(x-u, y-v)$, *где* $N-$ *целое число.*

Используя теорему 2.4.3 можно доказать следующую теорему:

Теорема 2.4.6. *Пусть* $m \geq 2k+3$ *и* Φ *- бесконечно дифференцируемая функция. Предположим, что* $f \in C^m(\Omega)$ *является решением уравнения* (2.4.8), *где* $a = b = -1, c = 2N(k+1)+k, N$ *- целое число. Тогда* $f \in C^\infty(\Omega)$. *Нелинейный оператор* $\Psi^{-1,1}_{k,2N(k+1)+k}$ *гипоэллиптичен.*

Снова, формулы для $E^{a,b}_{k,c}, E^{-1,1}_{k,2N(k+1)+k}$ в теоремах 2.4.1, 2.4.3 не приводятся здесь ввиду их сложности.

В параграфе 2.5 изучается гипоэллиптичность оператора $G^c_{a,b}$, выражение которого уже выписывалось в параграфе 1.3. Через преобразование Фурье конструированы параметриксы для рассматриваемого уравнения. Гладкость решений отсюда и вытекает. Как побочный продукт получаем также локальная разрешимость и локальная неразрешимость рассматриваемого уравнения. Доказаны следующие теоремы:

Теорема 2.5.1. *Допустим, что* $Re\,a_+ < 0, Re\,a_- < 0, Re\,b_+ > 0$, $Re\,b_- > 0$. *Тогда* $G^c_{a,b}$ *не является гипоэллиптическим оператором (локально разрешимым) тогда и только тогда, когда* $\frac{c_+}{a_+-b_+} = k, \frac{c_-}{a_--b_-} = l$, *или* $\frac{c_+}{a_+-b_+} = -k-1, \frac{c_-}{a_--b_-} = -l-1$, *где* k *и* l *- целые неотрицательные числа.*

Теорема 2.5.2. *Допустим, что* $Re\,a_+ > 0, Re\,a_- > 0, Re\,b_+ > 0$, $Re\,b_- > 0$. *Тогда* $G^c_{a,b}$ *является негипоэллиптическим, локально неразрешимым в начале координат.*

Теорема 2.5.3. *Пусть* $Re\, a_+ > 0, Re\, a_- < 0, Re\, b_+ > 0, Re\, b_- < 0$. *Тогда* $G^c_{a,b}$ *всегда является и гипоэллиптическим и локально разрешимым в начале координат.*

Теорема 2.5.4. *Пусть* $Re\, a_+ < 0, Re\, a_- > 0, Re\, b_+ > 0, Re\, b_- > 0$. *Тогда* $G^c_{a,b}$ *не является гипоэллиптическим, локально разрешимым в начале координат.*

Отметим, что остальные возможности сочетания знаков a, b, c удовлетворяющих условию $\mathrm{Re}\, a_+ \cdot \mathrm{Re}\, a_+ \cdot \mathrm{Re}\, a_- \cdot \mathrm{Re}\, b_+ \cdot \mathrm{Re}\, b_- \neq 0$, попадают в одну из ситуаций аналогичных случаям описываемым теоремами 2.5.1 - 2.5.4.

Переходим к описанию второй части работы. Она занимается изучением аналитичности решений полулинейных вырождающихся эллиптических уравнений. Метод, использованный в исследовании эллиптических уравнений, обобшается для достижения результатов. Настоящий метод впервые применяется для изучения полулинейных вырождающихся эллиптических уравнений. Предложенный метод, который будет проведён по индукции, основан на три главных этапах. Первый этап заключается в нахождении точного или даже приблизительного фундаментального решения главной (линейной) части изучаемого уравнения. С найденным фундаментальным решением можно написать интегральную формулу представления решения через нелинейную часть уравнений. Эта интегральная формула будет содержать два слагаемого: интегралы в области и на границе. На втором этапе оценим производные нелинейной части, зная в предположении индукции оценки младших производных решений. На заключительном этапе определяем подходящую метрику и функциональное пространсрво. Часто, выбор метрики будет зависить от свойства найденного на первом этапе фундаментального решения. Теперь по выбранной метрике, для данной точки окружаем её некоторой фигурой, которую подберём как проше как можно. Во всех ситуациях, где мы изучаем, в качестве фигуры достаточно выбрать квадрат или куб с пропоциональными сторонами. Используя формулу представления выведённую на первом этапе можно выразить высшие производные решений в данной точке через сумму интегралов в области и на границе выбранной раньше нами фигуры. Как правило, интеграл по области хорошо оценивается. Главная трудность, которая отсутствует при изучении эллиптических уравнений, заключается в оценке интеграла на границе. Чтобы бороться с ней, нужно интегрировать по частям. При интегрировании по частям существенно используются специфики исследуемого уравнения. Это и есть центральная причина выбора простой фигуры (если граница фигуры состоит из прямых или плоских поверхностей, то легко интегрировать по частям). Выбор удобных пространств зависит от выкладок проделанных в этом месте. Кроме того, чтобы оценить подынтегральные функции, нужно выбрать фигуру в зависимости от точки, которую она окружает. В конце концов, мы хотим установить оценки высших производных решений, которые удовлетворяли условиям леммы Фридмана. Применение этой леммы даёт нам нужные результаты. Теперь приступим к описанию четырёх глав содержащихся в этой части.

<u>Глава 3</u> касается аналитичности решений нелинейных эллиптических уравнений. Она состоит из трёх параграфов. В параграфе 3.1 устанавливаются некоторые леммы Фридмана.

В параграфе 3.2 определены пространства Гёльдера с весом и перечислены их свойства. Отметим, что эти пространства хорошо улавливают характеристические поведения решений эллиптических уравнений вблизи границы.

В параграфе 3.3 вводятся оценки полученные Дуглисом - Ниренбергом. Эти оценки, которые можно считать априорными оценками в введённых в предыдущем параграфе пространствах Гёльдера с весом, играют очень важную роль в дальнейшем исследовании.

В параграфе 3.4 исследуется следующее уравнение

$$\sum_{|\alpha|=m} \mathcal{A}_\alpha(x, f, \partial f, ..., \partial^\beta f)_{|\beta|\leqslant m-1}\partial^\alpha f = \mathcal{B}(x, f, \partial f, ..., \partial^\beta f)_{|\beta|\leqslant m-1}. \tag{3.4.1}$$

С учётом оценок Дуглиса - Ниренберга доказана следующая теорема:

Теорема 3.4.1. *Предположим, что* $A_\alpha, \mathcal{B} \in C\{L_{k-2}; \Omega, \mathbb{C}^\mu\}$. *Пусть* f *бесконечно дифференцируемое решение уравнения* (3.4.1), *которое в свою очередь является эллиптическим в* f, *т. е.*

$$\sum_{|\alpha|=m} \mathcal{A}_\alpha(x, f, \partial f, ..., \partial^\beta f)_{|\beta|\leqslant m-1}\xi^\alpha \neq 0$$

для всех $(x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \backslash 0$. *Тогда* $f \in C\{L_{k-m-1}; \Omega\}$. *В частности, если* $\mathcal{A}_\alpha, \mathcal{B}$ *аналитические функции (s-функции), то* f *является таковой же функцией.*

Здесь результат является известным, но метод для его получения улучшается. Как видно из доказательства, продемонстрированного в этом параграфе, аналитичность решений эллиптических систем по Дуглису - Ниренбергу, которые в общем случае не являются эллиптическими даже в смысле Петровского, тоже можно получить.

Глава 4 посвящена изучению бесконечной дифференцируемости, аналитичности и регулярности по Жеврею решений уравнения

$$\Psi^h_{2k}(f) = M^h_{2k}f + \Phi\Big(x, y, f, ..., x^\gamma \frac{\partial^{\alpha+\beta} f}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}\Big)_{(\alpha,\beta,\gamma)\in\Xi^{h-1}_{2k}} = 0, \tag{4.1.1}$$

где $k, h \in \mathbb{Z}_+, f = f(x, y), \Xi^m_k = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{Z}^3_+ : \alpha + \beta \leqslant m, km \geq \gamma \geq \alpha + (1 + k)\beta - m\}$, $M_{2k} = \frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}x^{2k}\frac{\partial}{\partial y}$ - оператор Мизохаты, и

$$M^h_{2k} = \underbrace{M_{2k} \circ M_{2k} \cdots \circ M_{2k}}_{h-\text{раз}}.$$

Она состоит из трёх параграфов. В параграфе 4.1 построено фундаментальное решение оператора M^h_{2k}.

В параграфе 4.2 доказана следующая теорема:

Теорема 4.2.1. *Пусть* $m \geq 4k^2 + 6k + h + 1$, *и* f *является* $C^m(\Omega)$-*решением уравнения* (4.1.1). *Тогда* f *- бесконечно дифференцируемая функция в* Ω. *Нелинейный оператор* Ψ^h_{2k} *гипоэллиптичен в* Ω.

В параграфе 4.3 установлена следующая теорема:

Теорема 4.3.1. *Пусть* f *- бесконечно дифференцируемое решение уравнения* (4.1.1) *и* $\Phi \in C\{L_{n-t-2}; \Omega | L_{n-t-2}; E\}$ *для каждого целого числа* $t \in [0, h(2k+1)]$. *Тогда* $f \in C\{L_{n-h(2k+1)-2}; \Omega\}$. *В частности, если* Φ *является аналитической функцией (*s*-функцией по Жеврею), то нелинейный оператор* Ψ^h_{2k} *расширенно аналитически гипоэллиптичен (расширенно* s*-гипоэллиптичен).*

При доказательстве выше теоремы, некоторые геометрические свойства найденного в параграфе 4.1 фундаментального решения существенно используются. Обьединяя теоремы 4.2.1 и 4.3.1 имеем

Теорема 4.3.2. *Пусть* Φ *является аналитической функцией (*s*-функцией по Жеврею). Тогда* Ψ^h_{2k} *аналитически гипоэллиптичен (*s*-гипоэллиптичен).*

Глава 5 изучает аналитичность и регулярность по Жеврею решений уравнений (2.4.8). Она содержит два параграфа.

В параграфе 5.1 доказываются теоремы об аналитичности и регулярности по Жеврею решений полулинейных уравнений, являющихся линейным возмущением модельного оператора Грушина на плоскости.

В параграфе 5.2 получены следующие теоремы:

А) *Случай* k *- нечётное.*

Теорема 5.2.1. *Пусть параметры* a, b, c, k *допустимы (см. определение 2.4.1 на странице 15),* f *-* C^∞*-решение уравнения* (2.4.8) *и* $\Phi \in C\{L_{n-t-2}; \Omega | L_{n-t-2}; \mathbb{R}^3\}$ *для каждого* $t \in [0, 2k+2]$. *Тогда* $f \in C\{L_{n-2k-4}; \Omega\}$. *В частности, если* Φ *является* s*-функцией (или аналитической функцией), то* $\Psi^{a,b}_{k,c}$ *расширенно* s*-гипоэллиптичен (или расширенно аналитически гипоэллиптичен).*

Объединяя теоремы 5.2.1 и 2.4.5 имеем

Теорема 5.2.2. *Пусть* $m \geq 2k+3$, *параметры* a, b, c, k *допустимые,* $\Phi \in C\{L_{n-t-2}; \Omega | L_{n-t-2}; \mathbb{R}^3\}$ *для каждого* $t \in [0, 2k+2]$ *и* f *является* $C^m(\Omega)$*- решением уравнения* (2.4.8). *Тогда* $f \in C\{L_{n-2k-4}; \Omega\}$. *В частности, если* Φ *является* s*-функцией (или аналитической функцией), то* $\Psi^{a,b}_{k,c}$ s*-гипоэллиптичен (или аналитически гипоэллиптичен).*

В) *Случай* k *- чётное.*

Теорема 5.2.3. *Пусть* $m \geq 2k+3$ *и* $\Phi \in C\{L_{n-t-2}; \Omega | L_{n-t-2}; \mathbb{R}^3\}$ *для каждого* $t \in [0, 2k+2]$. *Тогда всякое* $C^m(\Omega)$*-решение уравнения* (2.4.8), *где* $b = -a, c = -a(2N(k+1)+k)$, *принадлежит* $C\{L_{n-2k-4}; \Omega\}$. *В частности, если* Φ *является* s*-функцией (или аналитической функцией), то* $G^{a,-a}_{k,-a(2N(k+1)+k}$ s*-гипоэллиптичен (или аналитически гипоэллиптичен).*

Теоремы данного параграфа покрывают результаты предыдущего параграфа. Поэтому при доказательстве мы останавливаем ся только на главных моментах. Здесь существенно используются оценки гипергеометрических функций, напоминатых в главе 1.

<u>Глава 6</u> касается полулинейного уравнения типа Кона-Лапласа на группе Гейзенберга. Она содержит три параграфа.

В параграфе 6.1 вводится оператор Кона-Лапласа на группе Гейзенберга. Группа Гейзенберга $\mathbb{H}^n$ (порядка n) есть $\mathbb{R}^{2n+1}$ с операцией умножения

$$(z,t) \circ (z',t') = (z+z', t+t' - \mathrm{i}(z\bar{z}' - \bar{z}z')) \qquad \text{или}$$
$$(x,y,t) \circ (x',y',t') = (x+x', y+y', t+t' + 2(yx' - xy')),$$

где $\omega\omega' = \sum_{j=1}^{n} \omega_j \omega'_j; ab = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j$ для любых $\omega, \omega' \in \mathbb{C}^n; a, b \in \mathbb{R}^n$. Определяем векторные поля

$$\mathbb{X}_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + 2y_j \frac{\partial}{\partial t}, \mathbb{Y}_j = \frac{\partial}{\partial y_j} - 2x_j \frac{\partial}{\partial t}, T = \frac{\partial}{\partial t}; j = 1, \ldots, n$$

которые образуют базис лево инвариантных векторных полей на $\mathbb{H}^n$. Далее, введём комплексные векторные поля

$$\mathbb{Z}_j = \frac{1}{2}(\mathbb{X}_j - \mathrm{i}\mathbb{Y}_j) = \frac{\partial}{\partial z_j} + \mathrm{i}\bar{z}_j\frac{\partial}{\partial t}, \bar{\mathbb{Z}}_j = \frac{1}{2}(\mathbb{X}_j + \mathrm{i}\mathbb{Y}_j) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} - \mathrm{i}z_j\frac{\partial}{\partial t}.$$

В специальном базисе, оператор Кона-Лапласа $\Box_b$ имеет диагональный вид с элементами $\mathcal{L}_{n,\lambda}$ на диагонали. Здесь $\mathcal{L}_{n,\lambda}$ является дифференциальным оператором второго порядка, имеющим вид

$$\mathcal{L}_{n,\lambda} = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(\mathbb{Z}_j\bar{\mathbb{Z}}_j + \bar{\mathbb{Z}}_j\mathbb{Z}_j) + \mathrm{i}\lambda T = -\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n}(\mathbb{X}_j^2 + \mathbb{Y}_j^2) + \mathrm{i}\lambda T; \lambda \in \mathbb{C}.$$

Следовательно, изучение свойств оператора $\Box_b$ сведётся к исследованию свойств оператора $\mathcal{L}_{n,\lambda}$. В настоящей главе изучаем регулярность по Жеврею решений уравнения

$$\Psi_{(n,\lambda)}f = \mathcal{L}_{n,\lambda}f + \Phi(x, y, t, f, \mathbb{Z}_1 f, ..., \mathbb{Z}_n f, \bar{\mathbb{Z}}_1 f, ..., \bar{\mathbb{Z}}_n f) = 0. \qquad (6.1.3)$$

Стоит заметить, что на группе Гейзенберга оператор Кона-Лапласа вырождается в каждой точке. Значение λ называется допустимым, если $\pm\lambda \neq n, n+2, n+4, ...$

В параграфе 6.2 построено фундаментальное решение и исследованы некоторые его свойства при допустимых значениях λ. На основе полученного фундаментального решения определён оператор потенциала и выведена интегральная формула представления решений. Будем считать, что $\Omega \Subset \Omega_1$.

В параграфе 6.3 использованием свойств и установленных в параграфах 6.1 и 6.2 формул доказывается регулярность по Жеврею решений изучаемого уравнения. Получены следующие теоремы:

Теорема 6.3.1. *Пусть $l \geq 2n+4$ и параметр λ допустим. Предположим, что f является $S_{\mathrm{loc}}^{l,\{\mathbb{X}_j,\mathbb{Y}_j\}_{j=1}^n}(\Omega)$-решением уравнения* (6.1.3) *и $\Phi(x, y, t, f, \mathbb{Z}_1 f, ..., \mathbb{Z}_n f, \bar{\mathbb{Z}}_1 f, ..., \bar{\mathbb{Z}}_n f) \in G^s(\Omega_1 \times \mathbb{C}^{2n+1}), s \geq 2$. Тогда $f \in G^s(\Omega)$. Нелинейный оператор $\Psi_{(n,\lambda)}$ s-гипоэллиптичен при $s \geq 2$.*

Доказательство теоремы 6.3.1 состоит из теорем 6.3.2 и 6.3.3.

Теорема 6.3.2. *Пусть $l \geq 2n+4$ и параметр λ допустимый. Предположим, что f является $S_{\mathrm{loc}}^{l,\{\mathbb{X}_j,\mathbb{Y}_j\}_{j=1}^n}(\Omega)$-решением уравнения* (6.1.3) *и*

$$\Phi(x,y,t,f,\mathbb{Z}_1 f,...,\mathbb{Z}_n f,\bar{\mathbb{Z}}_1 f,...,\bar{\mathbb{Z}}_n f) \in C^\infty(\Omega_1 \times \mathbb{C}^{2n+1}).$$

Тогда $f \in C^\infty(\Omega)$. Нелинейный оператор $\Psi_{(n,\lambda)}$ гипоэллиптичен.

Теорема 6.3.3. *Пусть параметр λ допустим и f является $C^\infty(\Omega)$-решением уравнения* (6.1.3), *$\Phi \in G^s, s \geq 2$. Тогда $f \in G^s(\Omega)$. Нелинейный оператор $\Psi_{(n,\lambda)}$ расширенно s-гипоэллиптичен при $s \geq 2$.*

Наконец, третья часть настоящей работы посвящена исследованию глобальных свойств решений полулинейных уравнений. Рассматривается следующая краевая задача:

$$L_{\alpha,\beta}u - cu + g(x,y,z,u)$$

$$:= \Delta_x u + |x|^{2\alpha}\Delta_y u + |x|^{2\beta}\Delta_z u - cu + g(x,y,z,u) = 0 \text{ в } \Omega, \qquad (7.1.1)$$

$$u = 0 \qquad \text{на} \qquad \partial\Omega, \qquad (7.1.2)$$

где

$$0 \leqslant c = c(x,y,z) \in C^{0,\gamma}(\bar{\Omega}), g(x,y,z,0) = 0, g(x,y,z,t) \in C(\Omega \times \mathbb{R}),$$

$$\alpha, \beta \geq 0, \alpha+\beta > 0, 1 > \gamma > 0,$$

$$\Delta_x = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \Delta_y = \sum_{j=1}^{n_2} \frac{\partial^2}{\partial y_j^2}, \Delta_z = \sum_{l=1}^{n_3} \frac{\partial^2}{\partial z_l^2}, |x| = \left(\sum_{i=1}^{n_1} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$(x_1,...,x_{n_1},y_1,...,y_{n_2},z_1,...,z_{n_3}) = (x,y,z) \in \mathbb{R}^{n_1+n_2+n_3} =: \mathbb{R}^N$$

и Ω - ограниченная область с гладкой границей в $\mathbb{R}^N$. Отметим, что здесь уравнения могут иметь коэффициенты, не принадлежащие пространствам бесконечно дифференцируемых или аналитических функций. Это и понятно потому что в настоящей части мы заинтересуемся нетолько бесконечно дифференцируемыми или аналитическими решениями но и решениями имеющими низкую гладкость. Вместе, главы 7 и 8 показывают, что явление критического показателя, присущее краевой задаче для эллиптических уравнений, тоже наблюдается в краевой задачи для вырождающихся эллиптических уравнений. Однако, здесь критический показатель меньше, чем тот в эллиптическом случае. Кроме размерности обьёмляющего пространства он зависит также от порядка вырождения исследуемых уравнений. Теперь передём к описанию отдельных глав в настоящей части.

В главе 7 изучается существование нетривиальных решений краевой задачи (7.1.1) - (7.1.2). Настоящая глава состоит из двух параграфов.

В параграфе 7.1 доказываются теоремы вложения пространств Соболева с весом, присоединённых с вырождающимися эллиптическими уравнениями.

Определение 7.1.1. Через $S_1^p(\Omega), 1 \leqslant p < \infty$, мы обозначим совокупность всех таких функций $u \in L^p(\Omega)$, что $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}, |x|^\alpha \dfrac{\partial u}{\partial y_j}, |x|^\beta \dfrac{\partial u}{\partial z_l} \in L^p(\Omega)$ для всех $i = \overline{1, n_1}, j = \overline{1, n_2}, l = \overline{1, n_3}$. Мы определяем норму в этом пространстве следующим образом

$$\|u\|_{S_1^p(\Omega)}$$

$$= \left\{ \int_\Omega \left(|u|^p + \sum_{i=1}^{n_1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p + \sum_{j=1}^{n_2} \left| |x|^\alpha \frac{\partial u}{\partial y_j} \right|^p + \sum_{l=1}^{n_3} \left| |x|^\beta \frac{\partial u}{\partial z_l} \right|^p \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Пространство $S_{1,0}^p(\Omega)$ определяется как замыкание подпространства $C_0^1(\Omega)$ в пространстве $S_1^p(\Omega)$.

Теорема 7.1.1. *Допустим, что* $1 \leqslant p < \tilde{N} := n_1 + n_2(\alpha+1) + n_3(\beta+1)$. *Тогда*

$$S_{1,0}^p(\Omega) \subset L^{\frac{\tilde{N}p}{\tilde{N}-p} - \tau}(\Omega)$$

для каждого достаточно малого положительного числа τ.

Доказательство теоремы 7.1.1, использующее только неравенство Гёльдера, по своей идее напоминает доказательство теоремы вложения классического пространства Соболева, предложенное Гальярдом и Ниренбергом в [12] и [13].

Теорема 7.1.2. *Пусть* $1 \leqslant p < \tilde{N}$. *Тогда вложение* $S^p_{1,0}(\Omega)$ *в* $L^{\frac{\tilde{N}p}{\tilde{N}-p}-\tau}(\Omega)$ *является компактным для каждого достаточно малого положительного числа* τ.

Теорема 7.1.3. *Допустим, что* $p > \tilde{N}$. *Тогда* $S^p_{1,0}(\Omega) \subset C^0\left(\overline{\Omega}\right)$.

В параграфе 7.2 вариационым принципом доказываются теоремы об существовании нетривиальных решений в пространствах, изученных в предыдущем параграфе. Для удобства вместо (x, y, z), $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ будем писать $X, \mathrm{d}X$. В этом пункте предполагаем, что функция $g(X, t)$ имеет только полиномиальный рост по t.

Определение 7.2.2. Функция $u \in S^2_{1,0}(\Omega)$ называется слабым решением краевой задачи (7.1.1) - (7.1.2), если тождество

$$\sum_{i=1}^{n_1} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \mathrm{d}X + \sum_{j=1}^{n_2} \int_\Omega |x|^{2\alpha} \frac{\partial u}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y_j} \mathrm{d}X +$$

$$\sum_{l=1}^{n_3} \int_\Omega |x|^{2\beta} \frac{\partial u}{\partial z_l} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z_l} \mathrm{d}X + \int_\Omega c u \varphi \mathrm{d}X - \int_\Omega g(X, u) \varphi \mathrm{d}X = 0$$

имеет место для каждой функции $\varphi \in C^\infty_0(\Omega)$.

Сделаем следующие предположения на $g(X, t)$

$(g)_1$ $g(X, t) \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$ и $g(X, 0) = 0$.

$(g)_2$ Для некоторого $p \in (1, \frac{\tilde{N}+2}{\tilde{N}-2})$ и некоторой положительной константы C справедливо неравенство $|g(X, t)| \leqslant C\left(1 + |t|^p\right)$.

$(g)_3$ $g(X, t) = \bar{o}(t)$ при $t \longrightarrow 0$ равномерно по $X \in \bar{\Omega}$.

$(g)_4$ $\lim_{t \to \infty} \frac{g(X,t)}{t} = \infty$ или $\lim_{t \to -\infty} \frac{g(X,t)}{t} = \infty$ равномерно по $X \in \bar{\Omega}$.

---

[12] E. Gagliardo, Ric. Mat., **8** (1959), 24-51.

[13] L. Nirenberg, Ann. Sc. Norm. Pisa, **13** (1959), 115-162.

$(g)_5$ Если $|t| \geq A$ для некоторого числа A, то

$$\int_0^t g(X,s)\mathrm{d}s =: G(X,t) \leqslant \mu g(X,t)t$$

где $\mu \in [0, \frac{1}{2})$.

$(g)_6$ $g(X,t)$ - нечётная функция по t.

Теорема 7.2.9. *Допустим, что $g(x,y,z,t)$ удовлетворяет условиям $(g)_1$–$(g)_5$. Тогда краевая задача* (7.1.1) - (7.1.2) *всегда имеет слабое нетривиальное решение.*

Теорема 7.2.10. *Допустим, что $g(x,y,z,t)$ удовлетворяет условиям $(g)_1 - (g)_6$. Тогда краевая задача* (7.1.1) - (7.1.2) *имеет бесконечно много слабых нетривиальных решений.*

Далее, изучаем влияния добавления линейного члена в правой части уравнения (7.1.1). Более подробно, рассмотрим краевую задачу

$$L_{\alpha,\beta}u + d(x,y,z)u + g(x,y,z,u) = 0 \text{ в } \Omega, \tag{7.2.18}$$

$$u = 0 \qquad \text{на} \qquad \partial\Omega, \tag{7.2.19}$$

где d - неотрицательная функция. Соответствующая проблема на собственные значения

$$L_{\alpha,\beta}v(x,y,z) + \lambda d(x,y,z)v(x,y,z) = 0 \text{ в } \Omega,$$

$$v = 0 \qquad \text{на} \qquad \partial\Omega$$

обладает последовательностью собственных значений $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \cdots$. Получены следующие теоремы:

Теорема 7.2.11. *Пусть $\lambda_1 > 1$, g удовлетворяет условиям $(g)_1 - (g)_5$ и $\lim_{t\to\infty} \frac{g(X,t)}{t} = \infty$ $(\lim_{t\to-\infty} \frac{g(X,t)}{t} = \infty)$. Тогда краевая задача* (7.2.18) - (7.2.19) *имеет нетривиальное решение $u > 0 (u < 0)$ в $\Omega \cap \{(0,y)\}$.*

Теорема 7.2.12. *Если g удовлетворяет условиям $(g)_1 - (g)_6$ и $\lambda_l \leqslant 1 < \lambda_{l+1}$, то краевая задача* (7.2.18) - (7.2.19) *имеет бесконечно много нетривиальных решений.*

<u>Последная глава</u> уделяет внимание проблеме несуществования нетривальных решений краевой задачи, рассмотренной в предыдущей главе и вопросу об гладкости собственных функций вблизи границы. Она состоит из двух параграфов. В параграфе 8.1 установлены обобщённые тождества Похожаева. Отсюда вытекают теоремы об несуществовании нетривиальных решений.

Теорема 8.1.1 (Обобщённое тождество Похожаева [14]). *Пусть $u\,(x,y,z)$ - решение краевой задачи* (7.1.1) - (7.1.2), *где $c = 0$, $g(x,y,z,t) = g(t)$, которое принадлежит $H^2(\Omega)$. Тогда имеет место тождество*

$$\int_\Omega \left[\frac{\tilde{N}}{n_1} G\,(u) - \frac{\tilde{N}-2}{2n_1} g\,(u)\,u \right] \mathrm{d}X = \frac{1}{2n_1} \int_{\partial\Omega} \tilde{\nu}_{\alpha,\beta} \tilde{\nu}^{\alpha,\beta} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2 \mathrm{d}S,$$

где

$$\mathrm{d}x = \mathrm{d}x_1 ... \mathrm{d}x_{n_1}, \mathrm{d}y = \mathrm{d}y_1 ... \mathrm{d}y_{n_2}, \mathrm{d}z = \mathrm{d}z_1 ... \mathrm{d}z_{n_3},$$
$$\tilde{\nu}_{\alpha,\beta} = |\nu_x|^2 + |x|^{2\alpha}.|\nu_y|^2 + |x|^{2\beta}.|\nu_z|^2,$$
$$\tilde{\nu}^{\alpha,\beta} = (x,\nu_x) + (\alpha+1)\,(y,\nu_y) + (\beta+1)(z,\nu_z),$$
$$(x,\nu_x) = \sum_{i=1}^{n_1} x_i \nu_{x_i}, (y,\nu_y) = \sum_{j=1}^{n_2} y_j \nu_{y_j}, (z,\nu_z) = \sum_{l=1}^{n_3} z_l \nu_{z_l},$$
$$|\nu_x|^2 = \sum_{i=1}^{n_1} |\nu_{x_i}|^2, |\nu_y|^2 = \sum_{j=1}^{n_2} |\nu_{y_j}|^2, |\nu_z|^2 = \sum_{l=1}^{n_3} |\nu_{z_l}|^2.$$

Определение 8.1.1. Область Ω называется $L_{\alpha,\beta}$ - звёздной по отношению к началу координат $(0,0)$, если неравенство $\tilde{\nu}^{\alpha,\beta} > 0$ выполняется почти всюду на $\partial\Omega$.

---

[14] С. И. Похожаев, ДАН СССР, **165** (1965), 36-39.

На основе теоремы 8.1.1 можно получить следующую теорему:

Теорема 8.1.2. *Пусть* Ω - $L_{\alpha,\beta}$*-звёздная область по отношению к началу координат и* $g(t) = \lambda t + |t|^{\gamma} t$, *где* $\lambda \leqslant 0, \gamma \geq \frac{4}{\tilde{N}-2}$. *Тогда краевая задача* (7.1.1) - (7.1.2) *не имеет нетривиальных решений в* $H^2(\Omega)$.

Пусть теперь $\phi(x_1) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^1), \phi(x_1) \neq 0$ при $x_1 \neq 0, \phi(x_1)$ принимает действительные значения, $\dfrac{d^n\phi(0)}{dx_1^n} = 0$ для любого n. Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$L_{\phi}u + g(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \phi^2(x_1)\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + g(u) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{8.1.15}$$

$$u = 0 \qquad \text{на} \quad \partial\Omega, \tag{8.1.16}$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ - ограниченная область с гладкой границей, содержащая начало координат.

Теорема 8.1.3. *Пусть* $u(x)$ - *решение краевой задачи* (8.1.15) - (8.1.16), *которое принадлежит* $H^2(\Omega)$. *Тогда* $u(x)$ *удовлетворяет тождеству:*

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \left\{ (\beta+1)\, G(u) - \frac{\beta-1}{2} g(u)\, u \right\} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \\ &= \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 \left(\nu_1^2 + \phi^2(x_1).\nu_2^2\right) \{x_1.\nu_1 + \beta x_2.\nu_2\} \,\mathrm{d}s \\ &\quad + \int_{\Omega} \left(x_1\phi'(x_1)\phi(x_1) - \beta\phi^2(x_1)\right) \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \end{aligned}$$

для любого $\beta > 0$.

Определение 8.1.2. Область Ω называется L_{β} - звёздной по отношению к началу координат, если неравенство

$$(x_1.\nu_1 + (\beta+1)\, x_2.\nu_2) > 0$$

выполняется почти всюду на $\partial\Omega$. Область Ω называется L_{∞} - звёздной по отношению к началу координат, если Ω является L_{β} - звёздной для любого $\beta > 0$.

Теорема 8.1.4. *Пусть область* Ω - L_β- *звёздна по отношению началу координат и*

- $(\beta+2)\,G\,(t)-\frac{\beta}{2}g\,(t)<0$ *при* $t\neq 0.$
- $x_1.\ \phi'(x_1)\geq(\beta+1)\phi(x_1)$ *в* $\Omega.$

Тогда не существует нетривиальное решение $u\in H^2\,(\Omega)$ *для краевой задачи* (8.1.15) - (8.1.16)*.*

Теорема 8.1.5. *Пусть область* Ω - L_β- *звёздна по отношению к началу координат и*

- $(\beta+2)\,G\,(t)-\frac{\beta}{2}g\,(t)<0$ *при* $t>0.$
- $x_1.\ \phi'(x_1)\geq(\beta+1)\phi(x_1)$ *в* $\Omega.$

Тогда не существует нетривиальное положительное решение $u\in H^2\,(\Omega)$ *для краевой задачи* (8.1.15) - (8.1.16)*.*

Пусть $\phi(x_1)=\mathrm{e}^{-|x_1|^{-\delta}},(\delta>0)$ и $g(t)=\lambda t+|t|^\gamma t$, где $\lambda\leqslant 0$, $\gamma>0$. Можно показать, что для любого $\gamma>0$ найдётся такое число $r(\gamma,\delta)$, что краевая задача (8.1.15) - (8.1.16) не имеет нетривиальных решений $u\in H^2\,(\Omega)$, где $\Omega=\{(x_1,x_2):x_1^2+x_2^2<r^2(\gamma,\delta)\}$.

В параграфе 8.2 исследуется гладкость собственных функций краевой задачи вблизи границы путём использования найденных в первой части фундаментальных решений. Как указано Джерисоном, вопрос об регулярности вблизи границы решений краевой задачи для вырождающихся эллиптических уравнений очень сложен и он имеет глубокую связь с свойствами решений краевой задачи для эллиптических уравнений в области с нерегулярными границами (см. [15]). Эта проблема ожидает много интересных исследований и полное его изучение будет требовать применения новых техник. Получена следующая главная теорема:

Теорема 8.2.2. A) *Предположим, что*

---

[15] В. А. Кондратьев, Труды Моск. матем. о-ва, **16** (1967), 209-292.

- $G_{k,0}u+\lambda a(x,y)u=0$ *в* Ω, *где* $a(x,y)\in C^{\infty}\left(\bar{\Omega}\right)$ *и* $u\in S^2_{1,0}\left(\Omega\right)$.
- *Если* $(0,\tilde{y})\in\partial\Omega$, *то существует такая окрестность* $O(0,\tilde{y})$, *что* $O(0,\tilde{y})\cap\partial\Omega=$ *линия* $(x,\tilde{y})$, *где* $-c_1<x_1<c_1$.

Тогда $u\in C^{\infty}(\overline{O\left(0,\tilde{y}\right)\cap\Omega})$.

В) *Предположим, что*

- $G_{k,0}u+\lambda a(x,y)u=0$ *в* Ω, *где* $a(x,y)\in C^{\infty}\left(\bar{\Omega}\right)$ *и* $u\in S^2_{1,0}\left(\Omega\right)$.
- *Если* $(0,\tilde{y})\in\partial\Omega$, *то существует такая окрестность* $O(0,\tilde{y})$, *что* $O(0,\tilde{y})\cap\partial\Omega=\left\{(k+1)^2(y-\tilde{\tilde{y}})^2+x^{2k+2}=(k+1)^2\right\}\cap\partial\Omega$.

Тогда $u\in C^{\infty}(\overline{O\left(0,\tilde{y}\right)\cap\Omega})$.

Отметим, что для иллюстрации полученных результатов в диссертации, приводятся примеры (в некотором случае контрпримеры) в почти каждой главе.

В заключение автор выражает глубокую благодарность профессору Ю.В.Егорову за постоянное внимание к работе, профессорам В.А.Кондратьеву, и С.И.Похожаеву за поддержки и внимание к работе.

III. ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[1] Н. М. Чи, *О свойстве глобальной гипоэллиптичности одного дифференциального оператора высокого порядка* , Дифф. Уравн., **26** (1990), 687-692.

[2] Н. М. Чи, *Гипоэллиптические псевдодифференциальные операторы четвертого порядка с неинволютивным характеристическим множеством*, Вестн. МГУ, (1990), 71-73.

[3] Ю. В. Егоров, Н. М. Чи, *Максимально гипоэллиптические операторы с неинволютивным характеристическим множеством*, ДАН СССР, **314** (1990), 1059-1061.

Главная теорема принадлежит Ю. В. Егорову и Н. М. Чи. Кроме того, Ю. В. Егорову принадлежат леммы 2, 3, 8; Н. М. Чи принадлежат леммы 1, 4, 5, 6, 7, .

[4] Н. М. Чи, *О свойстве глобальной гипоэллиптичности одного дифференциального оператора*, Матем. Зам., **49** (1991), 147-149.

[5] Ю. В. Егоров, Н. М. Чи, *Об классе максимально гипоэллиптических операторов*, Труды Сем. Петровского, **17** (1994), 3-26.

Ю. В. Егорову принадлежат доказательства теоремы 2, лемм 2, 7; Н. М. Чи принадлежат доказательства теоремы 1, лемм 3-6.

[6] Н. М. Чи, *Об уравнении Грушина*, Матем. Зам., **63** (1998), 95-105.

[7] Н. М. Чи, *Некоторые примеры негипоэллиптических бесконечно вырождающихся эллиптических дифференциальных операторов*, Матем. Зам., **71** (2002), 567-580.

[8] M. Calanchi, L. Rodino, N. M. Tri, *Solutions of logarithmic type for elliptic and hypoelliptic equations*, Ann. Univ. Ferrara, **XLI** (1997), 111-127.

M. Calanchi принадлежат доказательства теорем 1.1, 1.2, предложения 1.4; L. Rodino принадлежат доказательства теоремы 2.1, предложения 2.2, леммы 2.3; Н. М. Чи принадлежат доказательства леммы 3.1, теоремы 3.2.

[9] N. M. Tri, *Critical Sobolev exponent for degenerate elliptic operators*, Acta Math. Vietnam., **23** (1998), pp. 83-94.

[10] N. M. Tri, *Semilinear perturbations of powers of the Mizohata operator*, Comm. Part. Diff. Equat. **24** (1999), 325-354.

[11] N. M. Tri, *On the Gevrey analyticity of solutions of semilinear perturbations of powers of the Mizohata operator*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, **57** (1999), 37-57.

[12] N. M. Tri, *Remark on non-uniform fundamental solutions and non-smooth solutions of some classes of differential operators with double characteristics*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo , **6** (1999), 437-452.

[13] N. M. Tri, *Non-smooth solutions for a class of infinitely degenerate elliptic differential operators*, Vietnam J. Math., **28** (2000), pp. 159-172.

[14] N. M. Tri, *A note on necessary conditions of hypoellipticity for some classes of differential operators with double characteristics*, Kodai Math. J., **23** (2000), 281-297.

[15] N. M. Tri, *On the analyticity and Gevrey regularity of solutions of semilinear partial differential equations with multiple characteristics*, Microlocal Analysis and PDE in the Complex Domain, RIMS, **1159** (2000), 62-73, the University of Kyoto.

[16] M. Mascarello, L. Rodino, N. M. Tri, *Partial differential operators with multiple sympletic characteristics*, Partial differential equations and spectral theory (Clausthal, 2000), Oper. Theory Adv. Appl., **126** (2000), pp. 293-297, Birkhäuser Verlag Basel, Switzerland.

Теорема 2.1 принадлежит M. Mascarello, L. Rodino, Н. М. Чи.

[17] N. M. Tri, *On local properties of some classes of infinitely degenerate elliptic differential operators*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, **59** (2001), 277-288.

[18] N. M. Tri, *On the Gevrey regularity of solutions of a class of semilinear elliptic degenerate equations on the plane*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo , **9** (2002), 217-255.

[19] N. T. C. Thuy, N. M. Tri, *Some existence and non-existence results for boundary value problem (BVP) for semilinear elliptic degenerate operators*, Russ. J. Math. Phys., **9** (2002), 366-371.
N. T. C. Thuy принадлежит доказательство предложения 2;
Н. М. Чи принадлежат доказательства леммы 1, теорем 1, 2.
[20] N. M. Tri, *Gevrey regularity of solutions of semilinear hypoelliptic equations on the plane*, Microlocal Analysis and Related Topics, RIMS, **1261** (2002), 140-149, the University of Kyoto.
[21] N. M. Tri, *New argument for the Gevrey regularity of solutions of nonlinear elliptic PDES*, Russ. J. Math. Phys., **10** (2003), 353-358.
[22] N. M. Tri, *On the Gevrey analyticity of solutions of semilinear Kohn - Laplacian on the Heisenberg group*, Proceedings of the International Conference on "Abstract and Applied Analysis", edited by N. M. Chuong, L. Nirenberg, W. Tutschke, World Scientific, 2004, 335-353.
[23] N. M. Tri, *On local properties of elliptic degenerate semilinear partial differential operators*, Proceedings of the Hanoi Conference on Partial Differential Equations and Their Applications, pp. 41-55, 2000.
[24] N. M. Chuong, T. D. Ke, N. V. Thanh, N. M. Tri, *Non-existence theorems for boundary value problems for some classes of semilinear degenerate elliptic operators*, Proceedings of the Hanoi Conference on Partial Differential Equations and Their Applications, pp. 185-190, 2000.
N. M. Chuong, T. D. Ke, N. V. Thanh принадлежат доказательства леммы 1, теорем 1-3; Н. М. Чи принадлежат доказательства леммы 2, теорем 4-6.
[25] N. M. Chuong, L. Q. Trung, N. M. Tri, *Theory of Partial Differential Equations*, Vietnam Science and Technique Publisher, 1995, книга на Вьетнамском языке.
N. M. Chuong, L. Q. Trung принадлежат главы 1, 4, 5, 6; Н. М. Чи принадлежат главы 2, 3.
[26] N. M. Chuong, H. T. Ngoan, L. Q. Trung, N. M. Tri, *Partial Differential Equations*, Vietnam Education Publisher, 2000, книга на Вьетнамском языке.

N. M. Chuong, H. T. Ngoan, L. Q. Trung принадлежат главы 1, 4, 5, 6; Н. М. Чи принадлежат главы 2, 3.

[27] V. T. T. Hien, N. M. Tri, *Analyticity of solutions of semililnear equations with double characteristics*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **337** (2008) 1249-1260.

V. T. T. Hien принадлежат доказательства лемм 1, 2, теоремы 2, предложения 1; Н. М. Чи принадлежат доказательства теорем 1, 3, 4, 5, леммы 3.

[28] N. M. Tri, *Semilinear hypoelliptic operators with multiple characteristics*, Trans. Amer. Math. Soc., **360** (2008), 3875-3907.